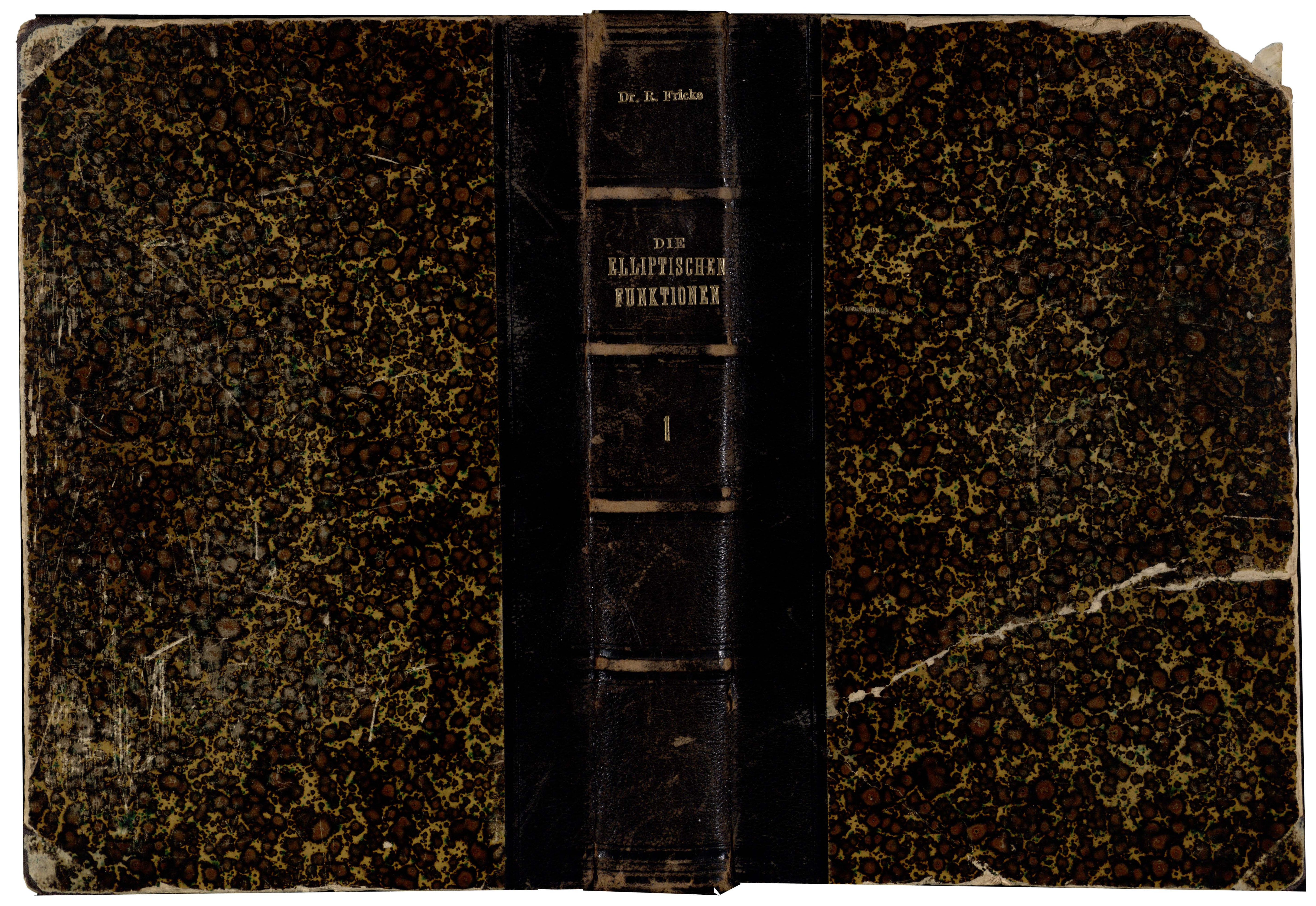


Dr. R. Fricke
DIE
ELLIPTISCHEN
FUNKTIONEN
1

Olw. 14.1 14,21
J. +5 min

DIE ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNGEN

VON

DR. ROBERT FRICKE
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

ERSTER TEIL

DIE FUNKTIONENTHEORETISCHEN UND ANALYTISCHEN GRUNDLAGEN

MIT 83 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1916


PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA

DEM ANDENKEN MEINER FRAU

GEWIDMET

Vorwort.

Zur Einführung des Werkes, dessen ersten Teil ich hiermit vorlege, bedarf es nur weniger Worte. Bei der einige Jahre zurückliegenden Abfassung des Referates „Elliptische Funktionen“ für den zweiten Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften habe ich es als eine reizvolle Aufgabe empfunden, die Grundsätze, nach welchen ich den vierten und fünften Abschnitt des Referates („Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen nach neueren Anschauungen“ und „Addition, Multiplikation, Division und allgemeine Transformation der elliptischen Funktionen“) entwickelt habe, bei einer umfassenden Lehrbuchdarstellung der Theorie der elliptischen Funktionen zu verwerten. Als die beiden wichtigsten Gesichtspunkte erscheinen mir hierbei erstens die starke Hervorhebung der *algebraischen Grundlage*, zweitens die Einordnung des Ganzen in die *Stufentheorie* von F. Klein. Es hat, wie ich nicht zweifele, lange die allgemeine Anerkennung gefunden, daß die Stufentheorie die richtige Grundlage abgibt, um die verschiedenen, zunächst scheinbar auseinanderliegenden Darstellungsformen der Theorie der elliptischen Funktionen in organischen Zusammenhang zu bringen. So nimmt denn auch das vortreffliche, der ersten Einführung dienende Buch von H. Burkhardt auf die Stufentheorie Rücksicht; und wenn unsere großen Werke über elliptische Funktionen dieses noch nicht tun, so darf man dabei nicht vergessen, daß die Entstehungszeit derselben mehr als zwei Jahrzehnte zurückliegt.

Daß ich, was die Methode der Darstellung, die Verwertung der Invariantentheorie, der Gruppentheorie, der geometrischen Anschauung usw. angeht, den Grundsätzen getreu geblieben bin, welche ich mir in einem mehr als 30-jährigen engen wissenschaftlichen Verkehr mit meinem Lehrer und Freunde F. Klein zu eigen gemacht habe, darf ich als selbstverständlich ansehen. Wenn die gemeinsame Tätigkeit zunächst den höheren Gebieten der Modulfunktionen und der automorphen Funktionen zustrebte, so blieb eben dadurch in dem elementareren Gebiete der elliptischen Funktionen noch eine Arbeit zu leisten, die mir nicht unwichtig erscheint. Wenn diese Arbeit nun auch in eine Zeit fällt, wo die Funktionentheorie in schnell vorwärts eilender Forschung sich mit weit allgemeineren Problemen beschäftigt und unter der mächtigen Einwirkung der Mengenlehre ein neues Gewand anzulegen im Begriffe steht, so darf doch gesagt werden, daß die elliptischen Funktionen zum

klassischen Bestande unserer Wissenschaft gehören, dem das Interesse nie versagt werden wird, daß ferner die elliptischen Funktionen für die Anwendungen eine Bedeutung besitzen, die wenigstens von seiten dieser Anwendungen auch heute noch keineswegs in vollem Maße gewürdigt wird.

Der vorliegende erste Teil des Werkes bringt die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen, indem er die Theorie der elliptischen Funktionen erster und zweiter Stufe entwickelt. Die übrigen Teile des Werkes sollen so angelegt werden, daß jeder Teil für sich ein tunlichst selbständiges Bild seines Gegenstandes entwickelt. Der zweite Teil wird den algebraischen und arithmetischen Ausführungen gewidmet sein, der dritte den geometrischen und mechanischen Anwendungen. Auf diesen dritten Teil ist meine Hoffnung besonders gerichtet; möchte er dazu beitragen, die bekannten vielseitigen Beziehungen unserer Theorie zu Problemen der Geometrie und Mechanik bis in die numerischen Einzelaufgaben hinein lebhaft und fruchtbringend zu gestalten.

Für die mühevolle und sorgfältige Durchsicht der Korrekturbogen danke ich Fräulein Dr. phil. H. Petersen, hier, aufrichtig. Besonderen Dank aber schulde ich der Verlagsbuchhandlung, daß sie trotz aller Schwierigkeiten der Zeit den Druck des vorliegenden Bandes ohne erhebliche Verzögerung durchgeführt hat.

Braunschweig, den 26. Oktober 1915.

Robert Fricke.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Zusammenstellung von Sätzen über analytische Funktionen.

Seite
§ 1. Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln 1
§ 2. Von den Integralen der analytischen Funktionen 4
§ 3. Erklärung analytischer Funktionen durch Potenzreihen 9
§ 4. Die Cauchysche Integralformel und die Cauchy-Taylorsche Reihe. . 14
§ 5. Die analytische Fortsetzung und die durch dieselbe veranlaßten Ergänzungen der anschaulichen Hilfsmittel 19
§ 6. Das Feld F einer analytischen Funktion und die singulären Punkte derselben 24
§ 7. Von den durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen. . . 30
§ 8. Begriff des Residuums und Sätze über Residuen 36
§ 9. Die Reihe und der Satz von Laurent. Folgerungen über eindeutige Funktionen 39
§ 10. Die ganzen rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen . . . 44
§ 11. Die ganzen transzendenten Funktionen. Exponentialfunktion und Logarithmus 49
§ 12. Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen 56
§ 13. Die rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen 61
§ 14. Die linearen Substitutionen und der Begriff der Kreisverwandtschaft . 66
§ 15. Die linearen Substitutionen zweiter Art und die indirekten Kreisverwandtschaften 73
§ 16. Allgemeine Angaben über algebraische Funktionen und Gebilde . . . 76
§ 17. Der Grad des Zusammenhangs einer Riemannschen Fläche F_m 82
§ 18. Weiteres über algebraische Funktionen speziell bei $p = 0$ und $p = 1$. Grundproblem der Theorie der elliptischen Funktionen 90
§ 19. Lösung linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung . 97
§ 20. Ausführungen über die hypergeometrische Differentialgleichung . . . 105

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen erster Stufe.

Erstes Kapitel.

Die elliptischen Integrale und ihre zur ersten Stufe gehörenden Normalgestalten.

§ 1. Die Verzweigungform, ihre Invarianten und ihre Normalgestalt erster Stufe 118
§ 2. Exkurs über lineare Substitutionen und deren Gruppen endlicher Ordnung 126
§ 3. Die linearen Transformationen der Verzweigungsform in sich 133
§ 4. Invarianz von J gegenüber beliebiger rationaler Transformation der Riemannschen Fläche F_2 137
§ 5. Allgemeine Bemerkungen über die elliptischen Integrale 140
§ 6. Die drei Gattungen der elliptischen Integrale und die Elementarintegrale 142

Seite

§ 7. Die zur ersten Stufe gehörenden Normalgestalten der Integrale der drei Gattungen 152
§ 8. Die Perioden der elliptischen Integrale und die zwischen ihnen bestehenden Relationen 154
§ 9. Die transzendent normierten Integrale zweiter und dritter Gattung . . 162

Zweites Kapitel.

Das elliptische Integral erster Gattung erster Stufe und die durch dasselbe vermittelten Abbildungen.

§ 1. Das Feld F_∞ der Funktion $u(z)$ und seine Abbildung auf die u-Ebene bei Gebrauch spezieller Querschnitte 164
§ 2. Die Perioden ω_1, ω_2 und der Periodenquotient ω des reduzierten Querschnittsystems 175
§ 3. Übergang zu einem beliebigen Querschnittsysteme und lineare Transformation der Perioden 180
§ 4. Verhalten des Integrals erster Gattung bei eindeutigen Transformationen der Fläche F_2 188

Drittes Kapitel.

Die elliptischen Funktionen erster Stufe.

§ 1. Das Integral erster Gattung u als „uniformisierende" Variabele der Riemannschen Fläche F_2 194
§ 2. Der Körper der elliptischen Funktionen, die besonderen Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und das Normalintegral $\zeta(u)$ 197
§ 3. Potenzreihen für die Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$ 199
§ 4. Darstellung der Elementarintegrale in u. Vorläufiges über die Additionstheoreme 201
§ 5. Darstellung aller elliptischen Funktionen des Körpers durch die Funktionen ζ, $\wp$, $\wp'$, $\wp''$, ... 204
§ 6. Die ganze transzendente Funktion $\sigma(u; g_2, g_3)$ 207
§ 7. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die σ-Funktion 212
§ 8. Die elliptischen Funktionen der zweiten und dritten Art 217
§ 9. Anzahltheorem über elliptische Funktionen mit gegebenen Polen nebst Folgerungen 222

Viertes Kapitel.

Die eindeutigen doppeltperiodischen Funktionen erster Stufe.

§ 1. Die Substitutionsgruppe $\Gamma^{(u)}$ der doppeltperiodischen Funktionen . . 229
§ 2. Der Diskontinuitätsbereich der Substitutionsgruppe $\Gamma^{(u)}$ 233
§ 3. Einführung eines sechseckigen Diskontinuitätsbereichs der $\Gamma^{(u)}$ und Erklärung eines reduzierten Periodenpaares 235
§ 4. Von den Transformationen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ in sich 244
§ 5. Begriff der doppeltperiodischen Funktionen und Residuensätze 250
§ 6. Über die Konvergenz gewisser Doppelreihen 255
§ 7. Existenzbeweis der doppeltperiodischen Funktionen 257
§ 8. Teilbruchreihen für die Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$ nebst Folgerungen 260
§ 9. Die Funktionen des ringförmigen Bereiches nebst Anwendungen . . . 264
§ 10. Das System aller elliptischen Funktionen und die Ausartung derselben 272

Fünftes Kapitel.

Die elliptischen Modulfunktionen erster Stufe und ihre inversen Funktionen.

Seite
§ 1. Die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ und ihre Erweiterung durch eine Spiegelung . 280
§ 2. Das Dreiecksnetz der ω-Halbebene und der Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe 285
§ 3. Die erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe 296
§ 4. Die elliptischen Modulfunktionen erster Stufe. 299
§ 5. Die elliptischen Modulformen erster Stufe 304
§ 6. Die Perioden η_1, η_2 als Funktionen der ω_1, ω_2. Produktentwicklung der Diskriminante 310
§ 7. Differentiationsprozesse zur Herstellung von Modulformen 313
§ 8. Die doppeltperiodischen Funktionen erster Stufe als Funktionen dreier Argumente 318
§ 9. Differentialgleichungen der Perioden in bezug auf die Invarianten. Inversion der Modulfunktionen 323
§ 10. Die normierten Perioden als hypergeometrische Funktionen von J . . 329

Zweiter Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Erstes Kapitel.

Die Normalgestalten zweiter und vierter Stufe der Verzweigungsform und der elliptischen Integrale.

§ 1. Die einfachsten irrationalen Invarianten der Verzweigungsform. . . . 341
§ 2. Beziehung der irrationalen Invarianten der Verzweigungsform zu den rationalen Invarianten 345
§ 3. Die Normalgestalt zweiter Stufe der Verzweigungsform 351
§ 4. Die Normalgestalt vierter Stufe der Verzweigungsform 354
§ 5. Die Normalgestalten zweiter und vierter Stufe der elliptischen Integrale 359
§ 6. Die Legendreschen Normalintegrale 366

Zweites Kapitel.

Die elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

§ 1. Das Prinzip der Stufenteilung und der Begriff der elliptischen Funktion n^{ter} Stufe 374
§ 2. Die Kongruenzgruppen zweiter Stufe in der $\Gamma^{(\omega)}$ 377
§ 3. Die Funktionen zweiter Stufe $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ und $\sigma_k(u)$. 382
§ 4. Die Jakobischen Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ 387
§ 5. Die Ableitungen der Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ und Potenzreihen derselben. 396
§ 6. Darstellung der Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ als Quotienten ganzer transzendenter Funktionen 400
§ 7. Produktentwicklungen der elliptischen Funktionen zweiter Stufe . . . 404
§ 8. Laurentsche und Fouriersche Reihen für die Funktionen sn, cn und dn 408
§ 9. Die Fourierschen Reihen für die ganzen Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ und die Thetafunktionen 413

Seite
§ 10. Die Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik 420
§ 11. Die Thetafunktionen höherer Ordnung mit beliebiger Charakteristik . 423
§ 12. Die Thetafunktionen m^{ter} Ordnung als ganze elliptische Funktionen dritter Art 426

Drittes Kapitel.

Die Modulfunktionen zweiter Stufe und die lineare Transformation der elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

§ 1. Der Diskontinuitätsbereich der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe . 434
§ 2. Die elliptischen Modulfunktionen zweiter Stufe 440
§ 3. Die elliptischen Modulformen zweiter Stufe. 445
§ 4. Modulfunktionen höherer Stufen in der Theorie der elliptischen Funktionen. 449
§ 5. Die Perioden betrachtet als Funktionen des Integralmoduls 460
§ 6. Die elliptischen Funktionen zweiter Stufe als Funktionen zweier Argumente. Ausartungen 466
§ 7. Verhalten der elliptischen Funktionen zweiter Stufe bei beliebigen Periodensubstitutionen 473
§ 8. Verhalten der Thetafunktionen bei beliebigen Periodensubstitutionen . 477
§ 9. Allgemeines Gesetz über das Verhalten der Thetafunktionen bei Periodensubstitutionen 483
§ 10. Anwendung auf die Theorie der Gaußschen Summen 491



Einleitung.

Zusammenstellung von Sätzen über analytische Funktionen.

In der nachfolgenden Einleitung sollen einige Definitionen und Sätze über analytische Funktionen zusammengestellt werden, und zwar in derjenigen vielfach beschränkten Gestalt, in welcher dieselben innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen zur Benutzung kommen. Auf die Beweise der Sätze kann hier zumeist nicht ausführlich eingegangen werden; es ist in dieser Hinsicht vielmehr auf die Spezialwerke über die Theorie der analytischen Funktionen zu verweisen.[1])

§ 1. Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln.

Die komplexe Variabele $z = x + iy$ soll alle *endlichen* komplexen Werte annehmen können und zunächst auf diese beschränkt sein. Die Zahlenebene oder „*z-Ebene*", durch deren Punkte man die Werte von z versinnlicht, stellt demnach nur erst den Inbegriff aller ihrer „im Endlichen gelegenen" Punkte dar.

Unter einer „*Umgebung*" des Punktes $z_0 = x_0 + iy_0$ der z-Ebene verstehen wir zweckmäßig alle Punkte z, für welche $|z - z_0| < h$ zutrifft; dabei soll h als eine der Bedingung $h > 0$ genügende endliche reelle Zahl zweckmäßig gewählt sein. Wir fassen also der leichten Anschaulichkeit halber die Umgebung des Punktes $z = z_0$ in der z-Ebene als Inbegriff aller inneren Punkte der Kreisfläche vom Radius h um den Punkt z_0. Die Aussage, daß irgendein Satz in „der" Umgebung von $z = z_0$ gelte, läuft darauf hinaus, daß sich eine Zahl h angeben läßt, für deren zugehörige Umgebung des Punktes z_0 der Satz richtig ist.

In einer Umgebung von z_0 sei jedem Werte z eindeutig ein bestimmter endlicher komplexer Wert $w = u + iv$ zugeordnet; diese Zuordnung werde durch das Symbol $w = f(z)$ bezeichnet und w eine „*Funktion*" von z genannt. Sind z und $z + \varDelta z$ zwei verschiedene Punkte jener Umgebung, so hat

$$(1) \qquad \frac{f(z + \varDelta z) - f(z)}{\varDelta z}$$

---

1) Wir beziehen uns vornehmlich auf W. F. Osgood, „Lehrbuch der Funktionentheorie", Erster Band, Zweite Auflage (Leipzig und Berlin, 1912); dieses Werk soll kurz durch Angabe des Autors zitiert werden.

einen zugehörigen bestimmten endlichen Wert. Man ändere jetzt bei festgehaltenem z den Wert Δz in irgendeiner Weise entsprechend der Vorschrift $\lim \Delta z = 0$, jedoch natürlich so, daß $z + \Delta z$ dauernd der Umgebung von z_0 angehört. Zeigt sich, daß die entsprechenden Werte (1) unabhängig von der besonderen Art, in der der vorgeschriebene Grenzübergang vollzogen wird, einen bestimmten endlichen, allein von z abhängigen Grenzwert besitzen, so bezeichnen wir denselben durch $f'(z)$ und nennen ihn die *„Ableitung"* von $f(z)$ im Punkte z; wir sagen auch, *die Funktion $f(z)$ habe im Punkte z eine Ableitung.*

Man sagt: *Die Funktion $f(z)$ verhält sich in der Umgebung von z_0 „analytisch" oder stellt dortselbst eine „analytische Funktion" dar, wenn sie in jedem Punkte z dieser Umgebung eine Ableitung besitzt.*[1]) Ist $f(z)$ in der Umgebung von z_0 analytisch, so kann man aus der Existenz der Ableitung $f'(z)$ zeigen[2]), *daß $f'(z)$ in jedem Punkte jener Umgebung stetig ist.* Die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ braucht demnach nicht als ein Merkmal in den „Begriff" der analytischen Funktion $f(z)$ aufgenommen zu werden. Die Stetigkeit von $f(z)$ selbst in einem Punkte z ist eine unmittelbare Folge der Existenz der Ableitung in diesem Punkte.

Der reelle Bestandteil u und der vom Faktor i befreite imaginäre Bestandteil v der analytischen Funktion:

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

sind in der Umgebung von z_0 eindeutige reelle Funktionen der reellen Variabeln x und y. Berechnet man für einen einzelnen zugehörigen Punkt z den eindeutig bestimmten Wert $f'(z)$ erstlich, indem man sich dem Punkte z in Richtung der x-Achse annähert, zweitens dadurch, daß man die Annäherung in Richtung der y-Achse vollzieht, so gewinnt man für ein und denselben Wert $f'(z)$ die beiden Darstellungen:

$$f'(z) = \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$f'(z) = \frac{\partial(u + iv)}{i \cdot \partial y} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten folgt: *Die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ befriedigen die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

1) Die Benennung „analytisch" hat Weierstraß im Anschluß an Lagrange eingeführt. Die oben gewählte Begriffserklärung der analytischen Funktionen hat Riemann in Übereinstimmung mit den Anschauungen Cauchys an die Spitze gestellt; s. Riemann, „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe", Gesammelte mathematische Werke (Leipzig, 1876), S. 3ff.

2) Osgood, S. 225 und 349.

welche als die „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“ bezeichnet werden.[1])

Eine zwei Punkte der z-Ebene verbindende, in dieser Ebene gelegene Linie soll ein *„reguläres Kurvenstück“* heißen, wenn sie sich selbst nicht schneidet, nirgends eine Spitze aufweist, dagegen überall (unter Einschluß der Endpunkte) eine bestimmte Tangente hat, die sich längs der Kurve nirgends unstetig ändert. In vielen Fällen reicht man damit aus, als solche Kurvenstücke gerade Strecken oder Kreisbogen zu benutzen. Eine *„reguläre Kurve“* der z-Ebene soll eine solche Kurve sein, die aus endlich vielen regulären Stücken zusammengesetzt ist; man darf annehmen, daß benachbarte Kurvenstücke in ihrem gemeinsamen Endpunkte unter einem von π verschiedenen Winkel zusammenstoßen, da sie anderenfalls nur ein Kurvenstück bilden würden.

Unter T_n wollen wir einen zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen *„Bereich“* der z-Ebene verstehen, dessen Rand aus n getrennt verlaufenden, geschlossenen regulären Kurven besteht; hierbei ist n irgendeine endliche positive ganze Zahl. Die Randpunkte selber sollen dem Bereiche T_n *nicht* angehören.[2]) Der Bereich T_n heißt *„n-fach zusammenhängend“*; durch geeignet gewählte $(n-1)$ Querschnitte Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ kann er in einen einfach-zusammenhängenden Bereich T_1' verwandelt werden. Jeder dieser Querschnitte verbindet zwei Randpunkte von T_n und darf selbst als reguläre Kurve gewählt werden; die Punkte der Querschnitte sind Randpunkte von T_1' und gehören also nicht mehr diesem Bereiche zu (vgl. Fig. 1, in der $n = 3$ ist). Ist es nicht nötig, die Zahl n hervorzuheben, so sprechen wir kurz von einem Bereiche T.

Fig. 1.

Da jeder Punkt des Bereiches T ein innerer Punkt desselben ist, so läßt sich um denselben ein Bereich eingrenzen, der durchweg aus Punkten von T besteht. Ist jetzt im Bereiche T eine eindeutige und daselbst überall endliche Funktion $w = f(z)$ erklärt, so sagen wir, *sie verhalte sich im Bereiche überall analytisch, falls sie in der Umgebung jeder Stelle von* T *eine analytische Funktion darstellt.* Sie wird in jedem Punkte z von T stetig sein und daselbst eine bestimmte endliche und gleichfalls stetige Ableitung $f'(z)$ besitzen.

1) Betreffs des früheren Auftretens dieser Gleichungen s. Osgood, S. 226.

2) Der Bereich heißt deshalb „nichtabgeschlossen“; auch die „Umgebung“ eines Punktes z_0 war oben als „nichtabgeschlossener“ Bereich erklärt.

So ist z. B. eine rationale ganze Funktion $f(z)$ in jedem Bereiche T analytisch, und dasselbe gilt z. B. von den Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$. Dagegen wird sich eine gebrochene rationale Funktion $f(z)$ in allen denjenigen etwa in T_n gelegenen Stellen nicht mehr analytisch verhalten, wo sie unendlich wird. Ist m die Anzahl dieser Stellen, so wolle man in T_n um diese Punkte als Mittelpunkte m so klein gewählte Kreise beschreiben, daß diese Kreise weder miteinander noch mit dem Rande von T_n kollidieren. Nimmt man die Flächen dieser Kreise vom Bereiche T_n fort und bereichert man daraufhin den Rand um jene m Peripherieen, so wird $f(z)$ in dem damit gewonnenen Bereiche T_{m+n} wieder allenthalben analytisch sein.

§ 2. Von den Integralen der analytischen Funktionen.

Im Bereiche T_n, in welchem $f(z)$ als eindeutige analytische Funktion erklärt ist, ziehen wir von einem festen Punkte z_0 nach einem Punkte z eine reguläre Kurve. Längs dieser Kurve erstrecken wir das Integral:

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei wir zur Unterscheidung von der oberen Grenze z die Integrationsvariabele mit ζ bezeichnen. Dieses Integral hat einen bestimmten endlichen Wert[1]), der einen Zeichenwechsel erfährt, wenn man über die vorgeschriebene Kurve in umgekehrter Richtung, also von z nach z_0, integriert.

Gilt weiter zunächst $n = 1$, und ist im einfach zusammenhängenden Bereiche T_1 eine geschlossene reguläre Kurve C gezeichnet, so wollen wir unter den beiden Richtungen, in denen wir diese Kurve durchlaufen können, eine beliebig, aber fest wählen. Das in der gewählten Richtung über C erstreckte Integral der analytischen Funktion $f(z)$ werde mit:

$$(2) \qquad \int_{(C)} f(\zeta)\,d\zeta$$

bezeichnet. Alsdann gilt der „*Cauchysche Integralsatz*“: *Das über die geschlossene Kurve C erstreckte Integral* (2) *der analytischen Funktion $f(z)$ hat den Wert* 0. Dieser für die ganze Theorie der analytischen Funktionen grundlegende Satz wird gewöhnlich in der Art bewiesen, daß man die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ beim Beweise benutzt.[2]) Indessen hat E. Goursat[3]) ein Beweisverfahren ausgebildet, das ohne die Stetig-

1) Osgood, S. 277 ff. 2) Osgood, S. 129 ff. und S. 284.

3) S. dessen Abhandlung „Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy“, Amer. Math. Soc. Transact, B. 1, S. 14 (1900); übrigens s. auch Osgood, S. 349.

keit von $f'(z)$ arbeitet. Es wurde dieserhalb auch oben die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ nicht in die Begriffserklärung einer analytischen Funktion aufgenommen.

Indem wir ein für allemal daran festhalten, nur reguläre Kurven als Integrationsbahnen zu benutzen, folgt aus dem Cauchyschen Satze: *Im einfach zusammenhängenden Bereiche* T_1 *ist der Wert des Integrals* (1) *unabhängig von der zwischen* z_0 *und* z *gewählten Bahn, so daß das Integral* (1) *bei festgehaltener unteren Grenze* z_0 *eine „eindeutige" Funktion* $F(z)$ *der oberen Grenze ist:*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{3}$$

Sind nämlich zwischen z_0 und z, wie in Fig. 2, zwei Bahnen C_1 und C_2 gewählt, so wird, wenn wir an die in der vorgeschriebenen Pfeilrichtung durchlaufene Kurve C_1 die entgegen der Pfeilrichtung beschriebene Kurve C_2 anfügen, dadurch eine geschlossene Kurve C gewonnen. Durch Zerlegung des über diese Kurve C erstreckten Integrals, das infolge des Cauchyschen Integralsatzes den Wert 0 hat, in die beiden auf C_1 und auf die dem Pfeil entgegen durchlaufene Kurve C_2 bezogenen Summanden ergibt sich, indem wir neuerdings im zweiten Summanden die ursprüngliche Integrationsrichtung wieder herstellen, der ausgesprochene Satz.

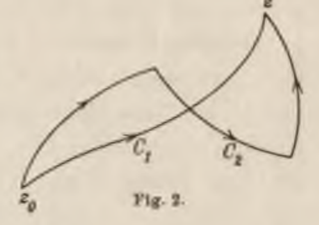
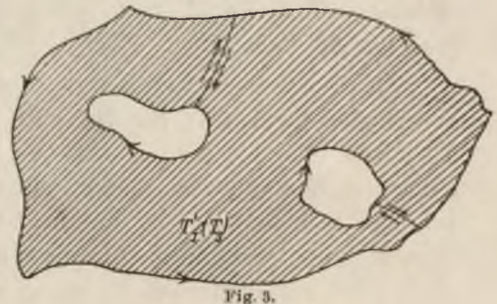


Fig. 2.

Der Cauchysche Integralsatz kommt unten gewöhnlich in einer etwas allgemeineren Fassung zur Verwendung. In einem vorgelegten Bereiche T_n denken wir einen durch m reguläre Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ berandeten Teilbereich T_m gelegen. Es wird alsdann $f(z)$ nicht nur in T_m, sondern auch noch in jedem Randpunkte von T_m analytisch sein. Durch Hinzufügung von $(m-1)$ Querschnitten verwandeln wir T_m in einen T_1' von einfachem Zusammenhang. Für eine geschlossene Kurve C dieses T_1' gilt der Cauchysche Integralsatz. Im vorliegenden Falle dürfen wir als eine solche Kurve C aber auch den gesamten Rand von T_1' benutzen, der sich aus den m Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ und jeweils den beiden „Ufern" der Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}$ zusammensetzt. Als „positiven Umlaufssinn" sehen wir, wie bei berandeten Bereichen allgemein üblich ist, den in Fig. 3 durch


Fig. 3.

Pfeile angedeuteten an, bei welchem also die Fläche des Bereiches T_1' zur linken Hand gelegen ist. Hierbei werden die beiden Ufer des einzelnen Querschnittes in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sein. Zerlegen wir also das über den Gesamtrand C von T_1' genommene Integral in die einzelnen Summanden, welche sich auf die genannten Bestandteile von C beziehen, so werden je die beiden Summanden, welche zu den beiden Ufern des einzelnen Querschnitts gehören, sich als entgegengesetzt gleich aufheben. Es restieren also nur die auf die m Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ bezogenen Summanden. So folgt: *Das über den Gesamtrand von T_m im positiven Umlaufssinne erstreckte Integral hat den Wert* 0:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{(C_k)} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{4}$$

Wir kehren zum Bereiche T_1 und zu der in demselben gewonnenen eindeutigen Funktion (3) zurück. In einer ganz dem Bereiche T_1 angehörenden Umgebung von z wähle man einen zweiten Punkt $(z + \varDelta z)$ und darf alsdann den Wert $F(z + \varDelta z)$ als Integral, geführt über die in (3) benutzte Bahn vermehrt um die von z nach $(z + \varDelta z)$ gezogene Gerade, darstellen. Die Differenz der beiden Werte $F(z + \varDelta z)$ und $F(z)$ ist demnach gleich dem Integral, genommen über diese Gerade:

$$F(z + \varDelta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\varDelta z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Hieraus folgt vermöge des Integralbegriffs und der Stetigkeit der Funktion $f(z)$ im betrachteten Punkte z, daß:

$$\lim_{\varDelta z = 0} \frac{F(z + \varDelta z) - F(z)}{\varDelta z},$$

wie man auch in der Umgebung von z den Grenzübergang $\lim \varDelta z = 0$ vollzieht, stets gleich dem bestimmten endlichen Werte $f(z)$ ist. Daraus folgt: *Die im einfach zusammenhängenden Bereiche T_1 eindeutige Funktion $F(z)$, d. h. das Integral der Funktion $f(z)$, betrachtet in seiner Abhängigkeit von der oberen Grenze z, ist in T_1 überall analytisch und hat $f(z)$ zur Ableitung.*

Zu grundlegenden Sätzen führt der Rückgang auf den anfänglich vorgelegten Bereich T_n für den Fall, daß $n > 1$ ist. Wir verwandeln T_n durch $(n-1)$ Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ in einen T_1' von einfachem Zusammenhang und wollen dabei, um zwischen einem linken und rechten Ufer des einzelnen Querschnittes Q unterscheiden zu können, jeden Querschnitt Q in einer der beiden Arten mit einer durch einen Pfeil anzudeutenden Richtung versehen.

Im Innern von T_1' ist die durch das Integral (3) bei festgehaltenem z_0 gegebene Funktion $F(z)$ eine eindeutige analytische Funktion von z. Als neu kommt jedoch hinzu, daß wir die Integration ohne Einbuße der bisher gewonnenen Sätze bis zu irgendeinem „inneren“ Punkte z eines Querschnittes Q heran, sowohl von der linken als von der rechten Seite ausdehnen können. Wir wollen einen solchen Punkt z, je nachdem er von links oder von rechts her erreicht wird, mit z_l bzw. z_r bezeichnen. Einer Ergänzung bedarf dabei der Begriff der Umgebung eines Punktes z_l oder z_r. Die Umgebung eines inneren Querschnittpunktes z wird durch Q in zwei Teile zerlegt, wobei dann der links liegende Teil die Umgebung von z_l ist, der rechts liegende Teil aber die von z_r; die vom Querschnitt Q gelieferten Randpunkte der einzelnen Umgebung dürfen derselben als zugehörig betrachtet werden. Entsprechend wollen wir jetzt auch jeden inneren Querschnittpunkt z zweimal, nämlich als z_l und z_r dem Bereiche T_1' zurechnen.

In dem so ergänzten Bereiche T_1' ist $F(z)$ eindeutig, wobei jedoch selbstverständlich für einen inneren Querschnittpunkt z zwischen den beiden Werten $F(z_l)$ und $F(z_r)$ zu unterscheiden ist. Hier gilt nun als erster Satz: *Sind z und z' irgend zwei innere Punkte eines und desselben Querschnittes Q, so gilt:*

$$F(z_r') - F(z_l') = F(z_r) - F(z_l), \tag{5}$$

so daß längs Q die Differenz der Funktionswerte in je zwei gegenüberliegenden „Uferpunkten“ konstant ist. Offenbar ist nämlich jede der beiden Differenzen:

$$F(z_l') - F(z_l), \qquad F(z_r') - F(z_r)$$

darstellbar als das Integral:

$$\int_z^{z'} f(\zeta)\, d\zeta,$$

genommen längs des zwischen z und z' verlaufenden Teiles von Q.

Die längs Q konstante Wertdifferenz (5) werde mit ω bezeichnet; ist sie, wie wir einstweilen annehmen wollen, nicht gleich 0, so heißt sie eine „*Periode*“ des Integrales $\int f(\zeta)\, d\zeta$, eine Benennung, deren Bedeutung später ersichtlich werden wird. Wie man sich mittels Fig. 4 deutlich machen wolle, kann man ω als Integral:

$$\omega = \int_{(P)} f(\zeta)\, d\zeta \tag{6}$$

darstellen, wo P eine von z_l nach z_r

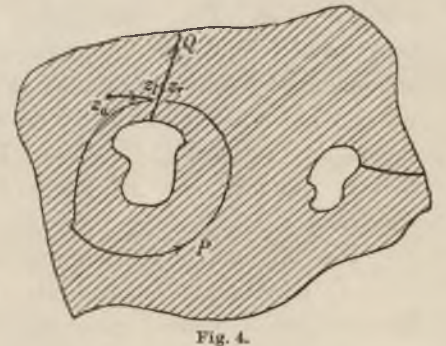


Fig. 4.

laufende Kurve ist, welche abgesehen von ihren Endpunkten nur aus inneren Punkten von T_1' besteht. Denken wir z_l und z_r unter Fortnahme des Querschnitt Q wieder in einen Punkt z verschmolzen, so liefert P eine geschlossene Kurve im ursprünglichen Bereiche T_n und soll, so gedacht, ein „*Periodenweg*" des Bereiches T_n heißen.

Der Vergleich der Gleichung (6) mit dem Cauchyschen Integralsatz wird durch folgende Überlegung näher erläutert. Ist C irgendeine geschlossene Kurve im T_n, so wird das längs C erstreckte Integral sich nicht ändern, wenn man die Kurve C im T_n einer stetigen und ohne Zerreißen vor sich gehenden Gestaltsänderung unterzieht. Es ist dies eine einfache Folge des Cauchyschen Integralsatzes. Im T_1 ist jede geschlossene Kurve durch eine Änderung fraglicher Art auf einen Punkt zusammenziehbar; der zugehörige Integralwert ist dieserhalb immer 0. Im T_n mit $n > 1$ ist diese Zusammenziehung auf einen Punkt keineswegs immer und jedenfalls bei dem obigen Periodenwege P nicht möglich. Daher läßt sich über das Integral (6) zunächst nur aussagen, daß es irgendeinen endlichen Wert ω hat.

Die gewonnenen Ergebnisse setzen uns in den Stand, auch für $n > 1$ das Integral (3) mit einer im ursprünglichen (unzerschnittenen) T_n frei beweglichen oberen Grenze z als Funktion dieses Argumentes z zu charakterisieren. Kehren wir noch einmal zum T_1' zurück und gestatten der von z_0 ausziehenden Integrationsbahn eine einmalige Überschreitung des Querschnitts Q von der rechten zur linken Seite, um z demnächst wieder auf T_1' zu beschränken, so gelangen wir jetzt in T_1' zu Funktionswerten $F_1(z)$, welche in den einzelnen Punkten z zu den bisherigen Werten $F(z)$ in der einfachen Beziehung stehen:

$$F_1(z) = F(z) + \omega. \tag{7}$$

Dabei werden sich die Funktionswerte $F_1(z)$ auf dem rechten Ufer von Q *stetig und ohne Unterbrechung des analytischen Charakters* an die linksseitigen Werte $F(z)$ anschließen. Die erste Begriffserläuterung einer analytischen Funktion knüpften wir zwar oben (am Schlusse von § 1) an eine in T_n *eindeutige* Funktion; es ist aber jetzt sofort verständlich, wenn wir (immer unter der Voraussetzung eines von 0 verschiedenen ω) sagen, *das Integral* (3) *stelle in* T_n *eine mehrdeutige analytische Funktion dar, und es seien* $F(z)$ *und* $F_1(z)$ *zwei verschiedene „Zweige" dieser Funktion.*

Die allgemeine Auffassung ist nun unmittelbar gewonnen. Die $(n-1)$ gerichteten Querschnitte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ mögen für unser Integral (im T_1') die konstanten Wertdifferenzen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ lie-

fern. Nach Analogie von (6) können wir ω_k auch als Integralwert für einen bestimmten Periodenweg P_k erklären:

$$\omega_k = \int_{(k)} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{8}$$

Unter den ω seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ von 0 verschieden. *Ist dann $\nu > 0$, so ist das Integral* (3) *mit einer in* T_n *frei beweglichen oberen Grenze z eine unendlich vieldeutige analytische Funktion, und es wird irgendein „Zweig" dieser Funktion durch den zuerst herausgegriffenen Zweig $F(z)$ in der Gestalt:*

$$F(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_\nu\omega_\nu \tag{9}$$

mittelst ganzer Zahlen[1]) *m darstellbar sein; umgekehrt können wir irgendein System solcher Zahlen m wählen und dann immer zu einem Zweige* (9) *unserer Funktion mit diesen m gelangen.* Man hat eben nur in T_n einen von z_0 nach z führenden Integrationsweg zu wählen, welcher die wieder hinzuzudenkenden Querschnitte Q einzeln in der erforderlichen Anzahl von Malen überschreitet.

§ 3. Erklärung analytischer Funktionen durch Potenzreihen.

Eine zweite von Weierstraß in seinen Berliner Vorlesungen benutzte Methode der Erklärung analytischer Funktionen ist diejenige durch *Potenzreihen.* Um die Allgemeingültigkeit und Bedeutung dieser Erklärungsweise zu erkennen, ist zunächst an die grundlegenden Konvergenzsätze der Potenzreihen zu erinnern.

Es sei eine kurz durch das Symbol $\mathfrak{P}(z)$ zu bezeichnende Potenzreihe:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{1}$$

vorgelegt, wobei z eine komplexe Variabele ist und die $c_0, c_1, \ldots$ endliche komplexe Konstante bedeuten. Man denke für $n > 0$ die reell und nicht-negativ zu nehmenden Wurzeln $\sqrt[n]{|c_n|}$ der absoluten Beträge der c_n gebildet. Gibt es dann nach Auswahl einer beliebig großen positiven Zahl M stets noch ein (und damit unbegrenzt viele) n, so daß:

$$\sqrt[n]{|c_n|} > M \tag{2}$$

zutrifft, so kann die Reihe (1) für kein von 0 verschiedenes z konvergent sein. Es ist nämlich in diesem Falle leicht zu sehen, daß nach Auswahl eines bestimmten, nicht verschwindenden z in der Reihe (1) Glieder nachweisbar sind, welche absolut genommen eine beliebig groß

1) Wenn nichts weiter hinzugesetzt wird, sind hiermit immer irgendwelche endlichen positiven oder negativen ganzen Zahlen, unter Einschluß der Zahl 0, gemeint.

gewählte positive Zahl übersteigen. Das aber steht mit dem Begriffe der Konvergenz im Widerspruch.[1])

Soll demnach Konvergenz vorliegen, so muß eine positive endliche Zahl G angegeben werden können, für welche:

$$0 \leqq \sqrt[n]{|c_n|} \leqq G \tag{3}$$

bei allen $n > 0$ gilt. Man denke sich die Bildpunkte der Zahlwerte $\sqrt[n]{|c_n|}$ auf der Zahlenlinie markiert, die also sämtlich dem von 0 und G eingegrenzten Intervall angehören. Diese unendlich vielen Bildpunkte werden im genannten Intervalle mindestens eine Häufungsstelle h aufweisen, die auch mit einem der Endpunkte 0 oder G zusammenfallen kann[2]); es können aber auch mehrere oder unendlich viele Häufungsstellen der Bildpunkte von $\sqrt[n]{|c_n|}$ vorliegen. Kann man, was bei endlich vielen Häufungsstellen stets möglich ist, unter diesen eine angeben, die dem Zahlwert nach alle übrigen übertrifft, so nennen wir deren Zahlwert g. Ist eine solche Angabe nicht möglich, so gibt es für die Häufungsstellen doch eine obere Grenze, die wir alsdann mit g bezeichnen. In jedem Falle ist g eine bestimmte dem Intervall $0 \leqq g \leqq G$ angehörende Zahl, welche die folgende Eigenschaft hat: Nach Auswahl einer *beliebig* kleinen von 0 verschiedenen positiven Zahl ε gibt es nur noch endlich viele Indizes n, für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g + \varepsilon$ ist, aber stets unendlich viele, für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g - \varepsilon$ gilt.

Ist nun zunächst $g > 0$, so ist $R = g^{-1}$ eine von 0 verschiedene endliche positive Zahl. Die Reihe (1) soll alsdann erstlich für ein z mit einem absoluten Betrage $|z| > R$ untersucht werden. Man wähle eine positive Zahl s aus dem Intervall:

$$|z| > s > R,$$

so daß $g > s^{-1}$ folgt. Eine Zahl ε der eben genannten Bedeutung wähle man so, daß auch noch $g - \varepsilon > s^{-1}$ und also:

$$s(g - \varepsilon) = p > 1$$

1) Siehe hier und weiterhin Osgood, S. 89, 96 ff. und 335 ff.

2) Der Punkt h heißt eine Häufungsstelle der markierten Punkte $\sqrt[n]{|c_n|}$, falls sich in *jeder* Umgebung von h mindestens ein Punkt $\sqrt[n]{|c_n|}$ findet (und damit unbegrenzt viele). Der Begriff der Umgebung eines inneren Punktes oder eines Endpunktes vom fraglichen Intervall der Zahlenlinie ist dabei in sinngemäßer Übertragung der Erklärung der Umgebung eines inneren Punktes oder Randpunktes vom Bereiche T (vgl. S. 1 und 7) zu geben. Über eine Methode „fortgesetzter Halbierung von Intervallen" oder „Einschachtelung immer kleinerer Intervalle" zum Beweise der im Texte behaupteten Existenz mindestens einer Häufungsstelle h sehe man Osgood, S. 16 und 31; wir kommen auf diese Methode unten bei anderer Gelegenheit zurück.

gilt. Nun gibt es noch eine nicht begrenzte Anzahl von Indizes n (die demnach auch nach oben hin nicht unter einer endlichen Grenze bleiben können), für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g - \varepsilon$ ist. Für alle diese gilt:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| > s(g - \varepsilon) = p,$$
$$|c_n z^n| > p^n.$$

Mithin sind in der Reihe Glieder nachweisbar, die absolut genommen jede noch so groß gewählte Zahl übersteigen; die Reihe ist also für den gewählten Wert z divergent.

Es sei zweitens ϱ irgendeine unterhalb R liegende positive Zahl und z sei ein *beliebiger* komplexer Wert, für dessen absoluten Betrag nur $|z| \leqq \varrho$ vorgeschrieben sein soll. Man wähle jetzt eine Zahl r entsprechend der Vorschrift:

$$\varrho < r < R.$$

Dann ist $g < r^{-1}$, und man kann eine Zahl ε der Art wählen, daß auch noch $g + \varepsilon < r^{-1}$ und also:

$$r(g + \varepsilon) = q < 1$$

gilt. Jetzt kann man einen solchen endlichen Index m angeben, daß $\sqrt[n]{|c_n|} < g + \varepsilon$ für alle $n \geqq m$ richtig ist. Also wird für alle diese Indizes n:

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| < r(g + \varepsilon) = q,$$
$$|c_n z^n| < q^n$$

zutreffen. Durch Rückgang auf die geometrische Reihe erkennt man, daß die Reihe (1) jetzt absolut und demnach auch unbedingt, d. h. unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder konvergiert.

Ist endlich $g = 0$, so können wir in der vorstehenden Betrachtung für ϱ eine beliebige endliche Zahl wählen und gelangen die Konvergenz der Reihe (1) betreffend zu demselben Ergebnis wie soeben.

In dem am Anfang betrachteten Falle, wo also eine endliche Zahl g nicht existiert, können wir sagen, es sei $g = \infty$. Ist g endlich und > 0, so heißt $R = g^{-1}$ der „*Konvergenzradius*" und der um den Nullpunkt der z-Ebene beschriebene Kreis des Radius R der „*Konvergenzkreis*" der Reihe $\mathfrak{P}(z)$.[1]) Ist endlich $g = 0$, so tritt *die ganze z-Ebene* (vgl. S. 1) an Stelle des Konvergenzkreises und $\mathfrak{P}(z)$ heißt dann „*beständig konvergent*".

Um die gewonnenen Ergebnisse formell gleich noch in etwas er-

---

1) Über die im Texte gewählte Art der Einführung des Konvergenzkreises s. J. Hadamard, „Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor", Journ. de Math. (4) Bd. 8 (1892).

weiterter Gestalt zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir an Stelle von (1):

$$(4) \qquad c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots,$$

indem wir unter z_0 irgendeinen fest gewählten Wert verstehen. Dabei soll $\mathfrak{P}(z - z_0)$ nicht nur eine symbolische Bezeichnung für die Reihe (4) sein, sondern bei einem z, für welches die Reihe (4) konvergiert, soll $\mathfrak{P}(z - z_0)$ zugleich den eindeutig bestimmten endlichen Summenwert bezeichnen. Verstehen wir unter $\mathfrak{G}_n(z - z_0)$ die von der Summe der n ersten Glieder dargestellte rationale ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(5) \quad \mathfrak{G}_n(z - z_0) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1},$$

so darf man im Falle der Konvergenz für jeden Wert n schreiben:

$$(6) \qquad \mathfrak{P}(z - z_0) = \mathfrak{G}_n(z - z_0) + \mathfrak{R}_n(z - z_0)$$

und nennt $\mathfrak{R}_n(z - z_0)$ den „*Reihenrest*". Für ein endliches $g > 0$ ist der „Konvergenzkreis" jetzt natürlich der Kreis vom Radius $R = g^{-1}$ um den Mittelpunkt z_0.

Die oben gewonnenen Ergebnisse liefern nun folgenden Satz: *Ist $g = \infty$, so ist $\mathfrak{P}(z - z_0)$ für kein von z_0 verschiedenes z konvergent. Ist g endlich, so sei* T *für $g > 0$ ein beliebiger Bereich im „Innern" des Konvergenzkreises und für $g = 0$ irgendein fest gewählter endlicher Bereich der z-Ebene. Im Bereiche* T *konvergiert $\mathfrak{P}(z - z_0)$ überall, und zwar in der Art, daß nach Auswahl einer positiven, von 0 verschiedenen, aber beliebig klein wählbaren Zahl δ ein endlicher Index m angebbar ist, so daß für alle $n \geqq m$ die Bedingung:*

$$(7) \qquad |\mathfrak{R}_n(z - z_0)| < \delta$$

erfüllt ist, gleichgültig welcher besondere Wert z aus T *vorliegt.* Da nämlich alle Punkte z von T die Bedingung $|z| < R$ erfüllen, bzw. da T (im Falle $g = 0$) ein bestimmt gewählter endlicher Bereich sein sollte, so läßt sich in jedem Falle eine Zahl ϱ obiger Bedeutung wählen usw. Wie hervorgehoben, gelten die gemachten Angaben für *alle* Punkte z in T mit den gleichen Zahlen δ und m; die Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ heißt dieserhalb *im Bereiche* T *„gleichmäßig" konvergent.*

Die Summenwerte $\mathfrak{P}(z - z_0)$ stellen eine im Bereiche T erklärte, daselbst überall eindeutige und endliche „Funktion" vor. *Diese Funktion $\mathfrak{P}(z - z_0)$ ist in* T *aber auch überall stetig,* wie aus (6) und (7) hervorgeht. Es ist nämlich $\mathfrak{G}_n(z - z_0)$ für jedes bestimmte n stetig, und der Absolutwert des Reihenrestes kann für hinreichend groß gewähltes n kleiner als δ gemacht werden.

Man denke in T von z_0 nach einer beliebigen Stelle z eine reguläre Kurve C gewählt; dann hat das längs dieser Kurve C erstreckte Integral:

$$(8) \qquad \int_{z_0}^{z} \mathfrak{P}(\zeta - z_0)\, d\zeta$$

einen bestimmten endlichen Wert[1]). Zufolge (6) gilt für jedes n:

$$\int_{z_0}^{z} \mathfrak{P}(\zeta - z_0)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z} \mathfrak{G}_n(\zeta - z_0)\, d\zeta + \int_{z_0}^{z} \mathfrak{R}_n(\zeta - z_0)\, d\zeta,$$

wo die rechts stehenden Integrale wieder längs C zu erstrecken sind. Für das erste Glied rechter Hand gilt unabhängig von der ausgewählten Kurve C:

$$\int_{z_0}^{z} \mathfrak{G}_n(\zeta - z_0)\, d\zeta = c_0(z - z_0) + \tfrac{1}{2} c_1 (z - z_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n} c_{n-1}(z - z_0)^n.$$

Für das zweite Glied gilt, da die Länge der Kurve C endlich ist, mit Rücksicht auf (7) folgendes: Hat man eine positive, von 0 verschiedene, aber beliebig kleine Zahl η gewählt, so gibt es einen endlichen Index m der Art, daß für alle $n \geqq m$:

$$\left| \int_{z_0}^{z} \mathfrak{R}_n(\zeta - z_0)\, d\zeta \right| < \eta$$

zutrifft. Da nun die unendliche Reihe:

$$(9) \qquad c_0(z - z_0) + \tfrac{1}{2} c_1 (z - z_0)^2 + \tfrac{1}{3} c_2 (z - z_0)^3 + \cdots$$

zufolge des bekannten Gesetzes $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ denselben Konvergenzkreis besitzt wie die Reihe (4), so folgt aus den vorstehenden Formeln, *daß der Summenwert der in* T *gleichmäßig konvergenten Reihe* (9) *gleich dem Integrale* (8) *ist.*

Hiernach ist der Wert des Integrales (8) von der Auswahl der Kurve C unabhängig: *Das Integral* (8) *als Summenwert der Reihe* (9) *stellt in T eine überall endliche, eindeutige und stetige Funktion von z dar.* Weiter findet man im Anschluß an (8) wie oben (S. 6): *Die gewonnene Funktion hat im Punkte z eine Ableitung, welche gleich* $\mathfrak{P}(z - z_0)$ *ist.*

Man wolle jetzt die Glieder der Reihe (4) einzeln differenzieren und die in T wiederum gleichmäßig konvergente Reihe bilden:

$$(10) \qquad \mathfrak{P}'(z - z_0) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots,$$

deren Summenwert, wie angegeben, $\mathfrak{P}'(z - z_0)$ heiße. Die Anwendung

1) Siehe für das Folgende Osgood, S. 303 ff.

der vorstehenden Überlegung auf die Reihe (10) an Stelle der Reihe (4) ergibt sofort:

$$\mathfrak{P}(z - z_0) = c_0 + \int_{z_0}^{z} \mathfrak{P}'(\zeta - z_0)\, d\zeta .$$

Somit hat $\mathfrak{P}(z - z_0)$ in jedem Punkte z von T eine Ableitung, nämlich $\mathfrak{P}'(z - z_0)$; es ist also $\mathfrak{P}(z - z_0)$ im Sinne der S. 2 gegebenen Erklärung in T eine „analytische" Funktion. Indem wir demnach die frühere Bezeichnung $f(z)$ an Stelle von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ aufnehmen, haben wir das Ergebnis: *Eine Potenzreihe* (4) *stellt in jedem Bereiche* T, *der im Innern ihres Konvergenzkreises bzw. für $g = 0$ als beliebiger endlicher Bereich gewählt wurde, eine analytische Funktion:*

(11) $$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

dar, die in T *differenziert und integriert werden kann, indem man, kurz gesagt, Differentiation bzw. Integration an der Reihe* (11) *„gliedweise" vollzieht; die dabei entspringenden Reihen haben denselben Konvergenzkreis wie die Reihe* (11), *sind also insbesondere für $g = 0$ wieder „beständig konvergent".*

Aus der letzten Angabe geht hervor, daß auch:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

und, indem man dieselbe Schlußweise wiederholt, auch:

$$f^{(n)}(z) = n!\, c_n + \frac{(n+1)!}{1!} c_{n+1}(z - z_0) + \frac{(n+2)!}{2!} c_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

in T für jedes n eine analytische Funktion darstellt, gegeben durch die rechts stehende daselbst gleichmäßig konvergente Reihe. Setzen wir hier und in (11) speziell $z = z_0$ ein, so folgt:

$$c_0 = f(z_0), \qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Es folgt: *Ist eine analytische Funktion $f(z)$ in einem Bereiche* T *durch eine daselbst konvergente Reihe* (11) *darstellbar, so ist diese Reihe notwendig die Taylorsche Reihe:*

(12) $$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z - z_0}{1!} + f''(z_0)\frac{(z - z_0)^2}{2!} + \cdots$$

dieser Funktion.

§ 4. Die Cauchysche Integralformel und die Cauchy-Taylorsche Reihe.

Die Funktion $f(z)$ sei innerhalb und auf dem Rande C eines einfach zusammenhängenden Bereiches T_1 überall eindeutig und analytisch. Man denke jetzt z im Innern von T_1 irgendwo fest gewählt, während

demgegenüber ζ ein in T_1 und auf dem Rande von T_1 variabeler Punkt sei. Dann ist der Quotient:

(1) $$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

in der Umgebung jedes von z verschiedenen Punktes des Bereiches T_1 und natürlich auch längs des Randes C analytisch[1]); indessen ist dies im Punkte $\zeta = z$ nicht mehr notwendig der Fall, und insbesondere ist der Quotient (1) hier sicher nicht mehr analytisch, wenn $f(z)$ von 0 verschieden ist, da in diesem Falle dem Quotienten im Punkte z kein endlicher Wert zukommt. Zieht man demnach um z als Mittelpunkt innerhalb T_1 eine Kreisperipherie k vom Radius r und nimmt die im Innern von k liegenden Punkte dem Bereiche T_1 fort, so restiert ein Bereich T_2, und es wird der Quotient (1) in T_2, unter Einschluß der Randkurven C und k überall eindeutig und analytisch sein. Der Cauchysche Integralsatz (4) S. 6 ergibt demnach:

$$\int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int\limits_{(k)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Längs des Kreises k ist $|\zeta - z|$ konstant gleich r, und wir können schreiben:

$$\zeta - z = re^{\vartheta i}, \qquad d\zeta = i \cdot re^{\vartheta i} d\vartheta,$$

wobei die Integrationsvariabele ϑ von 2π bis 0 abzunehmen hat. Kehren wir die Integrationsrichtung längs k um, so folgt:

$$\int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = i \int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{\vartheta i})\, d\vartheta,$$

$$\int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = i \int\limits_0^{2\pi} (f(z + re^{\vartheta i}) - f(z))\, d\vartheta + 2i\pi f(z).$$

Der Wert des rechts stehenden Integrales ist, wie aus der letzten Gleichung folgt, unabhängig von r. Da andrerseits r zwar > 0 ist, aber „beliebig" klein gewählt werden kann, und da $f(\zeta)$ im Punkte z stetig ist, so liegt der Wert jenes Integrales zufolge seiner Bauart, absolut genommen, unterhalb einer positiven von 0 verschiedenen, *beliebig* klein gewählten Zahl δ. Das fragliche Integral kann also keinen von 0 verschiedenen Wert haben. *Für die im Innern und auf dem Rande C des Bereiches T_1 überall eindeutige und analytische Funktion*

1) Es ist leicht zu sehen, daß, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung einer Stelle z_0 analytisch sind und $\varphi(z_0)$ von 0 verschieden ist, auch der Quotient $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ in der Umgebung von z_0 analytisch ist; vgl. Osgood, S. 225.

$f(z)$ gilt in jedem inneren Punkte z von T_1 die „Cauchysche Integralformel“ [1]*):*

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wo das Integral im positiven Sinne über den Rand C auszudehnen ist.

Wie aus (2) hervorgeht, ist der Innenwert $f(z)$ unserer Funktion durch die längs C stattfindenden Randwerte $f(\zeta)$ bereits eindeutig bestimmt. Wir können sagen: *Ist längs des Randes C eines T_1 eine stetige Folge komplexer Werte $f(\zeta)$ gegeben, so gibt es höchstens eine in T_1, unter Einschluß des Randes, eindeutige analytische Funktion $f(z)$, welche die gegebenen Randwerte hat.*

Es sei jetzt z_0 ein fest gewählter Wert und $f(z)$ eine in der Umgebung von z_0 eindeutige analytische Funktion. Nach S. 1 besteht diese Umgebung aus den inneren Punkten einer Kreisfläche mit einem Radius $h > 0$ um den Mittelpunkt z_0. Wir nehmen weiter an, daß auch noch für alle Punkte der Peripherie K des fraglichen Kreises $f(z)$ eindeutig und analytisch ist. Es sei z ein beliebig, aber fest gewählter innerer Punkt dieses Kreises, während ζ ein längs der Peripherie variabeler Punkt sei; dann gilt:

$$(3) \qquad 0 \leq \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q < 1,$$

wo q eine Konstante ist. Es folgt:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{\nu = 0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{\nu},$$

da die rechts stehende Reihe zufolge (3) konvergent ist.

Die Beträge $|f(\zeta)|$ der längs K zutreffenden Funktionswerte $f(\zeta)$ haben notwendig eine endliche und bestimmte obere Grenze M, so daß für alle Punkte von K:

$$|f(\zeta)| \leq M$$

gilt [2]). Multiplizieren wir demnach die letzte Gleichung mit $f(\zeta)$, so wird die in:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{\nu = 0}^{\infty} (z - z_0)^{\nu} \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu + 1}}$$

---

1) Osgood, S. 295.

2) Wäre eine solche Grenze nicht vorhanden, so würde man mittelst der in der Note S. 10 erwähnten „Methode fortgesetzter Halbierung“ oder „Einschachtelung kleinerer Intervalle“ (Osgood, S. 16 und 31) zur Existenz mindestens einer Stelle ζ_0 von der Art geführt werden, daß in jeder noch so klein gewählten Umgebung von ζ_0 Beträge $|f(\zeta)|$ vorkommen würden, die eine *beliebig* groß gewählte Zahl übersteigen. Dann aber könnte, da $f(\zeta_0)$ der Annahme gemäß ein bestimmter endlicher Wert ist, $f(\zeta)$ im Punkte ζ_0 nicht stetig und also nicht analytisch sein.

rechts stehende Reihe längs K gleichmäßig konvergent sein; d. h. wenn wir:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (z - z_0)^\nu \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} + \Re_n(\zeta)$$

schreiben, so wird sich nach Auswahl einer beliebig kleinen, positiven, von 0 verschiedenen Zahl δ stets ein endlicher Index m angeben lassen, so daß für alle Punkte ζ von K und für alle Indizes $n \geqq m$:

$$|\Re_n(\zeta)| < \delta$$

gilt Durch Integration der letzten Gleichung längs K folgt:

$$\int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left((z - z_0)^\nu \int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}\right) + \int\limits_{(K)} \Re_n(\zeta) d\zeta$$

mit der für alle $n \geqq m$ zutreffenden Ungleichung:

$$\left| \int\limits_{(K)} \Re_n(\zeta) d\zeta \right| < 2\pi h \cdot \delta.$$

Mit Rücksicht auf (2) und unter Benutzung der für alle Indizes n gültigen Abkürzung:

(4) $$\frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = c_n$$

ergibt sich: *Der Funktionswert $f(z)$ ist der Summenwert der in:*

(5) $$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

rechts stehenden konvergenten Reihe.

Da z im Innern des Kreises K mit dem Radius $h > 0$ irgendwo wählbar war, so ist die Reihe (5) entweder beständig konvergent oder sie hat einen von 0 verschiedenen endlichen Konvergenzradius R. Im letzteren Falle ist notwendig:

$$h \leqq R.$$

Da die Gleichung (5) mit den von z unabhängigen Koeffizienten c für jeden Punkt z der Umgebung von z_0 gilt, so können wir daselbst die Sätze des § 3 auf die Reihe und damit auf die Funktion $f(z)$ in Anwendung bringen. Die Schlußbetrachtung von § 3 zeigt: *Die Reihe* (5) *ist identisch mit der Taylorschen Reihe der Funktion $f(z)$; sie wird mit Rücksicht auf die neue Darstellung* (4) *ihrer Koeffizienten auch die „Cauchy-Taylorsche Reihe“ der Funktion genannt.*

Durch Vergleich der beiderseitigen Darstellung von c_n folgt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integralsatzes (4) S. 6 und bei Fortlassung des unteren Index an z_0 folgern wir leicht die sich an (2) anschließende Gleichung:

$$(6) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int\limits_{(C)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

welche unter den Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel (2) für jedes n richtig ist.

Als Hauptergebnis ist anzumerken: *Eine in der Umgebung von z_0 überall eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist ebenda in einer und nur einer Weise durch eine nach Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ darstellbar, deren Konvergenzkreis jene ganze Umgebung in sich enthält.* Man kann demnach an Stelle der S. 2 gewählten Erklärung einer „analytischen" Funktion auch die folgende treten lassen: *Eine in der Umgebung von z_0 eindeutige Funktion heißt „analytisch", wenn sie sich daselbst durch eine konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ darstellen läßt.*[1])

Als weitere Folgerung aus § 3 (S. 14) merken wir an: *Eine in der Umgebung von z_0 eindeutige analytische Funktion $f(z)$ hat für jede endliche Ordnung n eine eindeutige Ableitung $f^{(n)}(z)$, die ebenda wieder eine analytische Funktion ist.*

In der öfter genannten Umgebung legen wir durch z_0 ein reguläres Kurvenstück C_0 von nicht verschwindender aber beliebig kleiner Länge. Kennt man die Funktionswerte $f(z)$ längs C_0, so sind damit auch die Werte von $f'(z)$ längs C_0 eindeutig bestimmt, und also gilt dasselbe von den Werten jeder Ableitung $f^{(n)}(z)$. Insbesondere sind also mit den Werten von $f(z)$ längs C_0 bereits die sämtlichen Koeffizienten der Taylorschen Reihe (12) S. 14 eindeutig bestimmt. Diese Reihe aber liefert die Funktionswerte $f(z)$ in der ganzen Umgebung: *Eine in der Umgebung von z_0 überall eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist daselbst bereits eindeutig bestimmt, wenn ihre Werte nur erst längs eines durch z_0 hindurchziehenden regulären Kurvenstücks C_0 mit nicht verschwindender, aber beliebig kleiner Länge gegeben sind.*

Endlich nennen wir als Folgerung der gewonnenen Ergebnisse noch den Satz: *Ist in der Umgebung von z_0 durch eine Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ mit einem endlichen und von 0 verschiedenen Konvergenzradius R eine Funktion $f(z)$ gegeben, so kann es in einer Umgebung von z_0 mit $h > R$ keine daselbst überall eindeutige und analytische Funktion $f_1(z)$ geben, die im*

1) Man beachte, daß auch hier der Charakter einer Funktion, in der Umgebung von z_0 analytisch zu sein, nur erst für Funktionen $f(z)$ erklärt ist, die daselbst eindeutig sind. Eine spätere Ergänzung wird sich auf Punkte z_0 beziehen, in deren Umgebung $f(z)$ nicht mehr eindeutig ist.

Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ *mit* $f(z)$ *identisch wäre.* Wenn wir nämlich für irgendein z, dessen Betrag $|z|$ dem Intervall $R < |z| < h$ angehört, die Cauchy-Taylorsche Reihe ansetzen, so erweist sich diese als mit $\mathfrak{P}(z - z_0)$ identisch, und also wäre entgegen der Annahme sicher $h \leqq R$.

§ 5. Die analytische Fortsetzung und die durch dieselbe veranlaßten Ergänzungen der anschaulichen Hilfsmittel.

Der vorletzte Satz von § 4 kann in folgender Weise verallgemeinert werden: *Eine in einem Bereiche* T *überall eindeutige und analytische Funktion* $f(z)$ *ist im ganzen Bereiche bereits fest bestimmt, wenn ihre Werte nur erst längs eines im Bereiche gelegenen regulären Kurvenstücks* C_0 *mit nicht verschwindender, aber beliebig kleiner Länge gegeben sind.*

Ist nämlich z ein beliebiger innerer Punkt von T, so können wir von einem auf C_0 gewählten Ausgangspunkte z_0 eine reguläre Kurve C nach z ziehen, die nur aus inneren Punkten von T besteht. Für die Entfernungen zwischen den Punkten von C und den Randpunkten von T wird es demnach eine bestimmte untere Grenze h geben, die > 0 ist. Nach dem Konvergenzsatze der Cauchy-Taylorschen Reihe muß also für irgendeinen Punkt z' von C eine Darstellung von $f(z)$ in Gestalt einer Reihe $\mathfrak{P}(z - z')$ gelten, deren Konvergenzradius $R \geqq h$ ist.

Man teile nun die Kurve C von z_0 beginnend in lauter Bogenstücke, deren Längen $< h$, etwa alle gleich $\frac{1}{2} h$, sind oder doch nicht $< \frac{1}{2} h$ sein sollen. Die Teilpunkte, z_0 mitgerechnet, seien $z_0, z_1, z_2, \ldots$ Da die Länge von C endlich ist, so werden wir nach einer *endlichen* Anzahl, etwa nach m Schritten die Kurve C in der Art erschöpft haben, daß der Restbogen von z_m bis zum Endpunkte z selbst $< h$ ausfällt. Aus den für C_0 vorgezeichneten Funktionswerten stellen wir die für die Umgebung von z_0 gültige Darstellung $f(z) = \mathfrak{P}_0(z - z_0)$ her. Da z_1 im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ gelegen ist, so sind die Funktionswerte längs eines kleinen durch z_1 ziehenden Kurvenstückchens C_1 durch $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ eindeutig bestimmt. Damit aber gewinnen wir nach dem vorletzten Satze von § 4 die Funktion $f(z)$ in der Umgebung von z_1, eindeutig dargestellt durch eine Reihe $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$. Im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ aber liegt z_2, und wir gewinnen durch Wiederholung der gleichen Überlegung $\mathfrak{P}_2(z - z_2)$ usw. Die m-malige Ausübung dieses Verfahrens führt uns zu den kettenförmig zusammenhängenden $(m + 1)$ Potenzreihen:

(1) $\quad \mathfrak{P}_0(z - z_0), \quad \mathfrak{P}_1(z - z_1), \quad \mathfrak{P}_2(z - z_2), \ldots, \quad \mathfrak{P}_m(z - z_m),$

deren letzte den Funktionswert $f(z)$ im gewählten Punkte z in der Tat eindeutig festlegt.

Das beschriebene Verfahren gewinnt dadurch eine weitergehende und grundsätzliche Bedeutung, daß wir mit Hilfe desselben die Frage behandeln können, ob es möglich ist, die Funktion $f(z)$ unter Wahrung ihres analytischen Charakters über den hier zunächst vorliegenden Bereich T fortzusetzen. Knüpfen wir sogleich an eine beliebige in der Umgebung von z_0 durch $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ gegebene Funktion $f(z)$ an, so mögen wir von z_0 aus nach irgendeinem Punkte z unserer z-Ebene eine Kurve C zeichnen. Wir wählen alsdann auf dem im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ verlaufenden Teile von C einen neuen Punkt z_1 und bilden wie oben die Reihe $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$. Für diejenigen Innenpunkte des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$, die zugleich innere Punkte des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ sind, liefert $\mathfrak{P}_1(z-z_0)$ wieder die Funktionswerte $f(z)$. Ragt indessen der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$ über den von $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ hinaus, so ist in diesem neu hinzukommenden Teile des ersteren Kreises bereits eine *„analytische Fortsetzung“* der zunächst nur im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ gegebenen Funktion $f(z)$ gewonnen. Können wir nun auf C nach dem gleichen Prinzip weitere Punkte $z_2, z_3, \ldots$ markieren und an $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$ weitere Reihen $\mathfrak{P}_2(z-z_2)$, $\mathfrak{P}_3(z-z_3), \ldots$ kettenförmig wie oben aneinander binden, und gelingt es, nach *endlich vielen* Schritten zu einer Reihe $\mathfrak{P}_m(z-z_m)$ zu gelangen, in deren Konvergenzkreise der Kurvenendpunkt z liegt, so sagen wir, *die zunächst nur in der Umgebung von z_0 gegebene Funktion $f(z)$ sei längs der Kurve C bis zum Punkte z fortsetzbar.*[1]) Dieser Prozeß der *„analytischen Fortsetzung“* längs einer Kurve ist dabei, wenn überhaupt, nur in einer Weise möglich, wie aus der am Anfang des vorliegenden Paragraphen dargelegten Betrachtung einleuchtend ist. Die einzelne Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$, an welche wir den Prozeß anknüpfen, nennen wir ein *„Element“* der Funktion $f(z)$; natürlich würde $f(z)$ ebensowohl vom „Elemente“ $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$ oder $\mathfrak{P}_2(z-z_2)$ usw. aus herstellbar sein [2])

Um das Prinzip der analytischen Fortsetzung im vollen Umfange verwerten zu können, sind die bisherigen geometrischen Vorstellungen nach zwei Richtungen zu ergänzen.

Bezeichnen wir mit $\mathsf{K}_0, \mathsf{K}_1, \ldots, \mathsf{K}_m$ die Flächen der Konvergenzkreise der Reihen (1), so wird $f(z)$ durch die Reihen (1) unmittelbar gegeben

---

1) Die Betrachtungen des Textes gelten zwar uneingeschränkt auch in dem besonders einfachen Falle, daß $\mathfrak{P}_0(z-z_0)$ und dann auch $\mathfrak{P}_1(z-z_1)$, $\mathfrak{P}_2(z-z_2), \ldots$, beständig konvergent sind. Da wir indessen in diesem Falle auch ohne das Prinzip der analytischen Fortsetzung alles Wesentliche über die Funktion $f(z)$ werden aussagen können, so dürfen wir zur Erläuterung der folgenden Sätze an Potenzreihen mit endlichen Konvergenzradien R anknüpfen.

2) Über das Auftreten des Prinzipes der analytischen Fortsetzung bei Weierstraß, Riemann und anderen Autoren s. „Osgood“ S. 431 und 435.

sein in einem Bereiche **T**, den wir erhalten, indem wir jede Kreisfläche mit der folgenden längs des gemeinsamen Flächenteiles zusammenkleben. Der so gewonnene Bereich kann nun sehr wohl noch über sich selbst hinübergreifen. Wenn wir z. B. eines der Integrale von § 2 (S. 4ff.), die im damaligen Bereiche **T** analytisch sind, von z_0 aus längs eines Periodenweges fortsetzen bis zum Punkt z_0 zurück[1]), so gelangen wir am Schlusse nicht wieder zu den Anfangswerten der analytischen Funktion. Wir werden nun (um zu unserem aus den $(m+1)$ Kreisscheiben zusammengeklebten Bereiche **T** zurückzukehren), sobald dieser Bereich sonst noch längs eines Flächenstücks (oder mehrerer) über sich selbst hinübergreift, die weitere Verklebung längs dieses Stückes stets, aber auch *nur* dann vornehmen, wenn in den aufeinander liegenden Teilen von **T** gleiche Funktionswerte stattfinden. Die grundsätzliche Erweiterung besteht also darin, *daß wir gemäß der Natur einer „mehrdeutigen" Funktion $f(z)$ fortan mit Bereichen* **T** *arbeiten wollen, welche sich über sich selbst hinüberziehen dürfen, und solchergestalt irgendwelche Teile der z-Ebene mehrfach bedecken.* Es ist dann, wie wir sagen wollen, $f(z)$ obschon an sich mehrdeutig, doch eine *„eindeutige Funktion der Stelle z im Bereiche* **T**". Überzieht **T** etwa die Umgebung von z_0 mehrfach, so wollen wir die hier übereinanderliegenden Teile von **T** als verschiedene *„Blätter"* und (im Anschluß an § 2) die in diesen Blättern stattfindenden Funktionswerte als verschiedene *„Zweige"* der Funktion $f(z)$ unterscheiden.

Die zweite Ergänzung besteht in der Zulassung der Möglichkeit, daß das Argument z der Funktion unendlich groß wird. In der z-Ebene sei ein Kreis um den Nullpunkt mit dem endlichen und von 0 verschiedenen Radius g gezogen. Eine vorgelegte Funktion $f(z)$ sei außerhalb dieses Kreises für alle *endlichen* z eindeutig und analytisch. Schreiben wir:

$$z' = \frac{1}{z}, \tag{2}$$

so erscheinen die gesamten endlichen Punkte z mit $|z| > g$ umkehrbar eindeutig oder kurz „ein-eindeutig" den gesamten Punkten der z'-Ebene mit $|z'| < R = g^{-1}$, abgesehen vom Nullpunkte $z' = 0$, zugeordnet. Nun folgt aus der Erklärung des analytischen Charakters leicht, daß die Funktion:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \bar{f}(z')$$

des Argumentes z', soweit dieselbe überhaupt erklärt ist, auch wiederum analytisch ist. Erklärt aber ist $\bar{f}(z')$ für alle inneren Punkte des Kreises

1) Die zugehörige Periode ω gilt als von 0 verschieden.

vom Radius $R = g^{-1}$ um den Nullpunkt $z' = 0$, abgesehen von diesem Nullpunkte selber.

Wir nehmen nun an, daß $\bar{f}(z')$ bei Annäherung an den Nullpunkt $z' = 0$ einem endlichen Grenzwerte c_0 zustrebe, und daß, sofern wir als Funktionswert $\bar{f}(0)$ diesen Wert c_0 annehmen, $\bar{f}(z')$ dadurch auch im Nullpunkte zu einer eindeutigen analytischen Funktion werde. Dann wird eine Entwicklung gelten:

$$\bar{f}(z') = c_0 + c_1 z' + c_2 z'^2 + c_3 z'^3 + \cdots, \tag{3}$$

welche entweder beständig konvergent ist oder einen endlichen Konvergenzradius R besitzt, mit dem wir die eben durch R bezeichnete Zahl g^{-1} als identisch ansehen können.

Indem wir durch die Transformation (2) zur z-Ebene zurückgehen, müssen wir, wenn durch die Hereinnahme des Nullpunktes $z' = 0$ die Eindeutigkeit zwischen z und z' erhalten bleiben soll, *der z-Ebene als neues dem Punkte $z' = 0$ entsprechendes Element einen einzigen unendlich fernen Punkt $z = \infty$ zuerteilen.* Sie wird hierdurch im Gegensatze zu ihrer ursprünglichen Erklärung (S. 1) zu einem *abgeschlossenen* Gebilde und soll in dieser Gestalt den weiteren Betrachtungen beständig zugrunde liegen. Trifft nun die durch (3) zum Ausdruck kommende Vorraussetzung betreffs der Funktion $\bar{f}(z')$ zu, so sagen wir, *$f(z)$ sei nach dem Punkte $z = \infty$ fortsetzbar und in diesem Punkte analytisch.* Für die „Umgebung" des Punktes $z = \infty$ gilt dann die Darstellung:

$$f(z) = c_0 + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + c_3 \frac{1}{z^3} + \cdots, \tag{4}$$

welche außerhalb des Kreises vom Radius $g = R^{-1}$ um den Nullpunkt der z-Ebene als Mittelpunkt konvergent ist.[1])

Um den unendlich fernen Punkt der z-Ebene der Anschauung zugänglich zu machen, bedient man sich der „*stereographischen Projektion*" der z-Ebene auf die Oberfläche einer Kugel. Man denke die z-Ebene horizontal und lege im Raume um den Nullpunkt jener Ebene eine Kugel des Radius 1, wie Fig. 5 andeutet. Rechtwinklige Raumkoordinaten ξ, η, ζ werden so eingeführt, daß die positive ζ-Achse senkrecht nach oben weist und also die $\xi\eta$-Ebene mit der Ebene der Va-

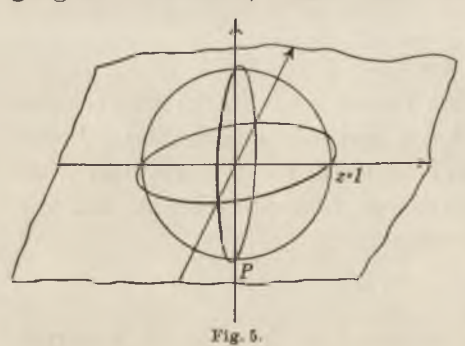


Fig. 5.

1) Die Größe g hat hier für die Koeffizienten der Reihe (4) unmittelbar die Bedeutung von S. 10, wobei auch der Fall $g = 0$ einbegriffen sein darf.

riabelen $z = x + iy$ zusammenfällt. In dieser Ebene soll dann einfach $\xi = x$, $\eta = y$ gelten, womit die Raumkoordinaten endgültig bestimmt sind. Als Projektionszentrum wählen wir den tiefsten Punkt P der Kugel (vgl. Fig. 5) und erzielen dadurch in der Tat ein umkehrbar eindeutiges Entsprechen der „ganzen" z-Ebene und der Kugeloberfläche, *wobei der Punkt ∞ der Ebene dem tiefsten Punkte P der Kugelfläche zugeordnet ist.*

Es ist leicht, die hergestellte Beziehung durch Formeln auszudrücken. Wie eine elementare Betrachtung zeigt, liefert der Punkt (x, y) der z-Ebene den durch:

$$(5) \qquad \xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad \zeta = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

gegebenen Punkt der Kugelfläche, und umgekehrt ergibt der Punkt (ξ, η, ζ) dieser Fläche, für dessen Koordinaten also:

$$(6) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

gilt, als zugeordneten Punkt der z-Ebene denjenigen der Koordinaten:

$$(7) \qquad x = \frac{\xi}{1 + \zeta} \qquad y = \frac{\eta}{1 + \zeta},$$

so daß der Punkt (ξ, η, ζ) der Kugeloberfläche als Träger des komplexen Wertes:

$$(8) \qquad z = \frac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}$$

erscheint. Man wolle sich insbesondere mit Hilfe von Fig. 5 klarmachen, in welcher Weise die reelle z-Achse, die imaginäre z-Achse und der „Einheitskreis" der z-Ebene[1]) auf der Kugeloberfläche drei zueinander orthogonale größte Kugelkreise liefern. So oft es erwünscht ist, die nur scheinbare Ausnahmestellung des unendlich fernen Punktes der z-Ebene auch anschaulich hinwegzuräumen, werden wir die Kugeloberfläche als Trägerin der Werte der komplexen Variabelen z heranziehen und bezeichnen dieselbe dann kurz als die *„z-Kugel"*.

Als eine Haupteigenschaft der besprochenen Beziehung notieren wir noch, *daß die stereographische Projektion eine „konforme" oder „winkeltreue Abbildung"* (im Sinne von § 7) *der z-Ebene auf die z-Kugel darstellt.*[2]) Endlich nennen wir noch den Satz: *Das System aller Kreise der z-Ebene, die Geraden als Kreise des Radius ∞ einbegriffen, gehen bei der Projektion gerade genau in das System aller Kreise der z-Kugel über.* Das Abbild des durch die Gleichung:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

1) D. h. der Kreis des Radius 1 um den Nullpunkt als Mittelpunkt.

2) Siehe das Nähere bei Osgood, S. 235.

gegebenen Kreises wird nämlich infolge der Gleichungen (5) ff. auf der z-Kugel ausgeschnitten durch die „Ebene“:

$$B\xi + C\eta + (D - A)\zeta + (D + A) = 0.$$

§ 6. Das Feld F einer analytischen Funktion und die singulären Punkte derselben.

In der Umgebung einer Stelle z_0 sei mittels eines „Funktionselementes“ $\mathfrak{P}(z - z_0)$ eine analytische Funktion $f(z)$ gegeben, welche von hieraus fortgesetzt werden soll. Dabei wird folgende Erklärung grundlegend: *Die gesamten Stellen z, welche bei dem eingeleiteten Prozeß der analytischen Fortsetzung in das Innere irgendeines dabei zur Verwendung kommenden Konvergenzkreises hineingezogen werden können, bilden einen zusammenhängenden Bereich, den wir als „Definitionsbereich“ oder „Existenzbereich“ der analytischen Funktion $f(z)$ oder auch kurz als das „Feld“*[1]*) derselben benennen und im Anschluß an die letzte Benennung kurz mit* F *bezeichnen wollen.* Dieser Erklärung zufolge ist $f(z)$ über das Feld F hinaus nicht fortsetzbar und existiert in diesem Sinne nur im Felde F.[2]) Dabei ist $f(z)$ eine eindeutige Funktion der Stelle z im Felde F, und es sind die gesamten Werte der Funktion $f(z)$ im Felde F bereits allein durch das Element $\mathfrak{P}(z - z_0)$ als „definiert“ anzusehen.

Man kann sich das Feld F durch Zusammenklebung der bei der analytischen Fortsetzung zur Verwendung kommenden Konvergenzkreise hergestellt denken. Dabei ist natürlich der etwaigen Mehrdeutigkeit der Funktion $f(z)$, wie in § 5 näher erörtert ist, Rechnung zu tragen: Sind in der Umgebung irgendeiner Stelle z durch Fortsetzung ν verschiedene „Zweige“ der Funktion erreichbar, so wird das Feld F diese Stelle mit ν „Blättern“ überdecken.

Eine erste Folgerung über das Feld F einer Funktion $f(z)$ ziehen wir aus dem Schlußsatze von § 4 (S. 18). Ist z_0 irgendeine Stelle in F und gilt für die Darstellung von $f(z)$ daselbst die Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ mit dem endlichen Konvergenzradius R, so ist es nach dem genannten Satze unmöglich, $f(z)$ über die Peripherie des fraglichen Konvergenzkreises in der Art fortzusetzen, daß auch noch ein Kreis mit einem Radius $h > R$ um den Mittelpunkt z_0 vollständig im Felde F läge. Es ergibt sich: *Auf der Peripherie des Konvergenzkreises jeder zur Dar-*

1) Diese wenn auch sonst mehrfach gebrauchte Benennung empfiehlt sich, weil sie kurz und bezeichnend ist.

2) Jeder Punkt des Feldes F ist der Erklärung gemäß ein „innerer“ Punkt desselben. Etwa auftretende Randpunkte (die wir unten betrachten) gelten also als nicht zu F gehörig. Doch nehmen wir späterhin gewisse, isoliert liegende Randpunkte, für welche ein Grenzwert $\lim f(z)$ existiert, zum Felde F hinzu.

stellung von $f(z)$ dienenden Potenzreihe findet sich mindestens eine Stelle, die dem Felde **F** *nicht angehört.*

Als zweiten Satz merken wir an: *Ist $f(z)$ längs einer sich selbst nicht überkreuzenden Kurve C, welche von z_0 ausläuft und dort mündet, fortsetzbar, und gelangt man am Schlusse nicht wieder zu den Anfangswerten der Funktion zurück, so wird bei Herstellung des Feldes* **F** *in den von C umschlossenen Bereich hinein mindestens ein Punkt innerhalb C existieren, der* **F** *nicht angehört.*

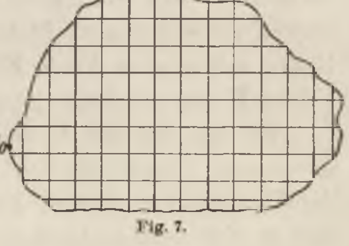
Der Beweis kann mit Hilfe der S. 10 und 16 (unter dem Texte) genannten „Methode der Einschachtelung“ geführt werden. Wir gehen hierbei von folgender Erwägung aus. In Fig. 6 sind C_1 und C_2 zwei geschlossene Kurven, welche ein zwischen z_1 und z_2 verlaufendes Stück gemein haben. Die Funktion $f(z)$ sei von z_0 aus über C_1 fortsetzbar und führe am Schlusse zu den Anfangswerten zurück. Ebenso sei $f(z)$, und zwar das eben bei z_1 erreichte „Element“, über C_2 fortsetzbar, und auch hier soll die Fortsetzung am Schlusse zu den bei z_1 schon gewonnenen Funktionswerten zurückführen. Stellen wir nun aus C_1 und C_2 unter Fortnahme des gemeinsamen Stückes eine neue Kurve C_3 her, so ist einleuchtend, daß $f(z)$ von z_0 aus auch über diese Kurve C_3 fortsetzbar ist, und daß die Fortsetzung zu den anfänglichen Funktionswerten zurückführt.

Fig. 6.

Wir überspannen nun den von der Kurve C umschlossenen Bereich mit einem Quadratnetz (vgl. Fig. 7), indem wir etwa alle in diesen Bereich fallenden Geraden der Gleichungen:

$$x = \frac{a}{10^\lambda}, \qquad y = \frac{b}{10^\lambda}$$

ziehen, unter a und b ganze Zahlen und unter λ eine hinreichend groß gewählte positive ganze Zahl verstanden. Hierdurch wird jener Bereich in endlich viele Teilbereiche zerlegt. Wir beginnen jetzt mit dem am Punkte z_0 anliegenden Teilbereiche oder, wenn es deren mehrere gibt, mit einem unter ihnen, fügen einen Nachbarbereich hinzu und behandeln die beiden Randkurven wie die Kurven C_1 und C_2 von Fig. 6. Dem vergrößerten Bereiche fügen wir einen weiteren an usw. Dann ist folgendes einleuchtend: Entweder kommen wir im Verlaufe des Prozesses zu einem Teilbereiche, über dessen Rand wir $f(z)$ nicht fortsetzen können — und dann ist der behauptete Punkt, der **F** nicht angehört, innerhalb C nachgewiesen —, oder wir müssen zu mindestens einem Teilbereiche kommen, bei welchem die Funktion, über den Rand


Fig. 7.

fortgesetzt, sich nicht reproduziert. Wenn nämlich kein solcher Bereich vorläge, so müßte $f(z)$, auch über C fortgesetzt, der Annahme zuwider zu den Anfangswerten zurückkehren.

Liegt der zweite Fall vor, so unterziehe man den als existierend erkannten Teilbereich einer erneuten Einteilung mittels der in ihm gelegenen Geraden:

$$x = \frac{a_1}{10^{\lambda+1}}, \qquad y = \frac{b_1}{10^{\lambda+1}},$$

unter a_1 und b_1 wieder ganze Zahlen verstanden. Auf diese neue Einteilung wende man die gleiche Überlegung an und setze nötigenfalls den Prozeß in derselben Art fort. Entweder kommen wir nach endlich vielen Schritten zu einer Geraden

$$x = \frac{a_\nu}{10^{\lambda+\nu}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{b_\nu}{10^{\lambda+\nu}},$$

auf der mindestens ein nicht zu **F** gehörender Punkt liegt, oder der Prozeß hat kein Ende. Dann gibt es eine und, da die Umfänge der ineinander geschachtelten Bereiche die Grenze 0 haben, auch nur eine Stelle z_1, die in allen der Reihe nach herausgegriffenen Bereichen gelegen ist. Diese Stelle z_1 hat die Eigenschaft, daß wir um sie eine Kurve von *beliebiger* Kleinheit (nämlich einen Bereichrand) angeben können, die zur Fortsetzung der Funktion $f(z)$ benutzt, *nicht* zu den Anfangswerten der Funktion zurückführt. Der Punkt z_1 kann demnach nicht innerer Punkt eines bei der Fortsetzung von $f(z)$ auftretenden Konvergenzkreises sein.

Wir haben jetzt die Randpunkte, welche **F** haben kann, näher zu betrachten. Gilt von einem Punkte z, daß in *jeder* Umgebung desselben Stellen eines gewissen Blattes von **F** existieren, ohne daß z in diesem Blatte selber dem Felde **F** angehört, so heißt z ein *„Randpunkt"* des Feldes **F** und wird ein *„singulärer Punkt"* der Funktion $f(z)$ genannt.

Es soll erstlich z_0 ein isoliert liegender Randpunkt von **F** sein, in dessen Umgebung $f(z)$ übrigens allenthalben eindeutig ist. Bei Annäherung an z_0 soll $\lim f(z) = \infty$ gelten, und zwar in der Art, daß es eine bestimmte endliche ganze Zahl $m > 0$ gibt, für welche:

$$\lim_{z=z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)^m) = c_{-m}$$

einen von 0 verschiedenen endlichen Wert darstellt. Die Funktion $f(z) \cdot (z - z_0)^m$, welche in der Umgebung von z_0, zunächst von z_0 selbst abgesehen, eindeutig und analytisch ist, möge nun dadurch, daß wir ihr im Punkte z_0 den Wert c_{-m} erteilen, auch im Punkte z_0 analytisch bleiben und also in der Umgebung von z_0, diesen Punkt nunmehr eingeschlossen, eine Darstellung gestatten:

$$f(z) \cdot (z - z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Für $f(z)$ selber folgt hieraus die Darstellung:

$$(1)\qquad f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z_0-z)^2+\cdots.$$

Einen Randpunkt dieser Art wollen wir hinfort dem Felde **F** *hinzufügen, so daß* **F** *hierselbst geschlossen erscheint und den Funktionswert* ∞ *trägt; der singuläre Punkt* z_0 *heißt ein „Pol* m^{ter} *Ordnung" der Funktion* $f(z)$.

Da die in z_0 analytische Funktion $f(z)\cdot(z-z_0)^m$ daselbst nicht verschwindet, so ist der reziproke Wert von $f(z)\cdot(z-z_0)^m$ in der Umgebung von z_0 eine eindeutige analytische Funktion, die für z_0 selbst den von 0 verschiedenen Wert $c'_m=c_{-m}^{-1}$ hat und also eine Entwicklung:

$$c'_m+c'_{m+1}(z-z_0)+c'_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots$$

gestattet. Hieraus ergibt sich weiter:

$$(2)\qquad \frac{1}{f(z)}=c'_m(z-z_0)^m+c'_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+c'_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots.$$

Man sagt nun, *eine in der Umgebung von* z_0 *durch die Reihe* $\mathfrak{P}(z-z_0)$ *gegebene Funktion habe an der Stelle* z_0 *einen „Nullpunkt* m^{ter} *Ordnung", wenn in* $\mathfrak{P}(z-z_0)$ *die* m *ersten Glieder durch Verschwinden der Koeffizienten* $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ *ausfallen, aber* c_m *nicht gleich* 0 *ist.* Nach (2) liefern somit die reziproken Werte von $f(z)$ eine Funktion, die an der Stelle z_0 einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung hat. Umgekehrt folgt aus einem Nullpunkt m^{ter} Ordnung einer Funktion an der gleichen Stelle ein Pol dieser Ordnung für die reziproken Werte der Funktion.

Die vorstehende Betrachtung bedarf einer nur formalen Ergänzung für den Fall, daß z_0 nicht endlich ist, d. h. den Punkt ∞ der z-Ebene bedeutet. Mittels der Transformation (2) S. 21 hat man alsdann diesen Punkt und seine Umgebung in den Nullpunkt der z'-Ebene und dessen Umgebung überzuführen. Für z' und $z'_0=0$ an Stelle von z und z_0 gelten dann die vorstehenden Rechnungen unmittelbar. Will man die Variabele z beibehalten, so läuft dies darauf hinaus, *daß in den Formeln* (1) *und* (2) *an Stelle der Potenzen von* $(z-z_0)$ *die gleichen Potenzen von* $\frac{1}{z}$ *auftreten.* So wird z. B. die Funktion $f(z)$ im Punkte ∞ einen Pol m^{ter} Ordnung haben, wenn daselbst eine Entwicklung:

$$(3)\qquad f(z)=c_{-m}z^m+c_{-m+1}z^{m-1}+\cdots+c_{-1}z+c_0+c_1\frac{1}{z}+c_2\frac{1}{z^2}+\cdots$$

mit nicht verschwindendem c_{-m} gilt.

Es soll jetzt zweitens z_0 ein isoliert liegender Randpunkt des Feldes **F** von der Art sein, daß die Fortsetzung von $f(z)$ längs einer einmal den Punkt z_0 umlaufenden Kurve nicht zu den Anfangswerten

der Funktion zurückführt. Dagegen soll die Fortsetzung längs einer Kurve, welche ν Male um z_0 herumläuft, die ursprüglichen Funktionswerte reproduzieren; dabei sei ν eine endliche ganze Zahl, die größer als 1 ist, und es soll sich $f(z)$ nicht bereits nach einer geringeren Anzahl von Umläufen reproduzieren.

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist $\sqrt[\nu]{z - z_0}$; wir schreiben dieselbe, unter Einführung der Polardarstellung $z - z_0 = re^{\vartheta i}$ für die komplexen Werte z, in der Gestalt:

$$z' = \sqrt[\nu]{z - z_0} = \sqrt[\nu]{r} \cdot e^{\frac{1}{\nu}\vartheta i}. \tag{4}$$

Das Feld dieser Funktion hat in der Nähe von z_0 die bekannte Gestalt einer „*ν-blättrigen Windungsfläche*“, wie dieselbe für $\nu = 2$ durch die Skizze der Fig. 8 dargestellt ist. Die Blätter der Windungsfläche gehen ineinander über, wie bei einer Schraubenfläche mit verschwindender Ganghöhe; doch dringt das oberste Blatt längs eines in z_0 mündenden „*Verzweigungsschnittes*“ durch die darunterliegenden Blätter hindurch und führt zum untersten Blatte zurück. Für den umlaufenden Punkt z gilt dabei das oberste Blatt im Verzweigungsschnitt als allein mit dem untersten zusammenhängend. Der Punkt z_0 (der einstweilendem Felde noch nicht angehört) heißt ein „*ν-blättriger Verzweigungspunkt*“.

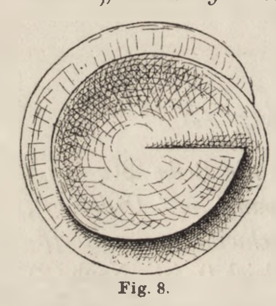


Fig. 8.

Grundlegend ist nunmehr, *daß die Windungsfläche durch die Transformation (4) auf die einblättrige oder, wie wir sagen wollen, „schlichte“ Umgebung des Nullpunktes der z'-Ebene übertragen wird.* In der Tat gilt ja, wenn wir $z' = r'e^{\vartheta' i}$ schreiben, offenbar $\vartheta' = \frac{\vartheta}{\nu}$, so daß ein einmaliger Umlauf um z_0 nur erst ein Wachstum von ϑ' um $\frac{2\pi}{\nu}$ zur Folge hat. Fügen wir dem gewonnenen Abbilde der Windungsfläche jetzt auch den Nullpunkt $z' = 0$ zu, so erscheint dasselbe hier geschlossen. Entsprechend können wir der Windungsfläche selbst den Verzweigungspunkt z_0 hinzufügen, in dem alsdann alle ν Blätter aneinander haften. Die Fläche schließt sich dann im Punkte z_0, der fortan keinen isolierten Randpunkt der Windungsfläche mehr abgibt.

Die Windungsfläche ist nun, freilich erst ohne den Verzweigungspunkt z_0 selbst, ein Bestandteil des Feldes **F** unserer anfänglich vorgelegten Funktion $f(z)$. Es ist zu entscheiden, ob wir auch dem Felde **F** den isolierten Randpunkt z_0 zufügen und dasselbe so bei z_0 schließen dürfen. Wir gehen mittelst der Transformation (4) zur Funktion über:

$$f(z) = f(z_0 + z'^{\nu}) = \bar{f}(z')$$

und erkennen, daß $\bar{f}(z')$ in der Umgebung des Nullpunktes $z' = 0$, abgesehen zunächst von diesem selbst, eine eindeutige analytische Funktion ist. *Hat sie im Nullpunkte einen Grenzwert, der auch ∞ sein kann, und wird durch Hinzunahme des Grenzwertes als Funktionswert $\bar{f}(0)$ die Funktion $\bar{f}(z')$ auch im Nullpunkte analytisch bzw. gewinnt sie daselbst einen Pol m^{ter} Ordnung, so wollen wir auch den Verzweigungspunkt z_0 dem Felde* **F** *der Funktion $f(z)$ hinzufügen und $f(z_0) = \bar{f}(0)$ als Funktionswert daselbst festsetzen.* Wir nennen in diesem Falle die nun zum Felde **F** gehörige Stelle einen *„ν-blättrigen Verzweigungspunkt der Funktion $f(z)$"*. Somit wird, falls $f(z)$ im Verzweigungspunkte endlich bleibt, in der Umgebung desselben eine Darstellung:

$$(5) \qquad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + c_2(z - z_0)^{\frac{2}{\nu}} + c_3(z - z_0)^{\frac{3}{\nu}} + \cdots$$

gelten, die jedoch, sofern ein Pol m^{ter} Ordnung in z_0 vorliegt, durch die folgende zu ersetzen ist:

$$(6) \qquad f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-\frac{m}{\nu}} + c_{-m+1}(z - z_0)^{-\frac{m-1}{\nu}} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots.$$

Hinzuzusetzen ist hier nur noch, daß an Stelle eines endlichen Punktes z_0 auch der Punkt ∞ der z-Ebene oder z-Kugel treten kann. Die einzige Änderung ist dann (wie S. 27) wieder die, daß in den vorstehenden Potenzentwicklungen z^{-1} an Stelle von $(z - z_0)$ tritt.

Die endlichblättrigen Verzweigungspunkte und die Pole fassen wir unter der Benennung der *„außerwesentlich" singulären Punkte* der Funktion $f(z)$ zusammen. Diese Punkte gelten, wie festgesetzt, fortan dem Felde **F** als zugehörig. *Das den Stellen von* **F** *eindeutig zugeordnete System aller Werte von $f(z)$ faßt man alsdann unter dem Namen eines „analytischen Gebildes" zusammen.*

Jeder darüber hinaus etwa noch vorkommende singuläre Punkt von $f(z)$ (nicht zu **F** gehörender Randpunkt) heißt ein *„wesentlich" singulärer Punkt.* In einem solchen Punkte erteilen wir der Funktion $f(z)$ im allgemeinen keinen Wert; doch soll damit keineswegs behauptet sein, daß nicht bei *speziell* gewählten Annäherungen an einen wesentlich singulären Punkt die Funktion einen bestimmten Grenzwert haben könne.

Die bisher bekannt gewordenen analytischen Gebilde haben zu einer großen Mannigfaltigkeit verschiedenartiger Gestalten der Felder **F** hingeführt. Zahlreiche Beispiele einfacher Art werden wir weiterhin kennen lernen. Auch einige nicht mehr elementare Fälle, von denen jedoch nur der erste unten wieder auftritt, seien hier beiläufig genannt. Die „elliptischen Modulfunktionen" liefern Beispiele von analytischen Gebilden, *bei*

denen im Einzelfalle das Feld **F** *aus den gesamten Innenpunkten einer schlichten (einblättrigen) Kreisfläche besteht.* Die Peripherie dieses Kreises selber muß also überall dicht von wesentlich singulären Stellen besetzt sein; man bezeichnet sie dieserhalb als eine *„natürliche Grenze“* der Funktion. Die elliptischen Modulfunktionen stellen eine besondere Art eindeutiger „automorpher Funktionen“ dar. Bei einer solchen Funktion ist das Feld **F** wieder ein schlichter Bereich der z-Ebene, der insbesondere (d. h. bei gewissen Arten automorpher Funktionen) wieder nur einen endlichen Teil der z-Ebene bedecken kann und dann als Rand die „natürliche Grenze“ der Funktion besitzt. Dabei zeigt die nähere Untersuchung, daß in einem solchen Falle das Feld **F** entweder einfach oder (wenn dieses nicht der Fall ist) sogleich ∞-fach zusammenhängend ist. Was aber die Gestalt des einzelnen geschlossenen Randstückes angeht, so zeigt sich, daß dasselbe entweder ein Kreis ist oder aber (wenn dies nicht der Fall ist) ein zusammenhängendes Punktsystem von äußerst komplizierter Struktur darstellt, das jedenfalls nirgends den Charakter einer „regulären Kurve“ besitzt.[1] Auch für Felder **F**, welche die z-Kugel ∞-fach überlagern, bietet die Theorie der automorphen Funktionen in den zu diesen Funktionen inversen sogenannten „polymorphen Funktionen“ interessante Beispiele.

§ 7. Von den durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen.

Es sei durch $w = f(z)$ ein analytisches Gebilde mit dem Felde **F** vorgelegt. Wie oben (S. 1ff.) schreibe man unter Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles $w = u + iv$ und lege für die Deutung der komplexen Werte $w = u + iv$ eine neue Ebene oder Kugel zugrunde. Der einzelnen Stelle z des Feldes **F** entspricht dann eindeutig ein Punkt w als „Bild“ jener Stelle z. Das hierbei eintretende „Abbild“ des gesamten Feldes **F** soll näher betrachtet werden. Es ist hierbei schrittweise vorzugehen: Zuvörderst ist der Charakter der fraglichen Abbildung im Unendlichkleinen festzustellen, sodann in der Umgebung einzelner Stellen z_0, endlich aber das volle Abbild von **F** ins Auge zu fassen.

Es sei erstlich z_0 eine nicht-singuläre Stelle in **F**, und es werde angenommen, *daß die Ableitung* $f'(z)$ *im Punkte* z_0 *nicht verschwinde.*[2]) Setzen wir:

$$|f'(z_0)| = M, \quad f'(z_0) = M \cdot e^{\mu i},$$

1) Diese Gegenstände sind ausführlich erörtert in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ von F. Klein und R. Fricke, 2 Bde. (Leipzig, 1897 und 1912).

2) Nach der ursprünglichen Erklärung würde $f(z)$ auch dann eine analytische Funktion sein, wenn $f(z)$ für alle z einen und denselben endlichen Wert c_0 hat;

so ist also $M > 0$ und endlich. Schreiben wir $dz = |dz| \cdot e^{\vartheta i}$, so entspricht dem Fortschritt von z_0 zu $(z_0 + dz)$ die Änderung des Funktionswertes $w_0 = f(z_0)$ um:

$$dw = f'(z_0) dz = M \cdot |dz| \cdot e^{(\mu + \vartheta)i}.$$

Hieraus folgt, daß zwei Differentialen dz_1, dz_2, die wir als Bogenelemente von z_0 aus gezeichnet denken können, stets von w_0 aus zwei Bogenelemente dw_1, dw_2 liefern, die ihren Beträgen nach den Beträgen von dz_1, dz_2 proportional sind, und die miteinander denselben Winkel bilden, wie dz_1 und dz_2. Auch ist, wenn wir uns dz um z_0 sich drehend vorstellen, der Drehungssinn des Abbildes dw um w_0 der gleiche. Wir gelangen so zu dem bekannten Charakter der *„konformen" oder „winkeltreuen" Abbildung: Ist im nicht-singulären Punkt z_0 die Ableitung $f'(z_0)$ nicht gleich 0, so übertragen sich die Winkel des Scheitelpunktes z_0 auf Winkel gleicher Größe und gleichen Drehungssinnes mit dem Scheitelpunkte w_0; die durch z_0 gelegten Bogendifferentiale $|dz|$ liefern proportionale Differentiale $|dw| = M|dz|$, wobei $M = |f'(z_0)|$ als „Modul" oder „Vergrößerungsverhältnis" der Abbildung bezeichnet wird.* Als unmittelbare Folgerung (die sogleich zur Verwendung kommt) setzen wir hinzu: Eine durch z_0 ziehende reguläre Kurve überträgt sich auf eine Kurve der w-Ebene, die durch den Punkt w_0 hindurchläuft und dabei in w_0 eine bestimmte Tangente hat.

Gehen wir jetzt sogleich zur Untersuchung der Abbildung in der Umgebung der gedachten Stelle z_0! Es erleichtert die Rechnungen, ohne daß eine wesentliche Beschränkung in der Gültigkeit des Ergebnisses eintritt, wenn wir $z_0 = 0$, $w_0 = 0$ und $f'(z_0) = 1$ setzen.

Dann gilt:

$$w = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots = z \cdot \mathfrak{P}(z), \tag{1}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes konvergiert und $\mathfrak{P}(0) = 1$ ist. Sind z_1, z_2 irgend zwei Punkte derselben Umgebung, so wird auch die unendliche Reihe:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}'(z_1, z_2) = 1 + c_2(z_1 + z_2) + c_3(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + \cdots \\ \cdots + c_{n+1}(z_1^n + z_1^{n-1} z_2 + z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + z_2^n) + \cdots\end{aligned} \tag{2}$$

$f'(z)$ hat dann überall den bestimmten Wert 0, die Reihendarstellung von $f(z)$ reduziert sich stets auf das Anfangsglied c_0, das Feld F der Funktion ist die schlichte z-Kugel usw. Indessen verlieren viele von den vorangehenden Entwicklungen ihre Bedeutung für den fraglichen Fall, in dem Pole und Verzweigungspunkte nicht auftreten. Bei den jetzt anzustellenden Untersuchungen ist durch die in den einzelnen Teilen der Betrachtung zu formulierenden Voraussetzungen der Fall einer mit einer Konstanten identischen Funktion von vornherein ausgeschlossen.

gleichmäßig konvergent und damit ihr Summenwert $\mathfrak{P}'(z_1, z_2)$ stetig von z_1 und z_2 abhängig sein. Offenbar gilt:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \mathfrak{P}'(z, z), \quad \mathfrak{P}'(0, 0) = 1.$$

Wegen der letzten Gleichung und $\mathfrak{P}(0) = 1$, sowie mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ können wir eine durch $|z| < h$ näher bezeichnete Umgebung des Nullpunktes derart einführen, daß für jeden Punkt z und jedes Punktepaar z_1, z_2 dieser Umgebung die Ungleichungen gelten:

$$|1 - \mathfrak{P}(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |1 - \mathfrak{P}'(z_1, z_2)| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |\mathfrak{P}(z)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |\mathfrak{P}'(z_1, z_2)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sowie, wenn wir:

$$\mathfrak{P}(z) = \varrho e^{\eta i}$$

setzen, für $\mathfrak{P}(z)$ insbesondere:

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \varrho < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \eta < +\frac{\pi}{4}.$$

Es gilt nun erstlich der Satz: *In der erklärten Umgebung des Nullpunktes können keine zwei verschiedenen Punkte z_1, z_2 den gleichen Funktionswert w liefern.* Es ist nämlich:

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) \cdot \mathfrak{P}'(z_1, z_2)$$

wegen (3) nur dann gleich 0, wenn $z_1 = z_2$ ist.

Wir denken jetzt, indem wir $z = re^{\vartheta i}$ setzen, um den Nullpunkt der z-Ebene alle konzentrischen Kreise K_r der Radien $r < h$ gelegt und wollen dieselben auf die w-Ebene abbilden. Das Abbild des Kreises K_r heiße C_r. Wir setzen:

$$w = Re^{\theta i}, \quad \text{wo also:} \quad R = r\varrho, \quad \theta = \vartheta + \eta$$

zutrifft (s. Gleichung (1)). Längs der Kurve C_r gilt also zufolge (4):

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r < R < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r,$$

während andererseits θ beim Beschreiben der Kurve C_r (entsprechend dem Wachstum des Winkels ϑ von 0 bis 2π bei einem im Interval (4) veränderlichen η) eine stetige Änderung um den Gesamtbetrag 2π erfährt. Selbstverständlich ist C_r wie das Original K_r eine geschlossene Kurve.

Aus diesen Darlegungen ergibt sich, daß die Kurve C_r um den Nullpunkt der w-Ebene herumläuft und dabei von diesem Punkte stets

eine Entfernung $> \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r$ hat. Die Kurve C_r kann sich nicht selbst schneiden; denn wir würden in diesem Falle zwei verschiedene Punkte z_1, z_2 mit dem gleichen w finden. Auch zeigt der Charakter der Abbildung im Unendlichkleinen, daß C_r nirgends eine Spitze haben kann und überall eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung sich längs C_r stetig ändert; denn $f'(z)$ ist längs K_r eindeutig und stetig, und es gilt daselbst überall:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |f'(z)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das Abbild C_r des Kreises K_r ist somit eine den Punkt $w = 0$ als „inneren" Punkt umlaufende, sich nicht selbst schneidende, spitzenfreie und „eckenfreie" reguläre Kurve.

Man betrachte nun zwei Kreise K_r, $K_{r'}$, mit $r' > r$. Die beiden Abbilder C_r und $C_{r'}$ haben dann keinen Punkt gemein, da man ja sonst wieder zwei verschiedene z_1, z_2 mit dem gleichen w nachweisen würde. Auch umgibt $C_{r'}$ die Kurve C_r notwendig außerhalb, wie man durch Einführung der Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene und durch deren Übertragung auf die w-Ebene unter Rücksicht auf die bisherigen Ergebnisse leicht streng nachweist.

Man setze nun, unter n irgendeine fest gewählte positive ganze Zahl verstanden:

$$r_0 = 0, \quad r_1 = \frac{h}{n}, \quad r_2 = \frac{2h}{n}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = \frac{(n-1)h}{n}$$

und denke die n zugehörigen Kurven C_r gezeichnet, wobei die erste sich auf den Nullpunkt zusammenziehende Kurve C_{r_0} als solche mitgezählt ist. Das einzelne Intervall von r_ν bis $r_{\nu+1}$ teile man demnächst wieder in n gleiche Teilintervalle und denke für die $(n-1)$ Teilpunkte r die zugehörigen Kurven C_r gezeichnet. Indem man so fortfährt, ist nur noch die Stetigkeit der Abbildung heranzuziehen, um zum Schlusse zu gelangen.

Wir dürfen an Stelle des Nullpunktes sogleich einen beliebigen, endlichen und nichtsingulären Punkt z_0 des Feldes **F** mit dem Funktionswerte $w_0 = f(z_0)$ heranziehen, sofern nur $f'(z_0)$ einen nichtverschwindenden Wert hat: *Die Umgebung einer endlichen, nichtsingulären Stelle z_0 von* **F** *mit dem Funktionswerte $w_0 = f(z_0)$ wird, falls die Ableitung daselbst einen nichtverschwindenden Wert $f'(z_0)$ besitzt, durch die analytische Funktion $w = f(z)$ konform auf einen den Bildpunkt w_0 als „inneren" Punkt umgebenden „schlichten" Bereich der w-Ebene abgebildet.*

Eine Folgerung, die jetzt zwar selbstverständlich ist, aber grundsätzliche Bedeutung besitzt, beruht auf der Erwägung, daß durch die

gewonnene Beziehung die Umgebung der Stelle w_0 eindeutig, stetig und konform auf einen den Punkt z_0 als inneren Punkt umgebenden Bereich der z-Ebene rückwärts übertragen wird. Bezeichnet man diese Zuordnung von Werten z zu den Werten w in der Umgebung von w_0 durch $z = \varphi(w)$, so ist hiermit eine Funktion $\varphi(w)$ gewonnen, welche in jedem Punkte w der fraglichen Umgebung eine eindeutig bestimmte, von der Richtung der Differentiation unabhängige Ableitung $\varphi'(w)$ besitzt; denn es ist $\varphi'(w) = (f'(z))^{-1}$, falls z die dem w zugeordnete Stelle ist: *Ist z_0 eine im Endlichen gelegene, nichtsinguläre Stelle der Funktion $f(z)$ mit dem Funktionswerte w_0, und ist $|f'(z_0)| > 0$, so ist für die Umgebung der Stelle z_0 die Inversion der Funktion $w = f(z)$ möglich und führt zu einer analytischen Funktion $z = \varphi(w)$, für welche der Punkt w_0 nicht singulär ist.*

Es soll jetzt angenommen werden, daß in dem endlichen, nichtsingulären Punkte z_0 die ersten $(\nu - 1)$ Ableitungen der Funktion $f(z)$ verschwinden, während $f^{(\nu)}(z_0)$ den von Null verschiedenen endlichen Wert $c_\nu \cdot \nu!$ hat; natürlich soll $\nu > 1$ sein. Ist $f(z_0) = w_0$, so gilt in der Umgebung von z_0 eine Darstellung:

$$\begin{aligned} w - w_0 &= (z - z_0)^\nu (c_\nu + c_{\nu+1}(z - z_0) + c_{\nu+2}(z - z_0)^2 + \cdots) \\ &= (z - z_0)^\nu \mathfrak{P}(z - z_0). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{P}(0) = c_\nu$ von 0 verschieden ist, so können wir im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ eine Umgebung von z_0 eingrenzen, in der $\mathfrak{P}(z - z_0)$ überall von 0 verschieden und selbstverständlich endlich ist. Man wähle nun unter den ν Werten von $\sqrt[\nu]{c_\nu}$ einen einzelnen beliebig aus und nenne denselben c_1'. Dann ist, wenn wir vorschreiben, daß $\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)}$ im Punkte z_0 den Wert c_1' annehmen soll, durch diese Wurzel $\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)}$ eine im eingegrenzten Bereiche eindeutige analytische Funktion gegeben[1]), deren Reihendarstellung diese sei:

$$\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)} = c_1' + c_2'(z - z_0) + c_3'(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Es ist hierdurch zugleich:

$$w' = (w - w_0)^{\frac{1}{\nu}} = (z - z_0)(c_1' + c_2'(z - z_0) + c_3'(z - z_0)^2 + \cdots)$$

in der Umgebung von z_0 eindeutig erklärt.

Auf die hier vorliegende Gleichung ist nun die Überlegung anwendbar, welche oben an (1) S. 31 angeschlossen wurde. Die Umgebung von z_0 überträgt sich auf einen schlichten Bereich um den

1) Siehe hierzu die an Gleichung (4) S. 28 sowie die unten S. 76 ff. folgenden Entwicklungen.

Nullpunkt der w'-Ebene. Indem wir sodann aber auf die Darlegungen von S. 28 zurückgreifen, gewinnen wir den Satz: *Die Umgebung einer endlichen nichtsingulären Stelle z_0, in welcher $f'(z)$, $f''(z)$, ..., $f^{(\nu-1)}(z)$ verschwinden, während $|f^{(\nu)}(z_0)| > 0$ ist, wird durch die Funktion $w = f(z)$ auf eine ν-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 abgebildet, wobei die Inversion unserer Funktion die für die Umgebung eines Verzweigungspunktes charakteristische Entwicklung* (5) *S.* 29 *liefert:*

$$(z - z_0) = c_1''(w - w_0)^{\frac{1}{\nu}} + c_2''(w - w_0)^{\frac{2}{\nu}} + c_3''(w - w_0)^{\frac{3}{\nu}} + \cdots.$$

Bei der vorstehenden Betrachtung wurde die Umgebung von z_0 auf einen den Nullpunkt der w'-Ebene umgebenden Bereich durchaus konform abgebildet. Die Entwicklungen von S. 28 zeigen aber, daß beim Fortgang von der w'-Ebene zur w-Ebene eine Unterbrechung der Winkeltreue der Abbildung in dem dem Nullpunkte $w' = 0$ entsprechenden Punkte w_0 eintritt. Indem wir sofort zur Beziehung zwischen z und w zurückkehren, haben wir den Satz zu notieren: *Im Punkte z_0, dessen Umgebung bei der Abbildung durch $w = f(z)$ eine ν-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 lieferte, ist die Konformität der Abbildung in der Art unterbrochen, daß sich Winkel des Scheitelpunktes z_0 auf Winkel ν-facher Größe des Scheitelpunktes w_0 übertragen.*

Für die singulären Punkte im Felde **F** und die Stelle ∞ ist die Betrachtung mit Hilfe der bisherigen Methoden leicht durchgeführt. In der Umgebung eines ν-blättrigen Verzweigungspunktes z_0 hat **F** die Gestalt einer ν-blättrigen Windungsfläche. Liegt z_0 im Endlichen und findet sich daselbst nicht zugleich ein Pol von $f(z)$, so gilt die Reihendarstellung (5) S. 29. Ist c_1 von 0 verschieden, so überträgt sich die ν-blättrige Umgebung von z_0 auf einen schlichten, den Punkt $w = c_0$ umgebenden Bereich der w-Ebene. Ist aber c_m mit $m > 1$ der erste nichtverschwindende unter den Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$, so gewinnen wir als Abbild eine m-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkt $w = c_0$. So oft $m \gtrless \nu$ ist, tritt im Punkte $w = c_0$ eine leicht näher angebbare Unterbrechung der Konformität der Abbildung ein. Ferner gilt der Satz: Hat $w = f(z)$ im endlichen Punkte z_0 einen Pol m^{ter} Ordnung, und ist z_0 nicht zugleich ein Verzweigungspunkt (vgl. Gleichung (1) S. 27), so wird die Umgebung von z_0, falls $m = 1$ ist, auf einen schlichten Bereich um die Stelle ∞ der w-Kugel abgebildet, falls $m > 1$ ist, aber auf eine m-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkt ∞ und mit Unterbrechung der Konformität daselbst. Auch den Zusammenfall eines Poles mit einem Verzweigungspunkte wird man leicht erledigen, ebenso die besondere Lage des Punktes z_0 als Punkt ∞ der z-Kugel, wo im einfachsten Falle, d. h. wenn die

Stelle ∞ weder Pol noch Verzweigungspunkt von $f(z)$ ist, die Entwicklung (4) S. 22 gilt.

Wir gelangen zum Schluß, indem wir noch einen Blick auf das Gesamtfeld F der Funktion $w = f(z)$ werfen: *Durch die Funktion $w = f(z)$ wird das Feld F derselben auf einen die w-Ebene oder w-Kugel überlagernden Bereich F' eindeutig abgebildet, welcher das Feld der zu $w = f(z)$ inversen analytischen Funktion $z = \varphi(w)$ ist. Die Abbildung ist im allgemeinen eine konforme; eine Unterbrechung der Konformität tritt nur ein in Verzweigungspunkten, wobei jedoch auch hier die Abbildung konform bleibt, wenn ein ν-blättriger Verzweigungspunkt des einen Feldes im andern wieder einen Verzweigungspunkt der gleichen Blätterzahl liefert.* Gegenüber diesen Angaben könnte nur noch das Bedenken geltend gemacht werden, ob nicht etwa die Funktion $z = \varphi(w)$ über das Abbild F' des Feldes F hinaus fortsetzbar sein möchte, so daß dann F' zwar ein Bestandteil des Feldes von $\varphi(w)$ wäre, aber dies Feld nicht völlig erschöpfte. Doch würde in diesem Falle die Abbildung des wahren Feldes von $\varphi(w)$ auf die z-Ebene ein notwendig über F hinausreichendes Feld von $f(z)$ liefern; das Bedenken ist also abzuweisen.

§ 8. Begriff des Residuums und Sätze über Residuen.

Um einen Punkt z_0 im Innern des Feldes der Funktion $f(z)$ beschreibe man *innerhalb* des Konvergenzkreises der zugehörigen Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ eine geschlossene Kurve C, die einmal um z_0 herumlaufen soll, wenn es sich um einen gewöhnlichen Punkt handelt, dagegen ν Male, falls z_0 ein ν-blättriger Verzweigungspunkt ist. Man berechne das zugehörige Integral:

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} f(\zeta)\,d\zeta,$$

genommen über die Kurve C im positiven Umlaufsinne.[1]) Zufolge des Cauchyschen Integralsatzes (S. 4) ist der Integralwert (1) von der besonderen Auswahl der Kurve C innerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe unabhängig.[2]) *Der Integralwert* (1) *ist somit für die*

1) Man hat also nach S. 5 u. f. die Kurve C in der Richtung zu durchlaufen, bei welcher man den von C umschlossenen, z_0 enthaltenden Bereich zur linken Hand hat. Ist z_0 die Stelle ∞, so wolle man sich die Verhältnisse auf der z-Kugel vorstellen.

2) Um im Falle eines ν-blättrigen Verzweigungspunktes den Cauchyschen Integralsatz in seiner ursprünglichen Gestalt (S. 4 ff.) anwenden zu können, wolle man die Betrachtung mittelst der Transformation (4) S. 28 in die z'-Ebene verlegen oder auf die unten (S. 38) folgende Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes für mehrblättrige Bereiche Bezug nehmen.

Funktion $f(z)$ und die Stelle z_0 eindeutig bestimmt und heißt das „Residuum" der Funktion $f(z)$ im Punkte z_0.

Aus der gliedweise integrierbaren Potenzreihenentwicklung kann man in jedem Falle das Residuum leicht berechnen.[1]) Es ergibt sich: *Ist z_0 kein Verzweigungspunkt, so ist das Residuum für jeden endlichen, nicht-singulären Punkt gleich 0, für einen Pol gleich dem Koeffizienten c_{-1} der Potenz $(z-z_0)^{-1}$ in der betreffenden Entwicklung* (1) *S.* 27 *und schließlich für die Stelle ∞ gleich $-c_1$, wo c_1 der Koeffizient von z^{-1} in der zugehörigen Entwicklung* (3) *S.* 27 *ist.* Weiter aber findet man: *Ist z_0 ein ν-blättriger Verzweigungspunkt, so ist das Residuum von $f(z)$ wiederum 0, falls z_0 im Endlichen liegt und nicht zugleich ein Pol von $f(z)$ ist; ist aber die im Endlichen liegende Stelle z_0 zugleich ein Pol von $f(z)$, wo alsdann die Entwicklung* (6) *S.* 29 *gilt, so ist das Residuum gleich $\nu c_{-\nu}$; handelt es sich schließlich um die Stelle $z_0 = \infty$ mit der Reihendarstellung:*

$$f(z) = c_{-m} z^{\frac{m}{\nu}} + c_{-m+1} z^{\frac{m-1}{\nu}} + \cdots + c_0 + c_1 z^{-\frac{1}{\nu}} + c_2 z^{-\frac{2}{\nu}} + \cdots,$$

welche die Möglichkeit eines Poles gleich mit umfaßt, so ist das Residuum von $f(z)$ gleich $-\nu c_\nu$. Von 0 verschiedene Residuen kommen der Funktion $f(z)$ hiernach allein für Pole im Endlichen und für die etwa im Felde **F** liegenden Stellen ∞ zu.

Es sei nun **T** irgendein in **F** gelegener Bereich, der sich auch über sich selbst hinüberziehen darf, aber allerdings die z-Ebene nirgends ∞-fach bedecken soll. Der Rand C von **T** bestehe aus endlich vielen regulären Kurven, von denen keine durch einen Pol von $f(z)$ oder eine Stelle ∞ hindurchlaufen soll, und die, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, auch die etwaigen Verzweigungspunkte vermeiden mögen. Die nächsten Umgebungen der in **T** gelegenen Pole, Verzweigungspunkte und Stellen ∞[2]) wollen wir mittelst kleiner, die betreffenden Punkte umlaufenden Kurven C_1, C_2, ... ausschneiden[3]) und

---

1) Diese Rechnungen beruhen auf den Formeln:

$$\int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2i\pi, \quad \int_{(C)} (\zeta - z_0)^n d\zeta = 0 \qquad \text{für } n \gtrless 1,$$

welche man bei Gebrauch eines Kreises C um z_0 unter Einführung von Polarkoordinaten $\zeta - z_0 = re^{\vartheta i}$ leicht beweist und auch für den Fall eines ν-blättrigen Verzweigungspunktes z_0 ohne Mühe verallgemeinert.

2) Die Sprechweise schließt sich an die Vorstellungen auf der z-Kugel an. Punkte ∞ können nur in endlicher Anzahl dem Bereiche **T** angehören, da dieser überhaupt keine Stelle z unendlich-blättrig bedecken sollte.

3) Man beachte, daß die Anzahl der singulären Punkte von $f(z)$ in **T** nur endlich sein kann. Würden sich z. B. in **T** unendlich viele Pole finden, so würden wir (auf der z-Kugel) in **T** nach der „Methode der Einschachtelung" min-

dem Bereiche **T** fortnehmen; der Restbereich heiße **T**′, er wird durch $C, C_1, C_2, \ldots$ berandet.

Im so vorbereiteten, ganz im Endlichen gelegenen Bereiche **T**′, unter Einschluß des Randes, ist nun $f(z)$ überall analytisch, so daß der Cauchysche Integralsatz (4) S. 6 die Gleichung ergibt:

$$\int_{(C)} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{(C_1)} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{(C_2)} f(\zeta)\,d\zeta + \cdots = 0. \tag{2}$$

Der Integralsatz bezog sich oben allerdings nur erst auf Bereiche, die keinen Teil der z-Ebene mehrfach bedecken. Aber wir können **T**′ durch eine Anzahl von Querschnitten immer in endlich viele Teilbereiche zerlegen, die einzeln genommen keinen Teil der z-Ebene mehrfach bedecken. Bei Addition der auf diese Teilbereiche bezogenen Formeln (4) S. 6 werden sich dann die jeweils längs der beiden Ufer des einzelnen Querschnittes erstreckten Integrale aufheben, so daß die eben angegebene Gleichung (2) für **T**′ als richtig erkannt wird.

Mit Rücksicht auf die jetzt vorliegende Durchlaufungsrichtung der Kurven $C_1, C_2, \ldots$ erkennen wir in den betreffenden Integralen in (2) die mit $-2i\pi$ multiplizierten zugehörigen Residuen von $f(z)$. Indem wir diese Glieder der Gleichung (2) transponieren, entspringt der Satz: *Das über den Rand C des Bereiches* **T** *im positiven Umlaufungssinne genommene Integral:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} f(\zeta)\,d\zeta \tag{3}$$

ist gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ für alle in **T** *gelegenen Pole und Stellen* ∞.

Im Anschluß an die S. 27 eingeführte Sprechweise sagt man, die Funktion $f(z)$ habe in einem ν-blättrigen Verzweigungspunkte z_0, der zunächst im Endlichen liege, einen *„Nullpunkt m^ter^ Ordnung"*, wenn in der zugehörigen Entwicklung (5) S. 29 das Absolutglied c_0 verschwindet und der erste nicht-verschwindende Koeffizient c_m ist. Liegt ein Pol und damit die Entwicklung (6) S. 29 vor, in der c_{-m} nicht gleich 0 sein soll, so hat $f(z)$ im Verzweigungspunkte einen *„Pol m^ter^ Ordnung"*. Für einen in einer Stelle ∞ gelegenen Verzweigungspunkt überträgt man diese Ausdrucksweise leicht; z. B. wird $f(z)$ hier einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung haben, falls das erste wirklich auftretende Glied der zugehörigen Reihenentwicklung $c_m z^{-\frac{m}{\nu}}$ mit $m > 0$ ist.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Als „logarithmisches Re-*

---

destens eine Häufungsstelle dieser Pole nachweisen. Diese Stelle müßte aber für $f(z)$ wesentlich singulär sein (s. S. 31 ff.), was innerhalb **F** ausgeschlossen ist.

siduum" der Funktion $f(z)$ im Punkte z_0 bezeichnet man den Wert des Integrals:

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} d\log f(\zeta),$$

wo die Integrationsbahn wieder die in (1) *benutzte, den Punkt z_0 umlaufende kleine Kurve C sein soll.* Doch soll, wie wir hier hinzusetzen müssen, C so klein gewählt werden, daß $f(z)$ weder auf C noch in dem von C umschlossenen Bereiche, abgesehen nur etwa vom Punkte z_0 selber, einen Nullpunkt besitzen soll.[1])

Die Ausrechnung des Integrales (4) in den einzelnen Fällen liefert nun ein höchst einfaches Ergebnis, das *ohne Ausnahme für alle Innenpunkte des Feldes* **F** gilt: *Das logarithmische Residuum von $f(z)$ ist in jedem Punkte z_0, in welchem $f(z)$ weder einen Nullpunkt noch einen Pol hat, gleich* 0; *dasselbe ist für einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung von $f(z)$ gleich m und für einen Pol m^{ter} Ordnung unserer Funktion gleich $-m$.*

Wir gehen jetzt auf den oben bereits erklärten Bereich **T** im Felde **F** zurück und wollen betreffs des Randes C von **T** über die oben schon gegebenen Bestimmungen hinaus noch festsetzen, daß C jedenfalls auch durch keinen Nullpunkt von $f(z)$ hindurchlaufen soll. Aus dem oben schon bewiesenen Residuensatze ergibt sich dann betreffs der logarithmischen Residuen von $f(z)$ sofort der weitere Satz: *Das über den Rand C des Bereiches* **T** *im positiven Umlaufssinne genommene Integral:*

$$(5) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} d\log f(\zeta)$$

ist gleich der Summe der Ordnungen aller in **T** *gelegenen Nullpunkte von $f(z)$, vermindert um die Summe der Ordnungen aller daselbst befindlichen Pole der Funktion $f(z)$.*

§ 9. Die Reihe und der Satz von Laurent. Folgerungen über eindeutige Funktionen.

Durch zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 des Mittelpunktes $z = 0$ und der Radien r_1 und r_2, die endlich und von 0 verschieden seien und die Bedingung $r_1 > r_2$ befriedigen sollen, sei ein zweifach zusammenhängender Bereich T_2 von der Gestalt eines Kreisringes ein-

1) Man beachte, daß in der Umgebung eines inneren Feldpunktes z_0 stets nur endlich viele Nullpunkte von $f(z)$ auftreten können (vgl. Note 3 S. 37), so daß man also die Umgebung auch stets so klein wählen kann, daß höchstens z_0 Nullpunkt von $f(z)$ ist.

gegrenzt. Die Funktion $f(z)$ soll in T_2 unter Einschluß der beiden Randkurven eindeutig und überall analytisch sein.

Ist alsdann z irgendein fest gewählter innerer Punkt von T_2, für welchen also:

(1) $$r_2 < |z| < r_1$$

zutrifft, so gilt zufolge des Cauchyschen Integralsatzes[1]):

(2) $$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

wo beide Kreise in denjenigen Richtungen zu durchlaufen sind, welche für die inneren, den Nullpunkt enthaltenden, Kreisscheiben den positiven Umlaufssinn liefern.

Da die Integrationsvariabele ζ längs K_1 den konstanten Betrag $|\zeta| = r_1$ hat und z in Übereinstimmung mit (1) fest gewählt ist, so können wir die S. 16 gegebene Entwicklung (indem wir den damaligen Wert z_0 durch 0 ersetzen) wiederholen und finden:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

wo rechts eine für den ausgewählten Wert z konvergente Reihe steht, deren Koeffizienten durch:

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$$

gegeben sind. Aber eine entsprechende Entwicklung kann man auch für das zweite Integral in (2) rechter Hand durchführen. Da nämlich für einen längs K_2 variabelen Punkt ζ

$$\left|\frac{\zeta}{z}\right| = \frac{r_2}{|z|} < 1$$

und nach oben geschehener Wahl von z konstant ist, so gilt:

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\cdot f(\zeta)\zeta^{n-1},$$

und man findet wie oben (S. 16 u. f.), daß die hier rechts stehende Reihe längs K_2 gleichmäßig konvergiert. Daraufhin gewinnt man:

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = c_{-1}\frac{1}{z} + c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-3}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

---

1) Die Gleichung (2) entspricht der „Cauchyschen Integralformel" (2) S. 16 und ergibt sich in derselben Weise wie diese Formel aus dem Cauchyschen Integralsatze.

als Darstellung des links stehenden Integrales mittelst einer im Punkte z konvergenten Reihe, deren Koeffizienten erklärt sind durch:

$$c_{-n} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K_1)} f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta.$$

Durch Addition der beiden für die Integrale in (2) rechter Hand gewonnenen Reihenentwicklungen ergibt sich der Satz: *Der in einem inneren Punkte z des ringförmigen Bereiches T_2 eintretende Funktionswert $f(z)$ ist der Summenwert der nach beiden Seiten hin unendlichen, im Punkte z konvergenten, sogenannten „Laurentschen Reihe“[1]):*

$$(3)\quad f(z) = \cdots + c_{-3}\frac{1}{z^3} + c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

deren von der Auswahl der Stelle z unabhängige Koeffizienten durch die angegebenen bestimmten Integrale geliefert werden.

Man setze nun:

$$f_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,$$
$$f_2(z) = c_{-1}\frac{1}{z} + c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-3}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

und nenne die Konvergenzradien dieser Reihen R_1 und R_2, wobei natürlich die zweite Reihe für $|z| > R_2$ konvergiert. Wir wollen hierbei den extremen Fall, daß die erste Reihe für alle endlichen z konvergiert, gleich mit einbegreifen, indem wir dann $R_1 = \infty$ nehmen; ebenso lassen wir die Möglichkeit $R_2 = 0$ zu. Da die Laurentsche Reihe (3) für jeden Innenpunkt des Bereiches T_2 konvergiert, so ist jedenfalls $R_1 \geqq r_1$ und $R_2 \leqq r_2$. Indessen ist leicht zu sehen, daß hier die Gleichheitszeichen nicht gelten können. Für die inneren Punkte von T_2 gilt nämlich zufolge (3) als Darstellung von $f(z)$:

$$(4)\qquad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Es ist aber klar, daß durch die gleichzeitige analytische Fortsetzung von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auf Grund von (4) diejenige von $f(z)$ mitgegeben ist. Nun war zufolge der Voraussetzung $f(z)$ auch noch für alle Punkte von K_1 eindeutig und analytisch, und dasselbe gilt von der durch ihre Potenzreihe erklärten Funktion $f_2(z)$. Demnach ist auch $f_1(z) = f(z) - f_2(z)$ längs K_1 noch überall analytisch (frei von singulären Punkten), so daß K_1 innerhalb des Kreises vom Radius R_1 liegt. Ebenso zeigt man, daß notwendig $R_2 < r_2$ sein muß.

Die vorstehende Betrachtung zeigt zugleich, daß der Gültigkeitsbereich der Gleichung (3) über den Bereich T_2 hinausreicht. Es gilt

1) Über das Auftreten der Laurentschen Reihe und des gleich zu nennenden Laurentschen Satzes sehe man die Literaturnachweise bei Osgood, S. 346.

nämlich der Satz: *In jedem Bereiche* T, *dessen sämtliche Punkte* z *die Bedingung:*

$$R_1 > |z| > R_2$$

befriedigen, ist die Laurentsche Reihe (3) *gleichmäßig konvergent und liefert als Summenwerte die Funktionswerte* $f(z)$, *welche der anfänglich vorgelegten Funktion oder ihrer Fortsetzung in* T *zukommen.*

Weiter ist der Satz anzumerken: *Die im Bereiche* T_2 *eindeutige und daselbst überall analytische Funktion* $f(z)$ *läßt sich in diesem Bereiche nur auf eine einzige Art in eine Laurent*sche *Reihe entwickeln.* Gilt nämlich in T_2 die Darstellung:

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c'_\nu z^\nu,$$

so wird diese Reihe längs eines Kreises K, der mit K_1 und K_2 konzentrisch ist und im Innern des Ringes T_2 verläuft, sicher gleichmäßig konvergent sein. Verstehen wir nun unter n irgendeine ganze Zahl[1]), so ist in:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)} \Big(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c'_\nu \zeta^{\nu-n-1}\Big)\, d\zeta,$$

wo die Integrale über K in dem für den umschlossenen Bereich positiven Umlaufssinne geführt sein sollen, die rechts stehende Reihe wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz gliedweise integrierbar:

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\Big(c'_\nu \int\limits_{(K)} \zeta^{\nu-n-1} d\zeta\Big).$$

Von den hier rechts auftretenden Integralen ist aber nur das eine für $\nu = n$ von 0 verschieden und gleich $2i\pi$, während alle übrigen verschwinden. Es ist demnach:

$$c'_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(K)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

womit wir (zufolge des Cauchyschen Integralsatzes) auf die obige Koeffizientenbestimmung der Reihe (3) zurückkommen. Die soeben angesetzte Laurentsche Reihe für $f(z)$ ist also notwendig mit der Reihe (3) identisch, womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Als „Laurentschen Satz“ bezeichnet man das durch die bisherigen Entwicklungen festgestellte Ergebnis: *Eine in dem durch die Ungleichungen* (1) *festgelegten Bereiche* T_2 *eindeutige und analytische Funktion* $f(z)$ *ist in einer und nur einer Art als Summe:*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

1) Siehe die Anmerkung S. 9.

zweier Funktionen $f_1(z)$ *und* $f_2(z)$ *darstellbar, von denen die erste innerhalb des Kreises* K_1 *überall eindeutig und analytisch ist, während die zweite außerhalb des Kreises* K_2, *unter Einschluß der Stelle* ∞, *überall eindeutig und analytisch ist und im Punkt* ∞ *verschwindet.*

Einige besondere Folgerungen beziehen sich auf die Fälle, daß $f(z)$ auch innerhalb K_2 oder auch außerhalb K_1 oder endlich in beiden Bereichen zugleich eindeutig bleibt. Es gelte erstlich die Voraussetzung, daß $f(z)$ auch innerhalb K_2 eindeutig sei und, höchstens vom Nullpunkte $z = 0$ selbst abgesehen, sich daselbst überall analytisch verhalte. Da $f_1(z)$ innerhalb K_2 überall eindeutig und analytisch ist, so wird ein etwa im Nullpunkte auftretender singulärer Punkt von $f(z)$, der (wegen der Eindeutigkeit von $f(z)$) entweder wesentlich ist oder einen Pol m^{ter} Ordnung darstellt, notwendig von der Funktion $f_2(z) = f(z) - f_1(z)$ aufgenommen, die indessen für alle von 0 verschiedenen z eindeutig und analytisch sein wird.

Nimmt man nun erstlich an, daß $f(z)$ auch im Nullpunkt analytisch bleibt, so gilt (vgl. S. 17) für alle z mit $|z| < R_1$ und also insbesondere auch in T_2 eine Darstellung:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,$$

und da dies notwendig die Laurentsche Reihe ist, so muß im vorliegenden Falle $f_2(z)$ mit 0 identisch sein. Liegt im Nullpunkte ein Pol m^{ter} Ordnung von $f(z)$, so findet man in derselben Art als in T_2 gültig:

$$f(z) = c_{-m} \frac{1}{z^m} + c_{-m+1} \frac{1}{z^{m-1}} + \cdots + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots;$$

und da dies wiederum die Laurentsche Reihe sein muß, so gilt:

$$(5) \qquad f_2(z) = c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \cdots + c_{-m} \frac{1}{z^m}.$$

Trifft keiner dieser beiden Fälle zu, so ist der Nullpunkt für $f(z)$ und damit für $f_2(z)$ wesentlich singulär: *Ist* $f(z)$ *auch innerhalb* K_2, *höchstens vom Nullpunkt abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist* $f_2(z)$ *identisch* 0 *oder die rationale Funktion* (5) *oder durch eine für alle von* 0 *verschiedenen* z *konvergente unendliche Reihe darstellbar, je nachdem* $f(z)$ *auch im Nullpunkt analytisch ist oder daselbst einen Pol* m^{ter} *Ordnung oder endlich einen wesentlich singulären Punkt hat.* Offenbar ist auch die Umkehrung dieses Satzes richtig.

Entsprechende Betrachtungen gelten, falls $f(z)$ auch außerhalb K_1 eindeutig und, höchstens abgesehen von der Stelle ∞, analytisch ist. Wir merken den Satz an: *Ist* $f(z)$ *außerhalb* K_1, *höchstens von dem*

Punkte ∞ *abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist* $f_1(z)$ *mit einer Konstanten* c_0 *identisch*[1]) *oder eine rationale ganze Funktion* m^{ten} *Grades:*

$$(6) \qquad f_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

oder durch eine „beständig konvergente“ unendliche Reihe $\mathfrak{P}(z)$ *darstellbar, je nachdem* $f(z)$ *auch im Punkte* ∞ *analytisch ist oder daselbst einen Pol* m^{ter} *Ordnung oder einen wesentlich singulären Punkt hat. Auch hier gilt offenbar die Umkehrung des Satzes.*

Diese drei Fälle wollen wir noch mit dem Falle einer identisch verschwindenden Funktion $f_2(z)$ kombinieren: *Ist* $f(z)$ *auf der ganzen* z*-Kugel, höchstens vom Punkte* $z = \infty$ *abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist* $f(z)$ *mit einer Konstanten* c_0 *identisch oder eine rationale ganze Funktion* (6) *vom* m^{ten} *Grade oder darstellbar durch eine „beständig konvergente“ unendliche Reihe* $\mathfrak{P}(z)$, *je nachdem* $f(z)$ *auch im Punkte* ∞ *analytisch bleibt oder daselbst einen Pol* m^{ter} *Ordnung oder einen wesentlich singulären Punkt hat. Auch die Umkehrung des Satzes trifft zu.*

§ 10. Die ganzen rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen.

Die vorstehenden allgemeinen Entwicklungen über analytische Funktionen sollen nun an einzelnen Funktionsarten, insoweit dies für unsere späteren Zwecke wünschenswert ist, erläutert und weiter entwickelt werden. Folgende Erklärung schließt sich an den letzten Satz von § 9 an: *Eine Funktion, deren Feld* F *die schlichte (einblättrige) und vollständige* z*-Kugel ist und die den Punkt* $z = \infty$ *als einzigen singulären Punkt hat, heißt eine „ganze rationale“ Funktion und werde mit der besonderen Bezeichnung* $g(z)$ *belegt.*[2]) Der singuläre Punkt ist, als dem Felde F angehörig, außerwesentlich und also, da $g(z)$ in der Umgebung desselben eindeutig ist, notwendig ein Pol. Ist die positive ganze Zahl m die Ordnung desselben, so heißt $g(z)$ eine *„ganze rationale Funktion* m^{ten} *Grades“* und ist durch einen Ausdruck (6) S. 44 für alle Werte von z gegeben.

---

1) Siehe die Anmerkung 2 S. 30.

2) Wir erklären die Funktionen $f(z)$ hier und in der Folge zumeist aus ihren wesentlichen Eigenschaften, d. h. etwa durch Angabe ihres Feldes F und der Art und Lage ihrer singulären Punkte. Dieser Standpunkt ist derjenige Riemanns, worüber man insbesondere den Art. 20 seiner 1851 erschienenen Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“ (Gesammelte mathematische Werke, Leipzig 1876, S. 1 ff.) vergleiche. Die Darstellung einer Funktion, etwa mittels einer Potenzreihe oder eines sonstigen analytischen Ausdrucks, ist dann immer erst eine Folge der unabhängig hiervon gegebenen Erklärung der Funktion.

Über die etwaigen Nullpunkte von $g(z)$ gibt das am Schlusse von § 8 (S. 39) aufgestellte Theorem Aufschluß. Da $g(z)$ nicht mit 0 identisch ist, so können wir in der endlichen z-Ebene eine geschlossene, sich nicht selbst schneidende, reguläre Kurve C der Art wählen, daß in dem von C umschlossenen endlichen Bereiche, den Rand C selbst mit einbegriffen, kein Nullpunkt von $g(z)$ gelegen ist. Natürlich findet sich in diesem Bereiche auch kein Pol, so daß nach dem genannten Theoreme die fragliche Kurve C als Integrationsbahn:

(1) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} d\log g(\zeta) = 0$$

liefert. Nun aber wird die z-Kugel durch die Kurve C in zwei Bereiche zerlegt, einmal den eben ins Auge gefaßten Bereich, sodann den ganzen Rest der z-Kugel, welcher den Pol m^{ter} Ordnung und alle etwaigen Nullpunkte von $g(z)$ enthält. Indem wir C als Rand dieses zweiten Bereiches auffassen und auf ihn das fragliche Theorem anwenden, folgt aus (1) sofort: *Die ganze rationale Funktion m^{ten} Grades $g(z)$ hat einen oder mehrere Nullpunkte, und es ist die Summe der Ordnungen aller ihrer Nullpunkte gleich m.*

Ist bei der durch $z = s$ zu bezeichnenden Stelle ein Nullpunkt der Ordnung $\varkappa$ von $g(z)$ gelegen, so ist nach S. 27 hierselbst $g(z)\cdot(z-s)^{-\varkappa}$ von 0 verschieden und analytisch. Die sonst etwa vorkommenden Nullpunkte von $g(z)$ besitzt $g(z)\cdot(z-s)^{-\varkappa}$ in den gleichen Ordnungen, ohne darüber hinaus noch weitere Nullpunkte aufzuweisen. Im übrigen hat $g(z)\cdot(z-s)^{-\varkappa}$ wieder dasselbe Feld **F** wie $g(z)$ und ist im Endlichen polfrei.

Diese Betrachtung kann man durch Hinzunahme der weiteren etwa noch auftretenden Nullpunkte von $g(z)$ fortsetzen. Seien die unterschiedenen Nullpunkte von $g(z)$ bei $s_1, s_2, \ldots, s_k$ gelegen und seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ ihre Ordnungen, so gilt für die positiven ganzen Zahlen $\varkappa$ nach dem zuletzt gewonnenen Satze:

(2) $$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_k = m,$$

so daß insbesondere ihre Anzahl k der Bedingung $0 < k \leqq m$ genügt. Dann erkennt man in:

$$g(z)\cdot(z-s_1)^{-\varkappa_1}(z-s_2)^{-\varkappa_2}\cdots(z-s_k)^{-\varkappa_k}$$

eine Funktion des bisherigen Feldes **F**, die für alle endlichen z analytisch und frei von Nullpunkten ist. Nach dem zuletzt ausgesprochenen Satze kann sie demnach auch keinen Pol bei $z = \infty$ mehr besitzen und ist also nach dem Schlußtheorem von § 9 mit einer Konstanten identisch. Den Wert der letzteren bestimmen wir mittelst des Ausdruckes

(6) S. 44 leicht zu c_m und kleiden das gewonnene Ergebnis in den Satz: *Die ganze rationale Funktion $g(z)$ vom m^{ten} Grade gestattet die „Linearfaktorenzerlegung"*:

(3) $$g(z) = c_m(z - s_1)^{\varkappa_1}(z - s_2)^{\varkappa_2} \ldots (z - s_k)^{\varkappa_k},$$

wobei die ganzen positiven Exponenten $\varkappa$ an die Bedingung (2) *gebunden sind.* Hierin ist eine bekannte Ausdrucksform für das *„Fundamentaltheorem der Algebra"* gewonnen.

Mit Rücksicht auf die Fortsetzung der Untersuchung wollen wir unter der Annahme, daß der Grad $m > 1$ sei[1]), sogleich für die erste Ableitung $g'(z)$, welche eine ganze rationale Funktion $(m-1)^{ten}$ Grades ist, die Linearfaktorenzerlegung in der Gestalt:

(4) $$g'(z) = mc_m(z - t_1)^{\lambda_1}(z - t_2)^{\lambda_2} \ldots (z - t_l)^{\lambda_l}$$

angeben, wobei die positiven ganzen Zahlen λ an die Bedingung:

(5) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = m - 1$$

gebunden sind. Die Werte der Funktion $g(z)$ in den l Punkten t_1, $t_2, \ldots, t_l$ mögen $e_1, e_2, \ldots, e_l$ sein; dieselben sind alle endlich, aber brauchen natürlich keineswegs durchweg voneinander verschieden zu sein.

Ist jetzt w_0 irgendein endlicher komplexer Wert, der fest gewählt ist, so ist auch $(g(z) - w_0)$ eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades. Hat dieselbe bei z_0 einen Nullpunkt von einer Ordnung $\mu > 1$, so hat daselbst $g'(z)$ einen Nullpunkt $(\mu - 1)^{ter}$ Ordnung, so daß z_0 einer der l Werte $t_1, t_2, \ldots, t_l$ ist und (da für diesen Wert $g(z)$ offenbar gleich w_0 wird) w_0 zu den Werten $e_1, e_2, \ldots, e_l$ gehört. Nehmen wir demnach w_0 zunächst als von diesen Werten e verschieden an, so wird $(g(z) - w_0)$ nur Nullpunkte erster Ordnung aufweisen und also an genau m verschiedenen Stellen des Feldes F verschwinden: *Die rationale ganze Funktion $g(z)$ vom m^{ten} Grade nimmt einen beliebigen, von den e_1, $e_2, \ldots, e_l$ verschiedenen, endlichen komplexen Wert w_0 in genau m verschiedenen Punkten des Feldes F an und soll dieserhalb als eine m-wertige Funktion im Felde F bezeichnet werden.*

Dieses Ergebnis wird in seiner vollen Bedeutung erst überblickt, wenn wir auf die allgemeinen Abbildungssätze von § 7 (S. 30 ff.) eingehen. Aus ihnen folgt: Die Umgebung einer beliebigen endlichen von den $t_1, t_2, \ldots, t_l$ verschiedenen Stelle z_0 wird durch die Funktion $w = g(z)$ auf einen schlichten Bereich um den Bildpunkt w_0 der w-Ebene konform abgebildet. Es treten aber folgende Unterbrechungen der Konformität der Abbildung auf: Erstlich wird die schlichte Um-

1) Im Falle $m = 1$ wird man die aufzustellenden Sätze leicht direkt bestätigen; übrigens kommen wir auf diesen Fall unten noch ausführlich zurück.

gebung der Stelle $z = \infty$ auf eine m-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte $w = \infty$ abgebildet, so daß die Winkel des Scheitelpunktes $z = \infty$ sich auf m-fach vergrößerte Winkel übertragen. Zweitens aber beachte man, daß im einzelnen Punkte t die Ableitung $g'(z)$ verschwindet, und daß $g^{(1+\lambda)}(z)$ die erste dortselbst nicht verschwindende Ableitung ist: Die schlichte Umgebung der einzelnen Stelle t wird durch die Funktion $w = g(z)$ auf eine Windungsfläche mit $\nu = 1 + \lambda$ Blättern und dem Verzweigungspunkte $e = g(t)$ abgebildet, so daß die Winkel des Scheitelpunktes t im Abbilde ν-fach vergrößert erscheinen.

Die ν Blätter der Windungsfläche hängen im Verzweigungspunkte e, der der Stelle t der z-Ebene entspricht, zusammen. Während demnach ein dicht bei e gelegener Wert w_0 noch ν getrennte übereinander liegende Punkte der Windungsfläche liefert und also in ν dicht bei t nebeneinander liegenden Punkten z als Funktionswert eintritt, werden diese ν Punkte z, sobald wir w_0 gleich e werden lassen, an der Stelle t zum Zusammenfall kommen. Wir sagen demnach, *daß an der Stelle t der z-Ebene ν dem Funktionswerte e entsprechende Punkte z zusammenfallen.* Übertragen wir diese Sprechweise auch auf den Punkt $z = \infty$ und den zugehörigen m-blättrigen Verzweigungspunkt $w = \infty$, so gilt der Satz, *daß irgendein komplexer Wert w_0 in genau m Punkten der z-Kugel von der Funktion $g(z)$ angenommen wird*, ausnahmslos.

Das durch die Funktion $w = g(z)$ gelieferte Abbild des gesamten Feldes F und damit das Feld F' der inversen Funktion $z = \varphi(w)$ ist in seiner Gestaltung nun zu überblicken. Dieses Feld F' bedeckt die w-Kugel überall m-blättrig, wobei jedoch an der Stelle ∞ alle m Blätter in dem daselbst gelegenen Verzweigungspunkte zusammenhängen und nach Art der Blätter einer Windungsfläche beim Umlauf um $z = \infty$ ineinander übergehen, während in entsprechender Weise im einzelnen der l im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt e_i gewisse $\nu_i = 1 + \lambda_i$ Blätter zusammenhängen und beim Umlauf von e_i ineinander übergehen. Mehrblättrige zusammenhängende Bereiche dieser Art hat Riemann[1]) allgemein zum Studium der algebraischen Funktionen (vgl. § 16) eingeführt. Man benennt dieserhalb den Bereich F' als eine *„Riemannsche Fläche“* und spricht in unserem Falle genauer von einer *„geschlossenen m-blättrigen Riemannschen Fläche mit* $(l + 1)$ *Verzweigungspunkten“*; die Fläche möge, damit in der Bezeichnung sogleich die Blätteranzahl m mit zum Ausdruck kommt, fortan durch das Symbol F_m bezeichnet werden.

1) In Abteilung I, Artikel 1 der Abhandlung „Theorie der Abelschen Funktionen“, Journ. f. Math., Bd. 54 (1857) oder Riemanns Werke, S. 95.



Es ist nun sehr wichtig, daß wir die Riemannsche Fläche F_m auch synthetisch aufbauen können. Man denke auf der z-Kugel die Stellen e und den Punkt ∞ markiert. Da die Werte $e_1, e_2, \ldots, e_l$ nicht voneinander verschieden sein müssen und übrigens $l \geqq 1$ gilt, so handelt es sich mindestens um 2, höchstens um $(l+1)$ markierte Punkte. Man ziehe nun etwa von e_1 aus durch die sämtlichen markierten Stellen e bis zum Punkte ∞ eine sich selbst nicht überkreuzende, reguläre Kurve und durchschneide die w-Kugel längs dieser Kurve. Die beiden Schnittränder unterscheiden wir mit Rücksicht auf die Durchlaufungsrichtung der Kurve von e_1 nach ∞ als rechtes und linkes Ufer des Schnittes. Die zwischen den einzelnen, aufeinanderfolgenden markierten Punkten verlaufenden Teile des Schnittes wollen wir der Reihe nach $S_1, S_2, \ldots$ nennen und jeden von ihnen als einen „Verzweigungsschnitt" bezeichnen. Die zerschnittene w-Kugel stellt einen „einfach zusammenhängenden" Bereich dar, der eine einzige von den beiden Schnittufern gelieferte Randkurve besitzt.

Von der so vorbereiteten w-Kugel wollen wir jetzt m Exemplare übereinander geschichtet denken, die also zunächst außer Zusammenhang sind. Es sei alsdann w_0 irgendein komplexer Wert, der jedoch weder einen Verzweigungspunkt noch einen sonstigen Punkt eines Verzweigungsschnittes liefert. Zu w_0 gehören m verschiedene Werte z_1, $z_2, \ldots, z_m$ unserer m-deutigen Funktion $z = \varphi(w)$, die wir uns in irgendeiner Reihenfolge auf die m Exemplare der w-Kugel bei w_0 verteilt und aufgetragen denken. Jetzt vollziehe man in jedem der m Blätter die analytische Fortsetzung unserer Funktion, beginnend mit dem aufgetragenen Werte $z_i = \varphi(w_0)$. Die m berandeten und je einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellenden Blätter tragen dann Funktionswerte, die wir durch die Bezeichnungen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \ldots, \varphi_m(w)$, den $z_1, z_2, \ldots, z_m$ entsprechend, unterscheiden. Dabei ist $\varphi_i(w)$ in ihrem Bereiche eine eindeutige Funktion; denn im Innern dieses Bereiches kommt kein singulärer Punkt der Funktion vor, und also muß die Fortsetzung über jede im Bereiche geschlossene Kurve nach einem S. 25 bewiesenen Satze zu den Anfangswerten der Funktion zurückführen.

Man fasse nun die Randwerte des ersten Funktionszweiges $\varphi_1(w)$ längs des rechten Ufers vom ersten Verzweigungsschnitte S_1 ins Auge, welche sich den Innenwerten stetig anschließen. In der unzerschnittenen w-Ebene setzen sich diese Funktionswerte über die „Kurve" S_1 hinweg stetig fort. Die Folge ist, daß die am rechten Ufer von S_1 stattfindenden Randwerte von $\varphi_1(w)$ auf dem gegenüberliegenden linken Ufer durch einen bestimmten unter den m Zweigen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \ldots, \varphi_m(w)$

erreicht werden müssen. Handelt es sich dabei um den Funktionszweig $\varphi_i(w)$, so wollen wir nunmehr das rechte Ufer von S_1 im ersten Blatte mit dem linken Ufer von S_1 im i^{ten} Blatte zusammenheften.

In derselben Weise fortfahrend heften wir auch die rechten Ufer von S_1 in den übrigen $(m-1)$ Blättern je an bestimmte linke Ufer von S_1 an und nehmen die gleiche Operation für alle übrigen Verzweigungsschnitte $S_2, S_3, \ldots$ vor. *So entsteht am Ende wieder unsere geschlossene m-blättrige Riemannsche Fläche F_m, in welcher die zunächst m-deutige Funktion $z = \varphi(w)$ nunmehr eine „eindeutige Funktion des Ortes" geworden ist.*

Die Riemannsche Fläche F_m ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung des Verlaufs der Funktion $\varphi(w)$ und des Zusammenhangs ihrer verschiedenen Zweige. Allerdings ist ein unmittelbares anschauliches Erfassen der gesamten Fläche nur bei besonders einfach gebauten Flächen möglich. In dieser Hinsicht ist nun sehr wichtig, daß wir im vorliegenden Falle den Zusammenhang der m Blätter von F_m dadurch einer zeichnerischen Darstellung noch unmittelbarer zugänglich machen können, daß wir F_m rückwärts auf die z-Ebene abbilden. *Die m „über"einander liegenden Blätter von F_m liefern dabei m „neben"einander gereihte je einfach zusammenhängende Bereiche, welche in ihrer Gesamtheit die z-Kugel überall schlicht und ohne Lücke überspannen.* Die Randkurven dieser Bereiche entsprechen den Ufern der Verzweigungschnitte; der einzelne Punkt $z = t_i$ ist rings von $2\nu_i$ oder (falls er von e_1 herrührt) von ν_i Bereichen umgeben, der Punkt $z = \infty$ von allen m Bereichen. Die Brauchbarkeit dieses Bildes für die Darstellung des Blätterzusammenhanges würde hier an einem Beispiele zu erläutern sein. Doch kommen wir auf den gleichen Gegenstand bei Besprechung der rationalen Funktionen zurück und werden dort ein für spätere Entwicklungen wichtiges Beispiel betrachten.

§ 11. Die ganzen transzendenten Funktionen. Exponentialfunktion und Logarithmus.

Einer weiteren Klasse ganzer Funktionen legen wir die folgende Erklärung zugrunde: *Eine Funktion, deren Feld die schlichte z-Ebene, abgesehen vom einen Punkte $z = \infty$, ist, und die im Endlichen überall analytisch ist, heißt eine „ganze transzendente" Funktion und soll wieder durch $w = g(z)$ bezeichnet werden.* Der einzige Randpunkt $z = \infty$ des Feldes F ist ein *wesentlich singulärer Punkt* der Funktion (vgl. S. 44), die in ihrem Felde durch eine beständig konvergente unendliche Reihe:

(1) $$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

darstellbar ist.

Die Beschaffenheit der Funktion in der Umgebung ihres wesentlich singulären Punktes wird durch folgende Betrachtung festgestellt. *Ist M ein „beliebig" groß gewählter positiver Betrag, so ist in jeder Umgebung des Punktes $z = \infty$ eine Stelle nachweisbar, in der der absolute Betrag $|g(z)|$ die Zahl M übertrifft.* Gäbe es nämlich einen Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt $z = 0$ der Art, daß für alle endlichen z mit $|z| > r$ die Ungleichung:

$$(2) \qquad |g(z)| \leqq M$$

zutrifft, so würde dieselbe insbesondere längs jedes Kreises K mit einem Radius R, der größer als r ist, zutreffen. Ist nun n irgendeine der Zahlen 1, 2, 3, ..., so findet man, indem man die längs K gleichmäßig konvergente Reihe (1) für $g(\zeta)$ durch ζ^{n+1} teilt und über K als Integrationsbahn gliedweise integriert (vgl. Note 1 S. 37):

$$\int\limits_{(K)} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 2 i \pi c_n.$$

Hiernach gilt mit Rücksicht auf die längs K gültige Ungleichung (2) offenbar:

$$|c_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(K)} \frac{M}{R^{n+1}} \cdot |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

Da M ausgewählt ist, aber R oberhalb des Betrages r noch beliebig wählbar ist, während c_n einen von der Auswahl des R unabhängigen konstanten Wert bedeutet, so kann zufolge der letzten Ungleichung c_n keinen von 0 verschiedenen Wert haben. Es würde also $g(z)$ mit der Konstanten c_0 identisch sein, womit sich unsere Behauptung bestätigt hat.

Nun gilt aber weiter: *Ist δ eine positive, von 0 verschiedene, aber beliebig klein gewählte Zahl, so kann man in jeder Umgebung der Stelle ∞ einen Punkt z angeben, in dem:*

$$|g(z)| < \delta$$

zutrifft. Beim Beweise dieser Behauptung müssen wir drei Fälle unterscheiden. Hat erstlich $g(z)$ unendlich viele Nullpunkte, so haben diese Nullpunkte auf der z-Kugel mindestens eine Häufungsstelle.[1]) Eine solche Häufungsstelle kann aber im Endlichen nirgends auftreten, da in ihr $g(z)$ sich nicht analytisch verhalten könnte. Mithin ist der Punkt ∞ die einzige Häufungsstelle der Nullpunkte, so daß in jeder Umgebung von ∞ ein Punkt angebbar ist, in welchem $g(z)$ gleich 0

1) Siehe das in der Note 2 S. 10 erwähnte und S. 25 ausgeübte Beweisverfahren nach der „Methode der Einschachtelung".

und also kleiner als δ ist. Hat zweitens $g(z)$ überhaupt keine Nullpunkte, so erkennt man in:

$$g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$$

sofort wieder eine ganze transzendente Funktion. Für diese ist in jeder Umgebung von ∞ ein Punkt z nachweisbar, in dem $|g_1(z)| > \delta^{-1}$ und also $|g(z)| < \delta$ zutrifft. Hat drittens $g(z)$ endlich viele Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ der Ordnungen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, so hat $(g(z))^{-1}$ ebendort Pole dieser Ordnungen und verhält sich übrigens im Endlichen allenthalben analytisch. Gilt für die Umgebung des Poles z_i die Entwicklung:

$$\frac{1}{g(z)} = c^{(i)}_{-m_i}(z-z_i)^{-m_i} + c^{(i)}_{-m_i+1}(z-z_i)^{-m_i+1} + \cdots + c^{(i)}_{-1}(z-z_i)^{-1} + c^{(i)}_0 + \cdots,$$

so erkennt man jetzt in:

$$g_1(z) = \frac{1}{g(z)} - \sum_{i=1}^{n}[c^{(i)}_{-m_i}(z-z_i)^{-m_i} + c^{(i)}_{-m_i+1}(z-z_i)^{-m_i+1} + \cdots + c^{(i)}_{-1}(z-z_i)^{-1}]$$

leicht eine ganze transzendente Funktion. Schreiben wir die hier rechts auftretende Summe in Abhängigkeit von z kurz $\sum(z)$, so gilt:

$$\frac{1}{g(z)} = g_1(z) + \sum(z),$$

woraus sich ergibt:

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| \geq |g_1(z)| - \left|\sum(z)\right|.$$

Nun hat $\sum(z)$ im Punkte ∞ den Grenzwert 0, so daß wir eine Umgebung von ∞ eingrenzen können, in welcher überall $|\sum(z)| < 1$ gilt. Daselbst kann man dann noch eine Stelle nachweisen, für welche $|g_1(z)| > 1 + \delta^{-1}$, also $|g(z)^{-1}| > \delta^{-1}$ und damit $|g(z)| < \delta$ wird.

Den beiden aufgestellten Sätzen kann man leicht noch eine etwas erweiterte Fassung geben. Hat man beim ersten Satze in einer Umgebung von ∞ eine Stelle z' nachgewiesen, für welche $|g(z')| > M$ zutrifft, so kann man durch $|z| > |z'|$ einen Bestandteil jener Umgebung erklären, in dem dann wiederum ein Punkt z'' nachweisbar ist, für welchen $|g(z'')| > M$ gleichfalls zutrifft. Indem wir so fortfahren, erkennen wir: *In jeder Umgebung von ∞ sind unbegrenzt viele Punkte nachweisbar, in denen $|g(z)| > M$ gilt, und ebenso natürlich unbegrenzt viele Punkte, in denen $|g(z)| < \delta$ zutrifft.*

Ist jetzt w_0 ein beliebiger endlicher komplexer Wert, der fest gewählt ist, so ist $(g(z) - w_0)$ wieder eine ganze transzendente Funktion. Es folgt sofort: *In jeder Umgebung des wesentlich singulären Punktes ∞ sind unbegrenzt viele Stellen z nachweisbar, in denen:*

$$|g(z) - w_0| < \delta$$

zutrifft, in denen also, wie man sagen kann, die Funktion $g(z)$ dem willkürlich ausgewählten Werte w_0 „beliebig“ nahe kommt. Der Satz gilt, wie wir schon wissen, in sinngemäßer Übertragung auch für den Wert $w_0 = \infty$.

Das eigentümliche hiermit festgestellte Verhalten einer ganzen transzendenten Funktion in der Umgebung ihrer wesentlich singulären Stelle soll nun an dem bekannten Beispiele der im Endlichen nirgends verschwindenden Funktion:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x\ (\cos y + i \sin y)$$

erläutert werden. Schreiben wir $w = u + iv$, so ergibt sich die durch die Exponentialfunktion e^z vermittelte konforme Abbildung sehr leicht aus:

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Man zeichne in der z-Ebene die unendlich vielen, zur reellen Achse parallelen, äquidistanten Geraden der Gleichungen:

$$y = 0, \quad y = \pm 2\pi, \quad y = \pm 4\pi, \quad y = \pm 6\pi, \cdots.$$

Sie zerlegen die z-Ebene in unendlich viele Bereiche, welche die Gestalt von Parallelstreifen haben; wir wollen dabei von den beiden berandenden Geraden immer nur die untere (die zu kleinerem y gehörende) als dem Bereiche zugehörig ansehen. Ist z_0 irgendein endlicher Wert, so haben wir in jedem unserer Streifen einen und nur einen mit z_0 „homologen“ Punkt. Wir gelangen zur Punktreihe:

$$z_0, \quad z_0 \pm 2i\pi, \quad z_0 \pm 4i\pi, \quad z_0 \pm 6i\pi, \cdots$$

und erkennen, daß alle diese Punkte einen und denselben Funktionswert w_0 tragen. Alle Werte, welche unsere Funktion $w = e^z$ überhaupt im Endlichen annimmt, treten demnach auch bereits in einem ersten Streifen, etwa dem durch $0 \leqq y < 2\pi$ charakterisierten, auf. Ist andererseits $w_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$, wo $0 \leqq \vartheta_0 < 2\pi$ gelte, irgendein von 0 und ∞ verschiedener komplexer Wert, so finden wir, daß dieser Funktionswert an der Stelle:

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \log r_0 + i\vartheta_0$$

jenes ersten Streifens, aber auch nur an dieser Stelle, wirklich eintritt. Dem wesentlich singulären Punkte $z = \infty$ können wir uns im Streifen sowohl nach links wie nach rechts hin annähern: *Die Funktion w hat bei diesen Annäherungen bestimmte Grenzwerte, nämlich 0 und ∞.*[1]) Wir haben damit folgenden Satz festgestellt: *Der gesamte „endliche“ Parallel-*

---

1) Wir merken noch an: Nähern wir uns der wesentlich singulären Stelle $z = \infty$ mittels einer nicht zur y-Achse parallelen Geraden an, so tritt stets ein Grenzwert w ein, nämlich entweder 0 oder ∞. Bei Annäherung parallel zur y-Achse aber hat unsere Funktion keinen Grenzwert.

streifen wird durch die Funktion $w = e^z$ konform auf die schlichte w-Ebene, abgesehen von den beiden Punkten $w = 0$ und $w = \infty$, abgebildet; diese beiden Punkte sind für die inverse Funktion $z = \log w$ wesentlich singulär. Man mache sich die Beschaffenheit dieser Abbildung im einzelnen anschaulich, indem man die Parallelen zur x-Achse auf die Geraden, welche von $w = 0$ ausstrahlen, und die den Streifen durchziehenden Parallelen zur y-Achse auf die konzentrischen Kreise um $w = 0$ überträgt.

Die Abbildung der gesamten endlichen z-Ebene, d. i. des Feldes F unserer Funktion, auf die w-Ebene ist nun unmittelbar ersichtlich: *Das Feld der inversen Funktion $z = \log w$ ist eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche F_∞ mit den beiden ∞-blättrigen Verzweigungspunkten $w = 0$ und $w = \infty$, die als wesentlich singuläre Stellen von $\log w$ dem Felde F_∞ nicht zugehören.* Beim synthetischen Aufbau dieser F_∞ hat man die w-Ebene im Anschluß an die obige Streifenteilung der z-Ebene längs der positiven reellen w-Achse mit einem von 0 nach ∞ ziehenden „Verzweigungsschnitt" S zu versehen und Exemplare der so vorbereiteten w-Ebene sowohl nach oben als unten hin in unendlicher Zahl übereinander zu schichten. Sodann hat man jedes rechte Schnittufer an das linke des nächst darüber folgenden Blattes zu heften, wodurch die F_∞ gewonnen wird.

Der Zusammenhang der Blätter wird auch hier, wie bei der am Schluß von § 10 (S. 49) betrachteten Fläche, am übersichtlichsten durch die Übertragung der F_∞ auf die schlichte, endliche z-Ebene dargestellt, wo ja jeder einzelne Parallelstreifen das konforme Abbild eines bestimmten Blattes der F_∞ ist.

Insbesondere aber können wir mittelst dieses Abbildes der F_∞ das Verhalten der Funktion $w = e^z$ in der Umgebung des wesentlich singulären Punktes ∞ veranschaulichen. Es ist zu diesem Zwecke entweder die z-Kugel heranzuziehen, auf welcher die den Geraden $y = 2n\pi$ entsprechenden Kreise nach (7) S. 23 durch die Ebenen der Gleichungen:

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad \zeta - \frac{1}{2n\pi}\eta + 1 = 0, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

ausgeschnitten werden, oder man muß mittelst der Transformation (2) S. 21 die Umgebung von $z = \infty$ auf diejenige von $z' = 0$ in einer neuen z'-Ebene abbilden. Benutzen wir etwa die letzte Methode, so übertragen sich die Geraden $y = 2n\pi$ auf die Kreise:

$$y' = 0 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2n\pi}y' = 0, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

Die Einteilung der z'-Ebene durch diese Kreise ist in Fig. 9 (S. 54) angedeutet. Unter ihnen findet sich insbesondere die x'-Achse, und alle

übrigen Kreise berühren die x'-Achse im Nullpunkte, wobei der Nullpunkt in der Art eine Häufungsstelle der Kreise ist, daß sich in jeder Umgebung desselben sowohl oberhalb als unterhalb der x'-Achse unendlich viele Kreise finden.

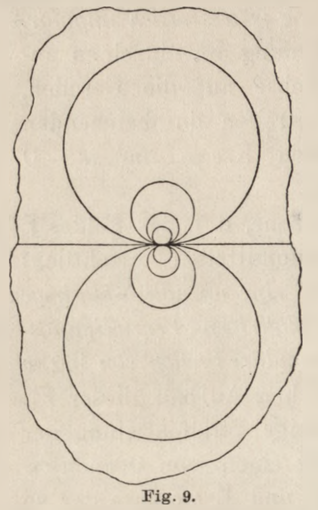


Fig. 9.

Je zwei benachbarte Kreise schließen nun einen sichelförmig gestalteten Bereich ein, der sich an den wesentlich singulären Punkt $z' = 0$ mit zwei Spitzen tangential zur x'-Achse beiderseits heranzieht. Die Spitzen, d. i. der Punkt $z' = 0$, sollen der Sichel nicht zugerechnet werden; auch sehen wir nur den einen berandenden Kreis als zur Sichel gehörig an. Dann ist die Sichel gerade genau ein eindeutiges Abbild der gesamten w-Ebene, abgesehen von den beiden Punkten $w = 0$ und $w = \infty$. Die Häufung der Sicheln gegen den Punkt $z' = 0$ hin veranschaulicht nun unmittelbar folgenden Satz: *Ist w_0 ein beliebiger von 0 und ∞ verschiedener komplexer Wert, so gibt es in jeder Umgebung von $z' = 0$ noch unendlich viele Punkte, in denen unsere Funktion w den Wert w_0 annimmt.* Die Werte 0 und ∞ sind die Grenzwerte von w in den beiden Spitzen der einzelnen Sichel. Da $z' = 0$ einen nicht zur Sichel gehörenden Punkt darstellt, so können wir zwar in jeder Umgebung von $z' = 0$ in der Sichel Punkte nachweisen, in denen w dem Werte 0 bzw. ∞ *beliebig nahe* kommt; *aber allerdings wird keiner dieser beiden Werte innerhalb der* Sichel wirklich erreicht.[1])

Wir schließen noch folgende gleich zur Anwendung kommende Betrachtung hier an: In der endlichen z-Ebene sei eine im Punkte z_0 beginnende und ebenda endigende, also geschlossene Kurve C gezeichnet, die sich übrigens sehr wohl auch beliebig oft selbst überkreuzen darf. Ihr entspricht in der endlichen w-Ebene eine von $w_0 = e^{z_0}$ ausziehende gleichfalls geschlossene Kurve C', *die „nicht" durch den Nullpunkt $w = 0$ hindurchzieht.* Wir können C stetig und ohne Zerreißen in der endlichen z-Ebene unter Festhaltung des Punktes z_0 auf diesen Punkt zusammenziehen. Dem steht eine entsprechende Zusammenziehung von C' auf den Punkt w_0 gegenüber, ohne *daß bei dieser Zusammenziehung C' über*

1) Eine ganze transzendente Funktion $g(z)$ nimmt in keinem Punkte ihres Feldes **F** den Wert ∞ an. Nach einem von E. Picard entdeckten Satze kann es höchstens noch *einen* weiteren Wert w_0 geben, der von $g(z)$ in keinem Punkte des Feldes angenommen wird. Bei der Exponentialfunktion liegt in der Tat ein solcher Wert vor, nämlich $w_0 = 0$. Siehe übrigens betreffs des Picardschen Satzes „Osgood", S. 707.

den Nullpunkt $w = 0$ hinweggeschoben würde oder auch nur den Nullpunkt erreichte.

Zeichnet man andererseits in der endlichen w-Ebene von einer von 0 verschiedenen Stelle w_0 aus irgendeine geschlossene, also in w_0 endigende Kurve C', welche durch den Nullpunkt $w = 0$ nicht hindurchläuft, und wählen wir unter den unendlich vielen korrespondierenden Punkten $z_0 = \log w_0$ irgendeinen bestimmten aus, so überträgt sich C' auf eine in der endlichen z-Ebene liegende Kurve C, welche in z_0 beginnt und einem homologen Punkte $(z_0 + 2ni\pi)$ endigt. Ist nun C' unter Festhaltung von w_0 auf diesen Punkt zusammenziehbar[1]), *ohne dabei über den Nullpunkt hinweggezogen zu werden, oder auch nur diesen Punkt zu erreichen*, so entspricht dem eine in der endlichen z-Ebene vor sich gehende stetige Abänderung von C bei Festbleiben des Anfangs- und des Endpunktes von C in der Art, daß C schließlich gleichfalls auf einen Punkt, nämlich z_0 zusammenschrumpft: *Also ist der Endpunkt $(z_0 + 2ni\pi)$ mit dem Anfangspunkte identisch, d. h. auch C ist eine „geschlossene" Kurve.*

Mit Hilfe dieser Betrachtung gelingt es leicht folgenden Satz zu zeigen: *Ist $g(z)$ irgendeine (nicht mit einer Konstanten identische) rationale oder transzendente ganze Funktion, so ist:*

$$g_0(z) = e^{g(z)} \tag{3}$$

eine ganze transzendente Funktion ohne Nullpunkte, und umgekehrt ist jede ganze transzendente Funktion $g_0(z)$ „ohne Nullpunkte" in der Gestalt (3) *mittelst einer ganzen Funktion $g(z)$ darstellbar.*

Der erste Teil dieses Satzes ist einleuchtend, da $g_0(z)$ für alle endlichen z eindeutig und analytisch ist, nicht mit einer Konstanten identisch ist und für kein endliches z verschwindet. Um die Umkehrung zu zeigen, bilde man von der Funktion $w = g_0(z)$ den Logarithmus:

$$z' = \log w = \log g_0(z)$$

und ordne irgendeinem ersten z_0, dem $w_0 = g_0(z_0)$ als von 0 verschiedener endlicher Wert eindeutig zugehört, unter den unendlich vielen entsprechenden Werten z' irgendeinen bestimmten z'_0 zu. Eine beliebige von z_0 ausziehende geschlossene Kurve C in der endlichen z-Ebene liefert in der w-Ebene von w_0 aus eine gleichfalls geschlossene Kurve C', die nicht durch $w = 0$ hindurchläuft. Zieht man C auf den Punkt z_0 zusammen, so schrumpft entsprechend C' auf den Punkt w_0 zusammen, ohne daß hierbei C' über den Nullpunkt $w = 0$ hinweggeschoben würde oder auch nur diesen Punkt erreichte; denn kein endliches z liefert den Funktionswert $w = 0$. Zufolge der vorausgeschickten Betrachtung über-

1) Solche Deformationen von Kurven sollen, ohne daß dies jedes Mal hervorgehoben wird, immer stetig und ohne Zerreißen ausgeführt werden.

trägt sich demnach C' auf eine von z'_0 ausziehende „geschlossene" Kurve der Ebene von z'. Bei Fortsetzung längs irgendeines geschlossenen Weges C in der endlichen z-Ebene wird demnach die im Punkte z_0 eindeutig erklärte Funktion $z' = \log g_0(z)$ *stets* wieder zum Anfangswerte zurückkehren. Die Fortsetzung liefert demnach eine in der ganzen endlichen z-Ebene *eindeutige* und selbstverständlich analytische Funktion, d. h. eine Funktion $g(z)$, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 12. Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen.

Die in Gleichung (3) S. 46 bewerkstelligte Produktzerlegung einer ganzen rationalen Funktion ist auf Grund einer von Weierstrass[1]) ausgebildeten Theorie auf ganze transzendente Funktionen $g(z)$ übertragbar.

Hat erstlich $g(z)$ im Nullpunkte $z = 0$ selber einen Nullpunkt der Ordnung $\varkappa$, so soll dieser vorweg besonders behandelt werden. Man erkennt in diesem Falle in $z^{-\varkappa} \cdot g(z)$ sofort eine ganze transzendente Funktion, die für $z = 0$ nicht verschwindet, im übrigen aber alle Nullpunkte mit $g(z)$ gemein hat. Man betrachte demnach weiter die nicht bei $z = 0$ gelegenen Nullpunkte von $g(z)$, sofern solche vorkommen.

Ist z_1 irgendein von 0 verschiedener endlicher Wert, so ist in:

$$(1) \qquad \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdot e^{g_1(z)},$$

wobei $g_1(z)$ irgendeine ganze (rationale oder transzendente) Funktion ist, eine ganze Funktion dargestellt, die nur einen, bei z_1 gelegenen, Nullpunkt erster Ordnung hat; und zugleich ist nach dem Schlußtheorem von § 11 jede ganze (rationale oder transzendente) Funktion, welche z_1 als einzigen Nullpunkt, und zwar von der ersten Ordnung, hat, in der Gestalt (1) darstellbar. Eine solche Funktion (1) heißt nach Weierstrass eine „*Primfunktion*".

Es erledigt sich nun zunächst der Fall, *daß* $g(z)$ *nur endlich viele Nullstellen hat*, sehr leicht. Die nicht bei $z = 0$ gelegenen Nullpunkte seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$, wobei wir (was für die Schreibweise der Formeln eine Erleichterung sein wird) in dieser Reihe jeden Nullpunkt höherer Ordnung so oft hintereinander aufführen wollen, als seine Ordnung angibt. Ist $z = 0$ ein Nullpunkt der Ordnung $\varkappa$ von $g(z)$, so wird $z^{-\varkappa} \cdot g(z)$ in derselben Weise wie das Primfunktionenprodukt:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{g_k(z)}$$

1) in der Arbeit „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen" Abh. der Berl. Akad. von 1876 oder Weierstrass' Werke, Bd. 2, S. 77. S. auch „Osgood", S. 535.

verschwinden, so daß der Quotient von $z^{-\varkappa} \cdot g(z)$ und diesem Produkte eine ganze Funktion ohne Nullpunkte darstellt, die sich nach § 11 als Exponentialfunktion einer ganzen Funktion $g_0(z)$ ausdrücken läßt. *Jede ganze Funktion $g(z)$ mit endlich vielen Nullstellen ist hiernach als Produkt:*

(2)
$$g(z) = e^{g_0(z)} z^{\varkappa} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)}$$

darstellbar.[1]) Für die ganzen rationalen Funktionen ordnet sich dieser Gleichung die Darstellung (3) S. 46 unter.

Eine Hauptleistung von *Weierstrass* besteht nun in der Übertragung der Darstellung (2) auf den Fall, daß $g(z)$ unendlich viele Nullpunkte hat, wobei die ganzen Funktionen $g_k(z)$ derart auszuwählen sein würden, daß das entsprechend für $n = \infty$ gebildete Produkt (2) konvergiert. Dies erreicht man in gewissen, noch näher zu bezeichnenden Fällen dadurch, *daß man $g_k(z)$ mit folgender ganzen rationalen Funktion gleichsetzt:*

$$g_k(z) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_k}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{z_k}\right)^h,$$

deren Grad h eine bestimmte endliche von k unabhängige Zahl sein soll. Wir wollen hierbei die Möglichkeit, *daß $g_k(z)$ identisch verschwindet, mit $h = 0$* eingeschlossen denken. Die außerhalb $z = 0$ gelegenen Nullpunkte bilden jetzt eine unendliche Reihe $z_1, z_2, z_3, \ldots$, in der wir wieder jeden Nullpunkt in einer seiner Ordnung entsprechenden Anzahl von Malen aufgeführt denken. Setzen wir $|z_k| = r_k$, so dürfen wir die Anordnung so getroffen annehmen, daß stets:

$$r_k \geqq r_{k-1}$$

gilt. Die Nullpunkte haben als einzige Häufungsstelle den wesentlich singulären Punkt ∞ unserer Funktion $g(z)$, d. h. es ist:

$$\lim_{k=\infty} r_k = \infty.$$

Ist demnach r irgendeine bestimmte endliche positive Zahl, so gibt es einen zugehörigen endlichen Index m derart, daß:

(3)
$$r_k > r \quad \text{für alle} \quad k \geqq m$$

zutrifft.

Es sei nun **T** irgendein *endlicher* Bereich der schlichten z-Ebene. Man wähle dann eine endliche Zahl r so, daß der Kreis des Radius r um den Nullpunkt der z-Ebene den Bereich **T** einschließt und seinem Rande nirgends nahekommt. Es wird demnach eine bestimmte zwischen

1) Der Fall, daß $g(z)$ im Nullpunkte nicht verschwindet, ist natürlich mit $\varkappa = 0$ eingeschlossen.

0 und 1 gelegene Zahl q angegeben werden können, so daß für alle Punkte z des Bereiches T die Bedingung:

$$\frac{|z|}{r} < q < 1$$

und also um so mehr:

$$\frac{|z|}{r_k} < q < 1 \quad \text{für alle } k \geqq m$$

gilt, unter m den schon in (3) benutzten Index verstanden.

Es wird nun zunächst der Ausdruck:

$$z^\alpha \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{g_k(z)}, \tag{4}$$

der sicher eine ganze Funktion darstellt, alle innerhalb und auf der Peripherie des Kreises vom Radius r um den Nullpunkt $z = 0$ gelegenen Nullpunkte der vorgelegten ganzen Funktion $g(z)$ erschöpfen.

Für jeden endlichen Index $n > m$ gilt andererseits:

$$\prod_{k=m}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)} = e^{\sum\limits_{k=m}^{n}\left(\log\left(1-\frac{z}{z_k}\right)+g_k(z)\right)}, \tag{5}$$

wobei die rechts im Exponenten auftretende Funktion $\log\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$ für jedes $k \geqq m$ zufolge (3) eine in T eindeutige Funktion von z ist, welche wir als Summe der in T konvergenten Reihe:

$$\log\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) = -\frac{z}{z_k} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_k}\right)^3 - \cdots$$

erklären können. Die Frage ist nun, ob in (5) auch $n = \infty$ werden darf, ohne daß dieser Ausdruck aufhört, in T eine analytische Funktion von z darzustellen.

Um hierüber zu entscheiden, schätze man das einzelne Glied der in (5) rechter Hand im Exponenten stehenden Reihe auf seinen absoluten Betrag ab. Aus der für $g_k(z)$ vorgeschriebenen Gestalt folgt:

$$\log\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z) = -\sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{z}{z_k}\right)^l = -\left(\frac{z}{z_k}\right)^{h+1} \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{l-h-1}$$

und also, da $l \geqq 1$ ist, mit Rücksicht auf die oben für $|z|$ und r_k vorausgesandten Ungleichungen:

$$\left|\log\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z)\right| < \frac{r^{h+1}}{1-q} \cdot \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}.$$

Wenn demnach die absoluten Beträge r_k der Nullstellen z_k die Bedingung erfüllen, daß die unendliche Reihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}$$

oder (was auf dasselbe hinauskommt) die Reihe:

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}$$

konvergiert, so wird die in (5) rechts im Exponenten stehende Reihe für $n = \infty$ absolut und also unbedingt (d. i. unabhängig von der Anordnung der Glieder) sowie gleichmäßig (nämlich für alle in **T** gelegenen z) konvergieren.

Differenzieren wir nun die Reihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\log\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z)\right)$$

gliedweise, so folgt als „abgeleitete Reihe“:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \cdots + \frac{z^{h-1}}{z_k^h}\right).$$

Auch diese Reihe konvergiert, wie mittels desselben Abschätzungsverfahrens bewiesen wird, in **T** unbedingt und gleichmäßig. Also zeigt die schon S. 13ff. benutzte Schlußweise, daß durch die letzte Reihe in **T** die Ableitung der durch die vorletzte Reihe daselbst dargestellten stetigen Funktion geliefert wird. Diese Reihe und demnach auch ihre Exponentialfunktion, d. i. das unendliche Produkt:

$$\prod_{k=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)}$$

stellen hiernach *unter Voraussetzung der Konvergenz der unendlichen Reihe* (6) eine in **T** überall analytische Funktion dar.

Indem wir dieselbe mit dem Produkte (4) multiplizieren, ergibt sich weiter, *daß das unendliche Produkt:*

$$z^{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)}$$

unabhängig von der Anordnung der Faktoren eine im Bereiche **T**, *d. h. also in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene, eindeutige und daselbst überall analytische Funktion von z darstellt.*

Wir haben damit eine ganze transzendente Funktion gewonnen, welche genau dieselben Nullpunkte wie $g(z)$ hat. Nach dem Schlußtheorem von § 11 unterscheiden sich demnach diese beiden Funktionen nur um einen Exponentialfaktor $e^{g_0(z)}$. Wir haben also folgenden grundlegenden Satz gewonnen: *Kann man eine endliche, nicht-negative ganze Zahl h angeben, so daß die absoluten Beträge r_k der unendlich vielen*

Nullpunkte $z_1, z_2, \ldots$ der ganzen Funktion $g(z)$ eine „konvergente" Reihe (6) liefern, so gestattet die Funktion $g(z)$ die Darstellung in Gestalt des unendlichen Produktes:

$$(7)\qquad g(z) = e^{g_0(z)} z^{\varkappa} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)},$$

welches in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene unabhängig von der Anordnung der Faktoren konvergiert und den Funktionswert $g(z)$ liefert.

Die (für die künftige Verwendung statthafte) Beschränkung liegt hiernach darin, daß wir die Existenz einer bestimmten endlichen ganzen Zahl h voraussetzen, für welche die Reihe (6) konvergiert. Im übrigen werden wir h so klein als möglich wählen, d. h. falls $h > 0$ ist, soll nicht schon für die um eine Einheit verkleinerte Zahl h die Konvergenz der Reihe (6) zutreffen. Die so bestimmte ganze Zahl h nennt man die *„Höhe"* der ganzen transzendenten Funktion $g(z)$, vorausgesetzt, daß $g_0(z)$ eine „rationale" ganze Funktion ist, deren Grad h' die Zahl h nicht übertrifft. Ist $g_0(z)$ zwar rational, aber von einem Grade $h' > h$, so nennt man h' die *„Höhe"* von $g(z)$.

Die Funktion $\log g(z)$ ist unendlich vieldeutig und hat in jedem Nullpunkte von $g(z)$ einen wesentlich singulären Punkt. Dagegen ist die Ableitung von $\log g(z)$ wieder eindeutig und abgesehen von unendlich vielen in den Nullpunkten von $g(z)$ liegenden Polen erster Ordnung im Endlichen überall analytisch. *Es gilt die folgende Darstellung:*

$$(8)\qquad \frac{d \log g(z)}{dz} = g_0'(z) + \frac{\varkappa}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \cdots + \frac{z^{h-1}}{z_k^h}\right)$$

als „Partialbruchentwicklung" der links stehenden Funktion, wobei die unendliche Reihe, abgesehen davon, daß in den Punkten $z_1, z_2, \ldots$ jeweils einzelne Glieder der Reihe Pole besitzen, in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Dies ist bereits durch die obige Konvergenzbetrachtung mit bewiesen. Übrigens sind dieselben Hilfsmittel mit dem gleichen Erfolge auch beim Beweise der nachfolgenden weiteren Darstellungen anwendbar:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \log g(z)}{dz^2} = g_0''(z) - \dfrac{\varkappa}{z^2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} - \frac{2z}{z_k^3} - \cdots - \frac{(h-1) z^{h-2}}{z_k^h}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dabei gilt, um es nochmals zu betonen, die Konvergenz der Reihe (6) stets als Voraussetzung.

§ 13. Die rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen.

Die ganzen rationalen Funktionen gehören als eine besondere Art der Klasse der „rationalen Funktionen" an, welche wir in folgender Art zu erklären haben: *Eine Funktion, deren Feld die schlichte und vollständige z-Kugel ist, heißt eine „rationale Funktion" und werde mit der besonderen Bezeichnung $R(z)$ belegt.*

Eine solche Funktion $R(z)$ hat an singulären Punkten nur Pole, und zwar kann $R(z)$ nur endlich viele Pole haben, da ja sonst mindestens eine Häufungsstelle der Pole eintreten würde, in der $R(z)$ entgegen der Annahme sich nicht analytisch verhalten könnte. Mögen im Endlichen insgesamt n Pole auftreten, nämlich bei $z = s_1, s_2, \ldots, s_n$; dabei sei m_i die Ordnung des Poles s_i. Die Funktion $R(z)$ gestattet dann in der Umgebung von s_i die Darstellung:

$$R(z) = \frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-s_i} + c_0^{(i)} + c_1^{(i)}(z-s_i) + \cdots.$$

Hieraus geht hervor, daß die Differenz:

$$R(z) - \frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i}} - \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i-1}} - \cdots - \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-s_i}$$

im Punkte s_i endlich und analytisch bleibt; dabei stellt sie wieder eine rationale Funktion dar, welche die übrigen Pole von $R(z)$ in den bisherigen Ordnungen, aber keine weiteren Pole besitzt. Indem man entsprechende Aggregate für die übrigen im Endlichen liegenden Pole abzieht, gewinnt man schließlich in:

$$R(z) - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-s_i}\right]$$

eine Funktion, die im Endlichen keine singulären Punkte mehr hat, mithin eine *ganze* rationale Funktion (vgl. S. 44) darstellt. Wir wollen den Grad dieser ganzen Funktion m_0 nennen, wobei wir auch die Möglichkeit $m_0 = 0$ zulassen, wenn nämlich die ganze Funktion mit einer Konstanten identisch ist, wenn also $R(z)$ bei $z = \infty$ keinen Pol hat. Setzen wir für die ganze Funktion ihren Ausdruck (6) S. 44 an, *so ergibt sich für die rationale Funktion $R(z)$ eine Darstellung in Gestalt der „Partialbruchentwicklung":*

$$(1)\quad R(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{m_0} z^{m_0} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z-s_i)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-s_i}\right].$$

Verstehen wir unter $g_1(z)$ die nachfolgende ganze Funktion:

$$g_1(z) = (z-s_1)^{m_1}(z-s_2)^{m_2} \cdots (z-s_n)^{m_n},$$

so wird das Produkt $R(z) \cdot g_1(z)$ eine rationale *ganze* Funktion, die durch $g_0(z)$ bezeichnet werde. Es folgt hieraus für die rationale Funktion $R(z)$ eine *Darstellung als Quotient zweier „ganzer" rationaler Funktionen:*

$$R(z) = \frac{g_0(z)}{g_1(z)}. \tag{2}$$

Die Summe der Ordnungen aller Pole von $R(z)$ heiße m:

$$m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$$

und werde *der „Grad" der rationalen Funktion* $R(z)$ genannt. Da das Feld der Funktion $R(z)$ die schlichte und vollständige z-Kugel ist, so können wir den Schlußsatz von § 8, S. 39, wieder genau in derselben Art auf $R(z)$ anwenden, wie dies bei den ganzen rationalen Funktionen S. 45 geschah. Die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte von $R(z)$ ist wieder gleich m. Ist aber w_0 ein beliebiger endlicher Wert, so hat $(R(z) - w_0)$ als rationale Funktion dieselben Pole wie $R(z)$ in den gleichen Ordnungen. Also ist auch die Summe der Ordnungen der Nullpunkte von $(R(z) - w_0)$ wieder gleich m. Wir können dies Ergebnis genau wie bei den ganzen Funktionen in die Gestalt kleiden: *Die rationale Funktion $R(z)$ vom m^{ten} Grade heißt auf der z-Kugel m-wertig, insofern sie irgendeinen komplexen Wert w_0, den Wert ∞ nicht ausgeschlossen, stets in m Punkten der z-Kugel annimmt, auch hier unter dem Vorbehalte, daß diese m Punkte keineswegs durchweg voneinander verschieden zu sein brauchen.*

Was die letztere Möglichkeit von Koinzidenzen unter den m Punkten mit gegebenem w_0 angeht, so gelangen wir hier wieder zu ähnlichen Ergebnissen wie bei den ganzen rationalen Funktionen.[1]) Ist w_0 zunächst ein beliebiger *endlicher* komplexer Wert, der in einem ersten, gleichfalls endlichen Punkte z_0 stattfinde, so wird, falls $R'(z_0)$ nicht verschwindet, die Umgebung von z_0 durch unsere Funktion $w = R(z)$ auf einen schlichten Bereich um w_0 abgebildet. Ist indessen $R'(z_0) = 0$, und ist, wie wir gleich annehmen, $R^{(\nu)}(z_0)$ die Ableitung niederster Ordnung, welche in z_0 nicht verschwindet, so wird die schlichte Umgebung von z_0 auf eine ν-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 abgebildet. Genau wie S. 47 erkennen wir, *daß von den m Stellen der z-Kugel, welche den Funktionswert w_0 tragen, ν Stellen bei z_0 koinzidieren.*

Die erste Ableitung $R'(z)$ hat im zuletzt betrachteten Falle bei z_0

1) Die nächstfolgende Betrachtung setzt wieder $m > 1$ voraus; jedoch wird man im niedersten Falle $m = 1$ den aufzustellenden Satz über die Abbildung der z-Kugel mittelst der Funktion $w = R(z)$ leicht direkt bestätigen. Übrigens kommen wir auf den Fall $m = 1$ im § 14 ausführlich zurück.

einen Nullpunkt der Ordnung $(\nu-1)$. Da $g_1(z_0)$ nicht verschwindet[1]), so folgt auf Grund der Darstellung (2) unserer Funktion, daß z_0 eine $(\nu-1)$-fache Wurzel der Gleichung:

$$(3) \qquad g_1(z)\,g_0'(z) - g_1'(z)\,g_0(z) = 0$$

ist. Auch umgekehrt liefert eine $(\nu-1)$-fache Wurzel z_0 dieser algebraischen Gleichung, welche von den besonderen Werten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ verschieden ist, immer eine Stelle z_0 betrachteter Art, deren schlichte Umgebung sich also auf eine Windungsfläche um $w_0 = R(z_0)$ überträgt.

Aber auch die n Pole s_i ordnen sich hier leicht ein. Ist nämlich die Ordnung m_i des einzelnen Poles s_i gleich 1, so ist s_i keine Lösung der Gleichung (3), und es wird die schlichte Umgebung von s_i auf einen gleichfalls schlichten Bereich um den Bildpunkt ∞ übertragen. Ist aber $m_i > 1$, so wird die Umgebung von s_i auf eine (m_i-1)-blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte ∞ abgebildet, und hierfür ist eben wieder charakteristisch, daß die Gleichung (3) die (m_i-1)-fache Wurzel s_i hat.

Schließlich wird auch die Stelle $z=\infty$ leicht erledigt. Liegt hierselbst ein Pol der Ordnung $m_0 = 1$ oder ist $R(\infty)$ gleich dem endlichen Werte c_0, jedoch so, daß $(R(z)-c_0)$ bei $z=\infty$ einen *einfachen* Nullpunkt hat, so liefert die Umgebung von $z=\infty$ ein schlichtes Abbild um den Bildpunkt. Im ersten Falle ist $g_0(z)$ vom Grade m und $g_1(z)$ vom Grade $(m-1)$; im zweiten Falle aber ist $(g_0(z)-c_0 g_1(z))$ vom Grade $(m-1)$ und $g_1(z)$ vom Grade m. Für beide Fälle ist charakteristisch, daß die Gleichung (3) den Grad $(2m-2)$ aufweist. Liegt aber bei $z=\infty$ ein Pol der Ordnung $\nu = m_0 > 1$, oder hat daselbst $(R(z)-c_0)$ einen Nullpunkt der Ordnung $\nu > 1$, so gewinnen wir als Abbild der schlichten Umgebung von $z=\infty$ eine ν-blättrige Windungsfläche. In beiden Fällen aber stellt man leicht $(2m-\nu-1)$ als Grad der Gleichung (3) fest. *Der Gleichmäßigkeit wegen werden wir sie auch in diesem Falle als eine Gleichung* $(2m-2)^{\text{ten}}$ *Grades auffassen, welche neben* $(2m-\nu-1)$ *endlichen Lösungen noch die* $(\nu-1)$*-fache Lösung* ∞ *hat.*

Hiermit sind zugleich alle Vorbereitungen getroffen, um das Gesamtbild der z-Kugel über der w-Kugel und damit das Feld der zu $w = R(z)$ inversen Funktion $z = \varphi(w)$ zu übersehen. Werden wieder (wie S. 46) die unterschiedenen Lösungen der Gleichung $(2m-2)^{\text{ten}}$ Grades (3) mit $t_1, t_2, \ldots, t_l$ bezeichnet und ist t_i eine λ_i-fache Wurzel, so bildet sich die schlichte Umgebung von t_i auf eine Windungsfläche mit der Blätteranzahl $\nu_i = \lambda_i + 1$ und dem Verzweigungspunkt

---

1) Der Wert w_0 war als *endlich* vorausgesetzt.

$e_i = R(t_i)$ ab. Die Umgebung jedes anderen Punktes z_0 aber liefert wieder ein schlichtes Abbild um den Bildpunkt w_0. Wir gelangen also zu dem Ergebnisse: *Das durch die Funktion $w = R(z)$ gelieferte Abbild der z-Kugel und damit das Feld der inversen Funktion $z = \varphi(w)$ ist eine zusammenhängende, geschlossene, m-blättrige Riemannsche Fläche F_m über der w-Kugel mit den l Verzweigungspunkten $e_1, e_2, \ldots, e_l$; im Verzweigungspunkte e_i hängen dabei $\nu_i = \lambda_i + 1$ Blätter zusammen und gehen beim Umlauf um diesen Punkt, wie es die zugehörige Windungsfläche zeigt, ineinander über.* Die Abbildung ist im allgemeinen eine konforme; nur tritt eine Unterbrechung der Konformität in bekannter Weise (vgl. S. 35) in jedem der Verzweigungspunkte ein. Da $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ gleich dem Grade $(2m - 2)$ der algebraischen Gleichung (3) ist, so besteht zwischen der Gesamtzahl m der Blätter und den Anzahlen ν der in den einzelnen Verzweigungspunkten zusammenhängenden Blätter die Relation:

$$0 = -m + 1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{\nu_i - 1}{2} \tag{4}$$

Auch hier ist ein synthetischer Aufbau der Riemannschen Fläche F_m genau in derselben Weise durchführbar, wie derselbe S. 48 ausführlich für den Fall einer ganzen rationalen Funktion beschrieben wurde. Ebenso ist die Anordnung und der Zusammenhang der Blätter wieder in besonders anschaulicher Weise dadurch darstellbar, daß man F_m rückwärts auf die z-Kugel abbildet, wo die m übereinander geordneten Blätter m nebeneinander gelagerte Bereiche ergeben, die die z-Kugel gerade schlicht und vollständig bedecken.

Wir erläutern diese Maßregel an der späterhin noch näher zu betrachtenden Funktion sechsten Grades:

$$w = \frac{4(z^2 - z + 1)^3}{27 z^2 (1 - z)^2},$$

die wir auch durch die Proportion geben können:

$$w : (w - 1) : 1 = 4(z^2 - z + 1)^3 : (2z^3 - 3z^2 - 3z + 2)^2 : 27 z^2 (1 - z)^2. \tag{5}$$

Die zugehörige Gleichung (3) hat, wie man leicht ausrechnet, je eine Doppelwurzel an den beiden Stellen $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, die beide $w = 0$ liefern, je eine einfache Wurzel an den drei Stellen $z = -1, \frac{1}{2}, 2$, die übereinstimmend $w = 1$ ergeben, und endlich je eine einfache Wurzel an den drei Stellen $z = 0, 1, \infty$, die wieder ein und denselben Wert w, nämlich ∞ liefern. *Die zur sechsdeutigen Funktion $z = \varphi(w)$ gehörende Fläche F_6 hat demnach zwei je dreiblättrige Verzweigungspunkte, die bei $w = 0$ übereinanderliegen, drei zweiblättrige Verzweigungspunkte bei $w = 1$ und ebenfalls drei zweiblättrige Verzweigungspunkte bei $w = \infty$.*

Beim synthetischen Aufbau dieser F_6 wollen wir (unter geringfügiger Abweichung von der S. 48 befolgten Maßregel) die w-Ebene längs der *ganzen* durch die drei Verzweigungspunkte $w = 0, 1, \infty$ ziehenden reellen Achse durchschneiden. Ohne indessen die zwölf „Halbblätter" dann unmittelbar längs der „Verzweigungsschnitte" S zusammenzuheften, wollen wir sogleich ihre zwölf konformen Abbilder in der schlichten z-Ebene aufsuchen. Um die Zeichnungen anschaulich zu gestalten, wollen wir dasjenige Halbblatt der w-Ebene, welches die komplexen Werte w mit „positiven" imaginären Bestandteilen trägt, und das wir dieserhalb als das „positive" Halbblatt oder die „positive" Halbebene bezeichnen, mit einer Schraffierung versehen (vgl. Fig. 10), während das „negative" Halbblatt frei bleiben soll. Indem wir die sechs Abbilder der positiven Halbblätter in der z-Ebene gleichfalls schraffieren, entspringt die Bereicheinteilung der z-Ebene, wie sie in Fig. 11 dargestellt ist. *Es sind also zwölf von Kreisen und Geraden begrenzte dreieckige Bereiche, welche die zwölf Halbblätter der* F_6 *konform abbilden und in ihrer Nebeneinanderordnung den Zusammenhang der Blätter von* F_6 *zur Anschauung bringen.* Die in Fig. 11 in Klammern angegebenen Zahlen sind die Funktionswerte w, die den Argumenten $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2}, 2, 0, 1, \infty$ entsprechen und also von den Verzweigungspunkten herrühren.

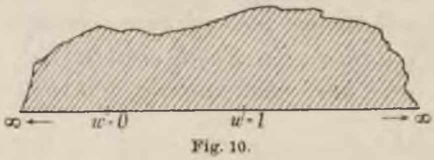


Fig. 10.

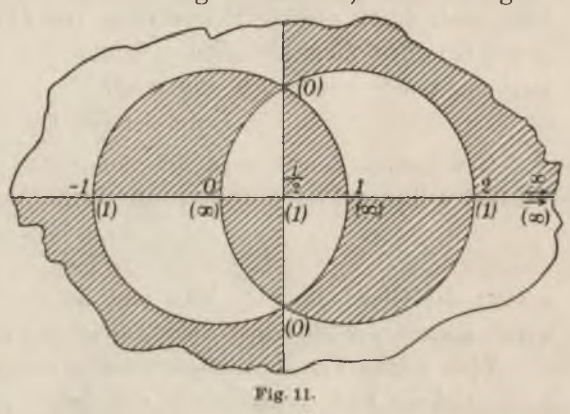


Fig. 11.

Die wahre Bedeutung dieser Figur wird uns später in anderem Zusammenhange beschäftigen. Die Richtigkeit der Angaben wolle man hier zunächst auf elementarem Wege bestätigen, indem man z. B. für $z = \frac{1}{2} + iy$ die Funktion w in die Gestalt setzt:

$$w = \frac{(3 - 4y^2)^3}{27(1 + 4y^2)^2}$$

oder für $z = e^{\vartheta i}$ in die Form:

$$w = \frac{2(1 - 2\cos\vartheta)^3}{27(1 - \cos\vartheta)}$$

oder die Funktion für reelle z berechnet usw.

§ 14. Die linearen Substitutionen und der Begriff der Kreisverwandtschaft.

Einige besondere Ausführungen haben wir an die Entwicklungen von § 13 für den niedersten Fall anzuschließen, daß nämlich die Blätteranzahl der daselbst mit F_m bezeichneten Riemannsche Fläche insbesondere $m = 1$ ist. F_1 ist die schlichte und vollständige w-Kugel, welche, da Verzweigungspunkte jetzt ausgeschlossen sind, ohne Ausnahme konform auf die z-Kugel bezogen ist. *Eine Funktion, welche die schlichte und vollständige z-Kugel ausnahmslos konform auf die schlichte und gleichfalls vollständige w-Kugel abbildet, ist eine rationale Funktion ersten Grades oder kurz eine „lineare“ Funktion und hat die Gestalt:*

(1) $$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Aus der Gestalt der Ableitung:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

oder auch durch direkte Betrachtung von (1) folgt, daß der Ausdruck $(ad - bc)$, den man als „*Determinante*“ der linearen Funktion (1) bezeichnet, *von* 0 *verschieden sein muß:*

(2) $$ad - bc \neq 0.$$

Gewöhnlich deutet man die komplexen Werte w gleich auf der z-Kugel selber, schreibt dann z' an Stelle von w und:

(3) $$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

anstatt der Gleichung (1). Man sagt im Anschluß hieran, *die z-Kugel werde mittelst der „linearen Substitution“* (3) *in sich selbst transformiert.*

Eine solche Transformation hat nun neben ihren Eigenschaften der Eindeutigkeit und Winkeltreue die dritte grundlegende Eigenschaft, *daß sie die Kreise der z-Kugel stets wieder in Kreise überführt.* Man sagt, *das System aller Kreise der z-Kugel sei gegenüber der Transformation mittelst einer linearen Substitution* (3) *invariant.* Operieren wir mit der z-Ebene, so müssen wir, entsprechend dem Schlußsatze von § 5, S. 23, die gesamten Geraden der z-Ebene als Kreise mit dem Radius ∞ den Kreisen zurechnen; auf der z-Kugel werden diese besonderen Kreise einfach diejenigen durch den Punkt $z = \infty$.

Eine umkehrbar eindeutige Beziehung einer Ebene auf eine zweite oder auch einer Ebene auf sich selbst, bei der Kreisen immer wieder Kreise entsprechen, nennt man nach Moebius[1]) eine „*Kreisverwandt-*

1) „Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung“, Abh. der Leipz. Ges. d. Wiss., Bd. 2 (1855), S. 529 oder Moebius, Ges. Werke, Bd. 2, S. 243.

schaft". Eine solche Kreisverwandtschaft liegt also, wie wir behaupten, bei jeder Transformation (3) unserer z-Kugel in sich vor.

Der Beweis dieser Behauptung werde zunächst für den Fall geführt, daß $c = 0$ ist und also eine „ganze" lineare Funktion:

$$z' = az + b$$

vorliegt. Hier ist zufolge (2) sicher a von 0 verschieden. Wir schreiben $a = |a| e^{\alpha i}$ und können den Übergang von z zu z' durch Vermittlung zweier Variablen z'', z''' so vollziehen:

$$z'' = e^{\alpha i} z, \quad z''' = |a| z'', \quad z' = z''' + b.$$

Die vorgelegte „ganze" lineare Substitution können wir demnach erzeugen, indem wir nacheinander die drei noch spezieller gebauten Substitutionen:

(4) $$z' = e^{\alpha i} z, \quad z' = |a| z, \quad z' = z + b$$

ausüben.

Daß nun jede dieser Substitutionen eine Kreisverwandtschaft liefert, macht man sich leicht mittelst einer geometrischen Deutung der Substutionen klar. In der Tat wollen wir geradezu eine mechanische Deformation der z-Ebene oder z-Kugel in sich vornehmen, bei welcher der einzelne Punkt z nach seinem durch die Substitution zugeordneten Punkte z' in geeigneter Weise hingeführt wird.

Die erste Substitution (4) wird einfach mittelst einer Drehung der z-Ebene um ihren Nullpunkt durch den Winkel α vollzogen. Die einzelnen Punkte z wandern hierbei über konzentrische Kreise um den Nullpunkt; diese Kreise sollen demnach die „*Bahnkurven*" der Substitution heißen. Die vom Nullpunkte ausziehenden geradlinigen Strahlen, welche die Bahnkurven senkrecht schneiden, heißen die „*Niveaukurven*" der Substitution; die auf gemeinsamer Niveaukurve liegenden Punkte werden bei der fortschreitenden Bewegung stets auf einer solchen Kurve verbleiben.

Auf der z-Kugel beschreibt man die Verhältnisse am einfachsten unter Gebrauch einer geographischen Sprechweise. Nach den Formeln (5) ff. S. 23 entspricht dem Nullpunkt $z = 0$ der „Nordpol", dem Punkte ∞ der „Südpol" der Kugel. Die eben gewonnenen Bahnkurven der ersten Substitution (4) liefern die „Parallelkreise", die Niveaukurven aber ergeben die „Meridianhalbkreise". Hier ist nun die Substitution einfach mittelst der Drehung der Kugel um ihre „Achse" durch den Winkel α zu vollziehen, wobei die beiden festbleibenden Pole als die „*Fixpunkte*" der Substitution bezeichnet werden. Daß bei der Drehung der Kugel die Kreise immer wieder in Kreise übergehen, ist unmittelbar einleuchtend.

Bei der zweiten Substitution (4) entspricht dem einzelnen Punkte $z = re^{\vartheta i}$ ein Punkt desselben ϑ und des zu r proportionalen Radiusvektor $r' = |a| r$. Bei der mechanischen Deformation müssen wir uns die z-Ebene oder z-Kugel als eine elastische Membran denken. Der einzelne Punkt wird dann, wenn wir sogleich die z-Kugel benutzen, über seinen Meridianhalbkreis hingeführt, und zwar in der Richtung auf den Südpol oder Nordpol, je nachdem $|a| > 1$ oder < 1 ist.[1]) Die Meridianhalbkreise sind also jetzt die „Bahnkurven", und wir dürfen uns die Bewegung derart vollzogen denken, daß die Parallelkreise als „Niveaukurven" dienen. Auch bei dieser Bewegung bleiben die beiden Pole fest, stellen also wieder „*Fixpunkte*" der Substitution dar. In der z-Ebene sind wir hier einfach zu einer „Ähnlichkeitstransformation" gelangt, so benannt, weil jede Figur in eine ihr ähnliche übergeht, also insbesondere ein Kreis stets wieder in einen Kreis.

Ehe wir die dritte Substitution (4) erledigen, wollen wir aus den beiden ersten die Substitution:

$$z' = az = |a| e^{\alpha i} z$$

zusammensetzen und haben dabei, um nicht zu den bisherigen Fällen zurückzukommen, $|a| \gtrless 1$ und α als im Innern des Intervalles $0 < \alpha < 2\pi$ gelegen anzunehmen. Natürlich könnten wir hier zwei Deformationen der bisher besprochenen Arten hintereinander ausüben, wobei insbesondere die beiden Pole der Kugeloberfläche sich wieder als „Fixpunkte" der Substitution erweisen. Es ist aber auch möglich, die Substitution $z' = az$ unter dem Bilde einer einzigen Deformation vorzustellen. Zu diesem Zwecke überdecken wir die z-Ebene einfach und lückenlos mit einer Schar kongruenter „logarithmischer Spiralen", die gegeben sind durch die Gleichung:

(5) $$r = C_1 \cdot e^{\frac{\vartheta \log |a|}{\alpha}},$$

unter C_1 den Parameter verstanden. Auf der z-Kugel liefern die Spiralen eine Schar kongruenter „*Loxodromen*", deren einzelne jeden der beiden Pole unendlich oft spiralig umläuft, und die man gewöhnlich als „isogonale Trajektorien" der Meridianhalbkreise einzuführen pflegt. Da nun zwei einander entsprechende Punkte z und $z' = az$ stets auf ein und derselben Loxodrome liegen, so können wir die Schar (5) der Loxodromen als die „Bahnkurven" bei der mechanischen Ausführung der Substitution benutzen. Die zu (5) orthogonale Schar:

(6) $$r = C_2 \cdot e^{-\frac{\vartheta \alpha}{\log |a|}}$$

---

1) Den Fall $|a| = 1$ der sogenannten „identischen" Substitution, bei der jeder Punkt z an seiner Stelle bleibt, dürfen wir außer acht lassen.

liefert wieder kongruente logarithmische Spiralen bzw. Loxodromen. Diese werden durch unsere Substitution ineinander übergeführt, und zwar die vom Parameter C_2 in die des Parameters:

$$C_2' = C_2 \cdot |a|\, e^{\frac{\alpha^2}{\log |a|}}.$$

Bei der mechanischen Überführung der z-Kugel aus der Anfangslage in die Endlagen mögen demnach die Loxodromen (6) die Niveaukurven abgeben. Fig. 12 erläutere diese Vorstellungen an einem der z-Ebene angehörenden Bilde.

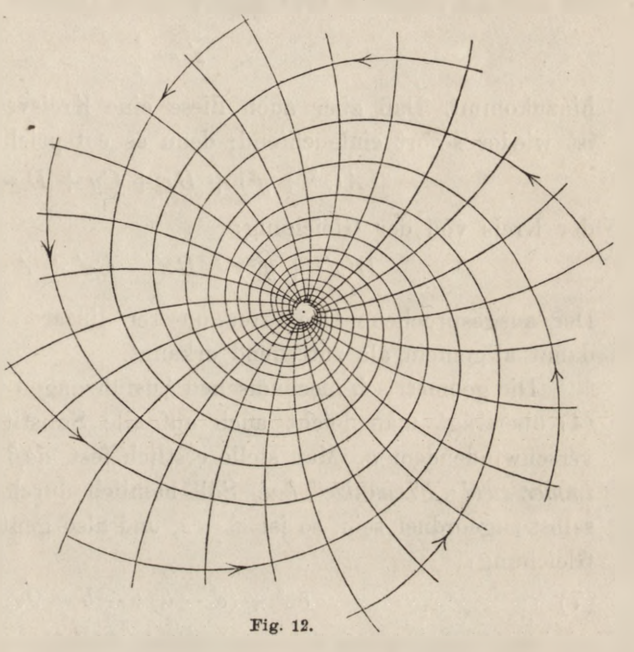


Fig. 12.

Die letzte Substitution (4) hat wieder elementaren Charakter, insofern sie durch eine „Parallelverschiebung" oder „Translation" der z-Ebene in sich vollzogen wird, bei der insbesondere der Nullpunkt auf geradliniger Strecke zum Punkte b hingeführt wird. Die Schar der zu dieser Strecke parallelen Geraden liefert die „Bahnkurven", die orthogonale Geradenschar die „Niveaukurven". Auf der z-Kugel liefern die Bahnkurven eine Schar von Kreisen, die sich im „Südpol" berühren, die Niveaukurven ergeben die zugehörige orthogonale Kreisschar. Der „Südpol" $z = \infty$ ist jetzt der einzige sich selbst entsprechende Punkt oder „Fixpunkt" der Substitutionen. Daß wir hier mit einer Kreisverwandtschaft zu tun haben, ist wieder einleuchtend.

Liegt jetzt zweitens eine Substitution (3) mit nicht verschwindendem c vor, so können wir schreiben:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{-(ad - bc)}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c}.$$

Benutzen wir somit die Abkürzungen:

$$\frac{-c^2}{ad - bc} = a', \quad \frac{-cd}{ad - bc} = b', \quad \frac{a}{c} = b'',$$

so können wir die vorgelegte Substitution durch Vermittlung zweier Variablen z'' und z''' so auflösen:

$$z'' = a'z + b', \quad z''' = \frac{1}{z''}, \quad z' = z''' + b''.$$

Jede Substitution mit nicht verschwindendem c läßt sich demnach durch drei aufeinanderfolgende Substitutionen erzeugen, von denen die erste und dritte der schon erledigten Art $z' = az + b$ angehören, während als neu die zweite Substitution von der Gestalt:

$$z' = \frac{1}{z}$$

hinzukommt. Daß aber auch diese eine Kreisverwandtschaft darstellt, ist wieder sofort einleuchtend; denn es entspricht bei ihr dem Kreise:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

der Kreis von der Gleichung:

$$D(x'^2 + y'^2) + Bx' - Cy' + A = 0.$$

Der ausgesprochene Charakter unserer linearen Substitutionen (3) ist damit allgemein als zutreffend erkannt.

Die geometrisch-mechanischen Ausführungen über die Substitutionen (4) überträgt man leicht auch auf alle Substitutionen (3) mit nicht verschwindendem c. Man stelle erstlich fest, *daß eine solche Substitution immer zwei „Fixpunkte" hat.* Soll nämlich durch (3) der Punkt z sich selbst zugeordnet sein, so ist $z' = z$, und also genügt z der quadratischen Gleichung:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \tag{7}$$

Sind erstlich die Lösungen dieser Gleichung voneinander verschieden, so wollen wir sie z_1 und z_2 nennen.[1]) Die Substitution (3) muß sich dann umrechnen lassen auf die Gestalt:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = m\frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{8}$$

wo der konstante Faktor m als „Multiplikator" der Substitution bezeichnet wird. Es ist nämlich der links stehende Ausdruck selbst wieder eine lineare Funktion von z, welche die rechts stehende Gestalt haben muß, da ihr Nullpunkt in z_1 und ihr Pol in z_2 gelegen ist. Führen wir an Stelle von z die Variable:

$$Z = \frac{z - z_1}{z - z_2} \tag{9}$$

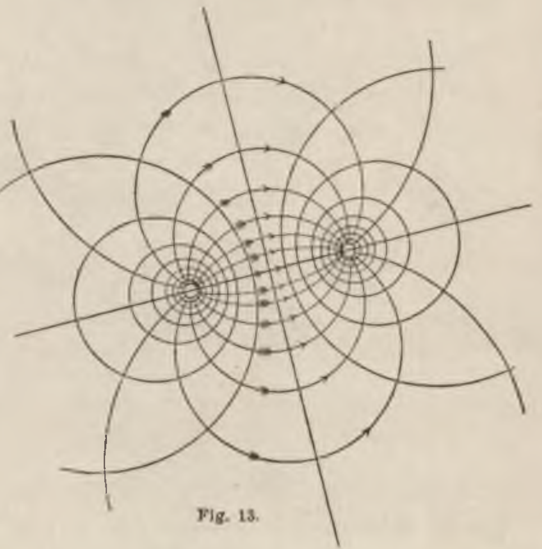
ein, so rechnet sich unsere Substitution (8) auf die neue Gestalt um:

$$Z' = mZ = |m|\, e^{\vartheta i} Z,$$

1) Da c als von 0 verschieden gilt, so sind z_1 und z_2 endlich.

auf welche unmittelbar die für die beiden ersten Substitutionen (4) gegebenen Ausführungen übertragen werden können. Das Bild der Z-Kugel mit ihren Parallelkreisen, Meridianhalbkreisen und Loxodromen hat man dann durch die Transformation (9), welche ja selber wieder eine Kreisverwandtschaft liefert, auf die z-Kugel zu übertragen, wobei die Meridiankreise in die Schar der Kreise durch die beiden Punkte z_1, z_2 übergeht, die Parallelkreise in die zur eben gewonnenen orthogonalen Kreisschar, während die Loxodromen auf der z-Kugel Doppelspiralen liefern, welche jede der eben genannten Kreisscharen isogonal durchsetzen.

Ist erstlich $|m| = 1$, so heißt die Substitution „*elliptisch*".[1]) Die Kreise durch z_1 und z_2 liefern die Niveaukurven, die orthogonale Kreisschar stellt die Bahnkurven; die Substitution hat den Charakter einer Drehung der z-Ebene um z_1 und z_2. Ist $\mu = 0$, so heißt die Substitution „*hyperbolisch*". Nun sind die z_1 und z_2 verbindenden Kreise die Bahnkurven, und die zu ihnen orthogonalen Kreise liefern die Niveaukurven. Es findet eine Deformation der Ebene vom einen Fixpunkte in der Richtung auf den anderen längs der Bahnkurven statt, wie man sich die an Fig. 13 (die auch zur Erläuterung des elliptischen Falles dienen kann) deutlich mache. Ist weder $|m| = 1$ noch $\mu = 0$, so heißt die Substitution „*loxodromisch*"; ihr entspricht eine schraubenartige Deformation der z-Kugel in sich.


Fig. 13.

Sind zweitens die Lösungen der Gleichung (7) einander gleich und gleich z_0, so muß sich die Substitution umrechnen lassen auf:

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + b'.$$

Wir müssen nämlich bei Einführung der neuen Veränderlichen:

(10) $$Z = \frac{1}{z - z_0}$$

---

1) Der Fall $m = 1$ kann in Gleichung (8) nicht vorliegen, da er zur „identischen" Substitution $z' = z$ und damit zu $c = 0$ führen würde.

zu einer in Z geschriebenen Substitution der dritten unter (4) genannten Art gelangen, da der „Südpol" $Z = \infty$ der Z-Kugel der einzige sich selbst entsprechende Punkt ist. Übrigens werden wir diesen Punkt als Koinzidenzpunkt *zweier* Fixpunkte fassen, damit der Satz, eine Substitution (3) habe stets *zwei* Fixpunkte, allgemein gilt. Eine Substitution der jetzt vorliegenden Art heißt *„parabolisch"*. In der Z-Ebene hatten wir zwei einander orthogonale Scharen paralleler Geraden, welche die Bahn- und Niveaukurven lieferten. Ihre durch (10) gelieferten kreisverwandten Abbilder in der z-Ebene ergeben zwei zueinander ortho-

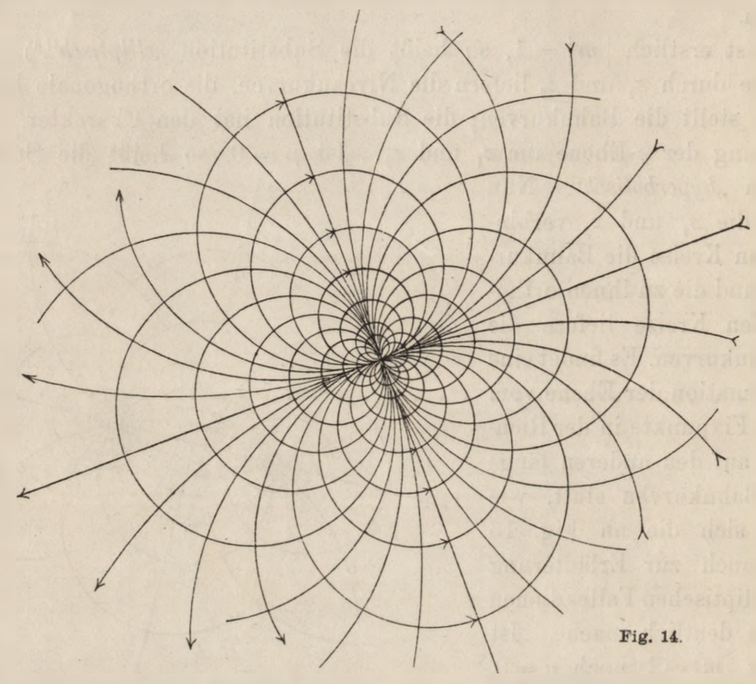


Fig. 14.

gonale Scharen von Kreisen des in Fig. 14 dargestellten Typus; jetzt also besteht die einzelne Schar aus lauter sich im Fixpunkte z_0 berührenden Kreisen.[1])

Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß wir die Benennungen „elliptisch", „hyperbolisch" und „parabolisch" auch auf die Substitutionen (4) anwenden, sowie daß wir $z' = |a| e^{\alpha i} z$ mit $|a| \gtrless 1$ und

1) Die Benennungen „elliptisch", „hyperbolisch" usw. für die verschiedenen Arten der Substitutionen (3) sind von Klein eingeführt. Eine ausführliche Behandlung der linearen Substitutionen auf Grundlage ihrer Beziehung zur projektiven Geometrie findet man in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von F. Klein und R. Fricke (Leipzig, 1897), Bd. 1, Einleitung. Man findet hier auch die Originalliteratur nachgewiesen. Übrigens vergleiche man auch Osgood, S. 258ff.

$0 < \alpha < 2\pi$ „loxodromisch" nennen. Übrigens werden uns späterhin vornehmlich elliptische, hyperbolische und parabolische Substitutionen begegnen.

§ 15. Die linearen Substitutionen zweiter Art und die indirekten Kreisverwandtschaften.

Mit $\bar{z}$ bezeichnen wir den zu $z = x + iy$ konjugiert komplexen Wert $x - iy$. Der Übergang von z zu $z' = \bar{z}$, bei dem also jedem Werte z sein konjugierter zugeordnet ist, wird als „Spiegelung" der z-Ebene an der reellen Achse bezeichnet. Diese Transformation stellt eine eindeutige und auch wieder konforme Abbildung der z-Ebene auf sich selbst dar; doch besteht ein Unterschied gegen die bisherigen konformen Abbildungen darin, daß im Abbild eines Winkels die Schenkel desselben vertauscht oder umgelegt erscheinen. Wir sprechen in diesem Sinne von einer konformen Abbildung *„mit Umlegung der Winkel"*. Übrigens werden die Kreise der z-Ebene durch $z' = \bar{z}$ wieder in Kreise übergeführt.

Man wolle jetzt auf die durch $z' = \bar{z}$ transformierte z-Ebene gleich noch irgendeine lineare Substitution (3) S. 66 mit nicht verschwindender Determinante ausüben. Man gelangt so zu der durch:

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \tag{1}$$

dargestellten Transformation des Punktes z in den Punkt z'. Wir bezeichnen (1) als eine lineare Substitution *„zweiter Art"* und ihr gegenüber eine Substitution (3) S. 66 genauer als eine solche der „ersten Art." *Jede lineare Substitution zweiter Art stellt eine eindeutige konforme Abbildung der z-Ebene auf sich selbst mit Umlegung der Winkel dar, bei der Kreise immer wieder in Kreise übergehen.* Die hier vorliegenden Kreisverwandtschaften mit Umlegung der Winkel bezeichnet man als *„indirekte"* und nennt diejenigen des § 14 demgegenüber *„direkte"* Kreisverwandtschaften.

Unter den Substitutionen (1) wollen wir nur eine einzige Art besonders betrachten, nämlich die gleich näher zu erklärenden *„Spiegelungen"* oder *„Inversionen"* an Kreisen; man nennt sie auch *„Transformationen durch reziproke Radien"* an Kreisen. In dem besonderen Falle, daß der Kreis, an dem die Spiegelung vorgenommen werden soll, und der allgemein der *„Symmetriekreis"* der Spiegelung heißen soll, eine Gerade ist, haben wir mit einer elementaren Spiegelung zu tun, wie wir sie anfangs durch $z' = \bar{z}$ für die reelle Achse als „Symmetriekreis" darstellten.

Den Charakter der Spiegelungen mit Symmetriekreisen endlicher Radien erläutern wir durch das Beispiel:

$$z' = \frac{b}{c\bar{z}}, \tag{2}$$

wo der Quotient $\frac{b}{c}$ einen reellen positiven Wert haben soll. Schreiben wir ϱ^2 für diesen Wert, so wird durch unsere Substitution der Punkt $z = re^{\vartheta i}$ oder, wie wir sagen dürfen, der Punkt der Polarkoordinaten (r, ϑ) in den Punkt $\left(\frac{\varrho^2}{r}, \vartheta\right)$ übergeführt. Der Symmetriekreis ist hier der Kreis des Radius ϱ um den Nullpunkt; jeder Punkt dieses Kreises, ist durch die Substitution (2) sich selbst zugeordnet. Weiter vertauscht die Substitution das Äußere mit dem Inneren dieses Kreises und zwar in der Art, daß einander zugeordnete Punkte gleiche Amplituden ϑ haben und Radienvektoren r und r', welche durch die Relation $rr' = \varrho^2$ verbunden erscheinen. Die obengenannten Namen der Substitution (2) finden in diesem geometrischen Charakter derselben ihre Begründung.

Da die Substitution (2) sich dem Ansatz (1) einordnet, so liefert die eben beschriebene „Transformation durch reziproke Radien" am Kreise des Radius ϱ um den Nullpunkt eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel und insbesondere eine indirekte Kreisverwandtschaft. Dieser Charakter unserer Transformation bleibt natürlich gewahrt, falls an Stelle des Kreises vom Radius ϱ um den Nullpunkt irgendein beliebiger Kreis der z-Ebene mit endlichem Radius als Symmetriekreis der Spiegelung tritt. Andrerseits ist aber auch leicht zu sehen, daß die Spiegelung an diesem neuen Symmetriekreise gleichfalls unter den Substitutionen (1) enthalten ist. Wenn wir nämlich zuvor die Transformation $z' = \bar{z}$ und dann erst die Spiegelung an dem neuen Symmetriekreise vornehmen, gelangen wir zu einer ausnahmslos konformen Beziehung der z-Ebene auf sich selbst ohne Umlegung der Winkel und damit zu einer Substitution (3) S. 66, woraus für die Spiegelung die Gestalt (1) entspringt.

Auch die Spiegelung an irgendeiner Geraden der z-Ebene, welche denselben elementaren Charakter hat wie die oben betrachtete Spiegelung $z' = \bar{z}$ an der reellen Achse, findet sich unter den Substitutionen (1), wie man wieder durch Kombinierung mit der besonderen Spiegelung $z' = \bar{z}$ und Benutzung der dadurch zu erzeugenden Substitution erster Art zeigt.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir diese besondere Klasse der Spiegelungen unter den Substitutionen (1) auch direkt dadurch charakterisieren, daß wir die ihnen eigentümlichen Koeffizienten

a, b, c, d angeben. Bei den zu diesem Ende anzustellenden Rechnungen schreibt man die Substitutionen (1) zweckmäßig so, daß die Determinante gleich 1 ist:

(3) $$ad - bc = 1.$$

Dies ist immer erreichbar, da man die Koeffizienten $a, b, c, d,$ ohne die Substitution wesentlich zu ändern, noch mit einem gemeinsamen Faktor versehen kann und dieser dann eben so wählbar ist, daß die multiplizierten Koeffizienten die Determinante 1 haben. Durch die Forderung (3) ist übrigens die Schreibweise der Substitution noch nicht eindeutig bestimmt, da man ohne die Substitution und die Gleichung (3) zu ändern noch einen gleichzeitigen Zeichenwechsel von a, b, c, d vornehmen kann. Doch ist es nicht erforderlich, diese Zweideutigkeit noch irgendwie zu heben.

Eine einzelne Spiegelung stellt nun ein *umkehrbares Entsprechen* von Punkten z und z' dar. Nennt man bei irgendeiner unserer Substitutionen (erster oder zweiter Art), welche z in z' überführt, diejenige Substitution, welche umgekehrt z' wieder nach z zurückführt, zur ersteren „*invers*", so ist eine Spiegelung offenbar sich selbst invers. Nun ist, wenn $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ die zu a, b, c, d konjugierten Zahlwerte sind, zur Substitution (1) die folgende invers:

$$z' = \frac{\bar{d}\bar{z} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{z} + \bar{a}},$$

wie man durch Auflösung der Gleichung (1) nach z unter Austausch der Bezeichnungen z und z' findet. Da im Falle einer Spiegelung die eben angeschriebene Substitution wieder mit (1) identisch sein muß, so gilt für eine Spiegelung:

$$\bar{d} = \sigma a, \quad \bar{b} = -\sigma b, \quad \bar{c} = -\sigma c, \quad \bar{a} = \sigma d,$$

unter σ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Die Bedingung (3) ergibt dann, daß dieser Faktor σ entweder gleich $+1$ oder -1 sein muß.

Wir behaupten nun, daß der Fall $\sigma = +1$ uns gerade bereits alle unsere Spiegelungen liefert. Hier ist d konjugiert komplex zu a, während b und c rein imaginär sind; wir schreiben also:

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = ib_2, \quad c = ic_2, \quad d = a_1 - ia_2,$$

wo a_1, a_2, b_2, c_2 reelle Zahlen sind, die zufolge (3) die Bedingung:

(4) $$a_1^2 + a_2^2 + b_2c_2 = 1$$

erfüllen. Die sich selbst entsprechenden Punkte (Fixpunkte) der Substitution finden wir, indem wir in die Substitution $z' = z$ und also $z' = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ eintragen. Es gilt der Satz: *Unter den ge-*

maß (3) *geschriebenen Substitutionen* (1) *sind die Spiegelungen durch die besondere Gestalt:*

(5) $$z' = \frac{(a_1 + i a_2)\bar{z} + i b_2}{i c_2 \bar{z} + (a_1 - i a_2)}$$

ausgezeichnet, wo a_1, a_2, b_2, c_2 *vier reelle die Relation* (4) *befriedigende Zahlen sind. Der Symmetriekreis der Spiegelung* (5) *hat die Gleichung*:

(6) $$c_2(x^2 + y^2) - 2a_2 x + 2a_1 y - b_2 = 0;$$

derselbe hat zufolge (4) *einen von* 0 *verschiedenen reellen Radius, der insbesondere für* $c_2 = 0$ *unendlich groß ist.*

Zum Beweise dieser Behauptung beachte man, daß die auch für $\sigma = -1$ leicht durchführbare Rechnung zwar gleichfalls auf sich selbst inverse Substitutionen zweiter Art führt, daß jedoch diesen letzteren Substitutionen keine Symmetriekreise mit reellen Radien zugehören. Die Substitutionen (5) müssen also unsere gesamten Spiegelungen bereits erschöpfen; und in der Tat können wir auch durch zweckmäßige Auswahl von a_1, a_2, b_2, c_2 den Kreis (6) mit jedem beliebigen Kreise bzw. mit jeder beliebigen Geraden der z-Ebene identifizieren.[1])

§ 16. Allgemeine Angaben über algebraische Funktionen und Gebilde.

Bei Gelegenheit der Inversion der rationalen Funktionen gelangten wir zur Vorstellung der m-blättrigen Riemannschen Flächen F_m mit l Verzweigungspunkten, für welche wir auch einen synthetischen Aufbau besprachen (vgl. S. 48). Wir wollen jetzt an eine beliebige Fläche dieser Art anknüpfen, die wir uns wie oben in folgender Weise synthetisch herstellen. Auf der z-Kugel markieren wir irgend l verschiedene Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_l$, wobei die ganze Zahl $l > 1$ und endlich sei. Wir ziehen eine reguläre Kurve, die sich nicht selbst schneidet, von e_1 über e_2, e_3 bis e_l und bezeichnen die durch die Punkte e begrenzten Teile der Kurve mit $S_1, S_2, \ldots, S_{l-1}$. Längs jedes dieser Kurvenstücke durchschneiden wir die z-Kugel, nennen die $S_1, S_2, \ldots, S_{l-1}$ wieder „Ver-

1) Über die Behandlung der Substitutionen zweiter Art auf Grundlage projektiver Vorstellungen im Raume der z-Kugel (s. S. 22) vergleiche man wieder die in der Note S. 72 genannten Vorlesungen, Bd. 1, Einleitung. Dabei erweisen sich die sich selbst inversen Substitutionen (1) als „Perspektivitäten“, welche die z-Kugel in sich überführen. Liegt das Perspektivitätszentrum außerhalb der Kugel, so haben wir mit einer unserer Spiegelungen zu tun, wobei die Polarebene jenes Zentrums den Symmetriekreis auf der z-Kugel ausschneidet. Die im Texte nicht behandelten Substitutionen mit $\sigma = -1$ haben Perspektivitätszentren innerhalb der Kugel; man hat im Einzelfall eine sogenannte „Diametralsymmetrie“, d. h. eine Transformation, bei der je zwei bezüglich des Perspektivitätszentrums diametrale Punkte der z-Kugel ineinander übergehen.

zweigungsschnitte“ und unterscheiden beim einzelnen ein rechtes und ein linkes Ufer.

Wir lagern nun eine endliche Anzahl m[1]) von Exemplaren der so vorbereiteten z-Kugel übereinander und beginnen damit, die m linken Schnittufer S_1 in irgendeiner Anordnung den m rechten Ufern zuzuordnen und je zwei einander zugeordnete Ufer (wie S. 48 u. f.) aneinander zu heften. Demnächst verfahren wir gerade so längs $S_2, S_3, \ldots, S_{l-1}$.

So entspringt eine geschlossene m-blättrige Fläche F_m, welche jedenfalls an keinen anderen Stellen als den $e_1, e_2, \ldots, e_l$ Verzweigungspunkte aufweist. Beim einzelnen Punkte e_i kommen wir von einem ersten Blatte spätestens nach m Umläufen in dieses Blatt zurück; kommen wir nach ν_i Umläufen zum ersten Male wieder in das Ausgangsblatt zurück, so haben wir bei e_i einen ν_i-blättrigen Verzweigungspunkt. Übrigens kann auch die Uferzuordnung eine solche sein, daß man bei einmaligem Umlauf um einen einzelnen Punkt e_k von *jedem* Blatte aus sogleich zu diesem zurückgeführt wird; dann hätten wir jedoch nicht nötig gehabt, diese Stelle e_k zu markieren. Auch können an einer Stelle e, wie schon das Beispiel von S. 64 lehrt, sehr wohl mehrere Verzweigungspunkte übereinander liegen. Die wirkliche Anzahl der Verzweigungspunkte kann demnach auch $< l$ oder $> l$ sein. Wir wollen fortan *unter l die wirkliche Anzahl der Verzweigungspunkte* verstehen; halten wir auch an der Bezeichnung fest, daß dieselben bei $z = e_1, e_2, \ldots, e_l$ liegen, so brauchen diese l Werte jetzt nicht mehr voneinander durchweg verschieden zu sein. Übrigens möge e_i ein ν_i-blättriger Verzweigungspunkt sein.

Hierüber hinaus wollen wir noch die wesentliche Forderung stellen, *daß es möglich sein soll, von einem ersten Blatte durch geeignete Wege in der Fläche F_m zu jedem anderen Blatte hinzugelangen.* Wäre dies nicht möglich, so würde die Fläche in mindestens zwei getrennte Stücke zerfallen, deren jedes für sich geschlossen in gewisser Blätteranzahl die z-Kugel überdeckte, und wir könnten das einzelne dieser Stücke der weiteren Betrachtung zugrunde legen.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Eine Funktion, deren Feld eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Fläche F_m mit l Verzweigungspunkten ist, heißt eine „algebraische“ Funktion von z und möge im Anschluß an die bereits S. 48 benutzte Schreibweise durch $w = \varphi(z)$ bezeichnet werden.* Die Annahme, F_m sei das Feld von $\varphi(z)$, ist so zu verstehen, daß, wenn wir die Funktion $w = \varphi(z)$ etwa in der Umgebung

1) Damit wir Verzweigungspunkte anbringen können und nicht zum einfachen Falle der rationalen Funktionen zurückgeführt werden, muß natürlich $m > 1$ sein.

einer von jedem e_i verschiedenen Stelle z_0 durch ein „Funktionselement“ (vgl. S. 20) geben, die analytische Fortsetzung von hier aus als Feld der Funktion w gerade unsere Riemannsche Fläche F_m liefere.

Hieraus geht sofort hervor, daß die m Blätter der Fläche m Zweige unserer Funktion tragen, von denen keine zwei identisch sein können. Indem wir die Blätter der Fläche numeriert denken, wollen wir diese m Zweige entsprechend durch die Bezeichnungen $w_1 = \varphi_1(z)$, $w_2 = \varphi_2(z)$, $\ldots$, $w_m = \varphi_m(z)$ voneinander unterscheiden.

Im Anschluß hieran erklärt nun folgende einfache Betrachtung den für die Funktion $w = \varphi(z)$ eingeführten Namen. Wir wollen in der *schlichten* z-Ebene von einer Stelle z_0 aus, die mit keinem der Werte e_i zusammenfalle, eine beliebige geschlossene Kurve C nach z_0 zurück beschreiben, die jedoch auch, um *eindeutige* Fortsetzbarkeit der Funktion zu sichern, durch keine der l Stellen e_i hindurchlaufen soll. Bei z_0 geben wir die m Zweige $w_1 = \varphi_1(z), \ldots, w_m = \varphi_m(z)$ etwa durch „Funktionselemente“ und setzen zugleich alle m Funktionen $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)$ über C fort. Am Schlusse erhalten wir alle m Anfangszweige wieder, aber im allgemeinen in einer abgeänderten Reihenfolge; denn auf der Riemannschen Fläche F_m entsprechen dem Umlaufe C offenbar m Kurven, deren einzelne bei z_0 in einem gewissen Blatte beginnt und wieder bei z_0, jedoch in irgendeinem Blatte, endigt.

Bilden wir nun aber eine symmetrische Funktion der $w_1, \ldots, w_m$, etwa die Potenzsumme:

$$w_1^s + w_2^s + \cdots + w_m^s, \tag{1}$$

so ist klar, daß diese in der schlichten z-Ebene eine Funktion darstellt, die, über die geschlossene Kurve C fortgesetzt, notwendig zu ihren Anfangswerten zurückkehrt. Auch die Verzweigungspunkte selbst bilden keine Schwierigkeit. In der Umgebung eines einzelnen solchen Punktes e werden zwar die ν in Betracht kommenden Glieder der Summe (1) Entwicklungen nach Potenzen von $(z-e)^{\frac{1}{\nu}}$ mit ganzzahligen Exponenten besitzen[1]; aber die Summe (1) muß wieder, insofern sie sich beim Umlauf um e als daselbst eindeutig erweist, eine Entwicklung nach Potenzen von $(z-e)$ mit ausschließlich *ganzzahligen* Exponenten aufweisen. Somit wird die Summe (1) eine eindeutige Funktion von z darstellen, deren Feld die schlichte und vollständige z-Ebene ist; wir haben also in (1) *eine rationale Funktion von z* gewonnen, und dasselbe gilt demnach nach bekannten Sätzen der Algebra von allen rationalen symmetrischen Funktionen der $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

1) Ist $e = \infty$, so hat man $(z-e)$ durch z^{-1} zu ersetzen.

Verstehen wir in der Umgebung von z_0 unter w irgendeinen Zweig unserer Funktion, so ist daselbst die Gleichung:

$$(w - w_1)(w - w_2)\dots(w - w_m) = 0 \tag{2}$$

identisch erfüllt, da ein bestimmter Faktor mit 0 identisch ist. Multiplizieren wir aber die linke Seite dieser Gleichung aus und ordnen nach abfallenden Potenzen von w, so werden die Koeffizienten von $w^{m-1}, w^{m-2}, \dots$ rationale symmetrische Funktionen der $w_1, w_2, \dots, w_m$ und also rationale Funktionen von z, die wir $R_1(z), R_2(z), \dots, R_m(z)$ nennen wollen. Wir gelangen zu dem Ergebnis: *Es gibt m rationale Funktionen $R_1(z), \dots, R_m(z)$ von der Art, daß die „algebraische" Gleichung m^{ten} Grades für w:*

$$w^m + R_1(z)w^{m-1} + R_2(z)w^{m-2} + \cdots + R_m(z) = 0 \tag{3}$$

durch unsere algebraische Funktion $w = \varphi(z)$ auf der ganzen Riemannschen Fläche F_m erfüllt ist. Da nämlich der in (3) links stehende Ausdruck in irgendeinem ersten Blatte der Fläche F_m in der Umgebung von z_0 eine mit 0 identische Funktion von z liefert, so muß sich dieser Ausdruck bei analytischer Fortsetzung über das ganze Feld der Funktion w hin als mit 0 identisch erweisen.

Stellen wir jede der in (3) auftretenden rationalen Funktionen $R(z)$ als Quotienten zweier ganzer Funktionen dar (S. 62) und zerlegen die Nennerfunktionen in ihre Linearfaktoren (S. 46), so möge die ganze Funktion $g_0(z)$ der Generalnenner der m Quotienten sein.[1]) Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit $g_0(z)$, so geht sie in die Gestalt über:

$$g_0(z)w^m + g_1(z)w^{m-1} + g_2(z)w^{m-2} + \cdots + g_m(z) = 0, \tag{4}$$

wo jetzt die $g(z)$ ganze rationale Funktionen ohne einen allen gemeinsamen Linearfaktor sind. In dieser Gestalt wollen wir die algebraische Gleichung für w kurz durch das Symbol:

$$G(w, z) = 0 \tag{5}$$

bezeichnen, wo also der links stehende Ausdruck ein „*Polynom*" (eine rationale ganze Funktion) in w und z darstellt.

Das Polynom $G(w, z)$ hat als eine besonders wichtige Eigenschaft diejenige der „*Irreduzibilität*", welche besagt, *daß $G(w, z)$ nicht in das Produkt zweier Polynome zerlegbar sei.* Daß kein von w unabhängiger

1) Es ist nicht ausgeschlossen, daß von den m Funktionen $R(z)$ einige identisch verschwinden. Jedoch kann dies nicht von allen m Funktionen $R(z)$ zugleich gelten, da sonst w selbst mit 0 identisch wäre. Die im Texte vorgeschriebene Zerlegung bezieht sich natürlich nur auf die nicht identisch verschwindenden $R(z)$.

Faktor absonderungsfähig ist, wurde bereits im Anschluß an (4) hervorgehoben. Ist also überhaupt eine Zerlegung:

$$G(w, z) = G_1(w, z) \cdot G_2(w, z)$$

möglich, so müssen beide Faktoren w in Graden m_1 und m_2 enthalten, die > 0, in Summa gleich m und also einzeln $< m$ sind. Mindestens einer der Faktoren, etwa $G_1(w, z)$, muß für unsere Funktion w identisch verschwinden.[1] Dann besteht aber, wie die analytische Fortsetzung zeigt, die Gleichung $G_1(w, z) = 0$ auf der ganzen F_m, so daß diese Gleichung beim einzelnen z durch die m im allgemeinen verschiedenen Werte $w_1, w_2, \ldots, w_m$ befriedigt wird und also der Annahme zuwider den Grad m erreichen müßte.

Ein analytisches Gebilde der vorliegenden Art, das man geradezu auch durch die irreduzible algebraische Relation (5) als erklärt ansehen kann, heißt insbesondere ein „*algebraisches Gebilde*“. Es bezieht sich diese Benennung auf die einzelne algebraische Funktion w, der die voraufgehende Betrachtung gewidmet ist. Alle sonstigen algebraischen Funktionen von z, welche unsere Fläche F_m zum Felde haben, mögen als „zu dem algebraischen Gebilde gehörig“ bezeichnet werden. Wir wollen hierbei sogar noch einen Schritt weiter gehen und *alle auf der Fläche F_m eindeutigen Funktionen, die in den Verzweigungspunkten das erforderliche Verhalten zeigen (vgl. S. 28ff.), und die bis auf endliche viele Pole*[2] *überall analytisch sind, als „zum algebraischen Gebilde gehörig“ bezeichnen.*[3]

Es ist nun zunächst einleuchtend, *daß jeder rationale Ausdruck $R(w, z)$ von w und z zu unserem Gebilde gehört.*[4] Aber es gilt auch umgekehrt der Satz, *daß jede im Sinne unserer Erklärung zum algebraischen Gebilde gehörende Funktion W in w und z rational darstellbar ist:*

$$W = R(w, z). \tag{6}$$

---

1) Da das Produkt in jeder Umgebung einer Stelle z_0 identisch verschwindet, so hat ebendort mindestens einer der Faktoren unendlich viele Nullpunkte, woraus das identische Verschwinden dieses Faktors folgt.

2) Die *Endlichkeit* der Anzahl der Pole nehmen wir hier in die Erklärung auf. Bei der algebraischen Funktion w folgt diese Endlichkeit aus der Geschlossenheit des Feldes auf Grund einer schon öfter durchgeführten Überlegung.

3) Hierin liegt tatsächlich eine Erweiterung, wie denn z. B. jetzt auch alle rationalen Funktionen $R(z)$ von z allein zum Gebilde gehören, obwohl bei ihnen das Feld die schlichte z-Ebene ist.

4) Dabei soll nur der Fall, daß $R(w, z)$ mit ∞ identisch ist, ausgeschlossen sein, insofern hier die im Texte gegebenen Erklärungen nicht passen würden.

Man nenne nämlich $W_1, W_2, \ldots, W_m$ die den m Blättern von F_m entsprechenden Zweige der Funktion W und bilde die m Summen:

$$W_1 w_1^s + W_2 w_2^s + \cdots + W_m w_m^s \quad \text{für} \quad s = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Wir erkennen wie oben bei (1) in ihnen m rationale Funktionen von z und gelangen zu m Gleichungen:

$$W_1 w_1^s + W_2 w_2^s + \cdots + W_m w_m^s = R^{(s)}(z).$$

Da keine zwei unter den Zweigen $w_1, w_2, \ldots, w_m$ identisch sind, so ist die Determinante dieses Systems eine nicht identisch verschwindende Funktion, deren Quadrat in z rational ist und die Diskriminante der Gleichung m^{ten} Grades (3) liefert.[1]) Stellen wir demnach die Lösung W_1 unseres Systems als Determinantenquotient dar, so erweist sich W_1 rational in $z, w_1, w_2, \ldots, w_m$ und dabei insbesondere symmetrisch in $w_2, w_3, \ldots, w_m$. Nun sind aber $w_2, w_3, \ldots, w_m$ die Wurzeln derjenigen Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren linke Seite wir mittelst Division der linken Seite von (3) durch $(w - w_1)$ gewinnen. Die rationalen symmetrischen Funktionen der $w_2, w_3, \ldots, w_m$ sind demnach in den Koeffizienten dieser Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, d. h. also in z und w_1 rational darstellbar. Also erhalten wir auch eine Darstellung:

$$W_1 = R(w_1, z).$$

Von hieraus gelangen wir am einfachsten mittelst der analytischen Fortsetzung zu der auf alle Blätter der F_m bezogenen Gleichung (6).

Das System aller Funktionen $R(w, z)$ hat die Eigenschaft, daß sowohl die Summe wie die Differenz, das Produkt und der Quotient[2]) zweier Funktionen des Systems wieder eine Funktion eben dieses Systems liefern. Einer von R. Dedekind[3]) innerhalb der Zahlentheorie eingeführten Sprechweise folgend bezeichnet man, um die aus der Reproduktion gegenüber Addition usw. hervorgehende Zusammengehörigkeit der Funktionen unseres Systems zu kennzeichnen, dieses System als einen *„Körper“* von Funktionen oder *„Funktionenkörper“*. Genauer spricht man zum Unterschiede von etwaigen sonstigen zum Gebilde gehörenden analytischen Funktionen von dem *zum algebraischen Gebilde* (5) *gehörenden Körper der „algebraischen“ Funktionen.*

---

1) S. etwa H. Weber, „Lehrbuch der Algebra“ (Braunschweig, 1898), Bd. 1, S. 167.

2) Nur hat man die mit 0 identische Funktion, welche dem Systeme angehören muß, niemals als Divisor zuzulassen, da wir die mit ∞ identische Funktion $R(w, z)$ oben ausgeschlossen haben.

3) Vgl. P. G. Lejeune Dirichlet „Vorlesungen über Zahlentheorie“, herausgegeben und mit Zusätzen verse ıen von R. Dedekind, 4. Aufl. (Braunschweig 1894), S. 452.

Für gewöhnlich definiert man das einzelne algebraische Gebilde durch Angabe einer irreduziblen algebraischen Gleichung (5) und hat dann hinterher die diesem Gebilde zugehörige Riemannsche Fläche F_m zu konstruieren.[1]) Wenn wir oben, der Methode Riemanns folgend, die algebraische Funktion $w = \varphi(z)$ durch Angabe ihres Feldes F_m erklärten, so tritt dann freilich die Frage auf, ob auch für jede beliebig gewählte Riemannsche Fläche F_m eine zugehörige Funktion existiert, welche diese F_m zum Felde hat. Riemann[2]) selbst hat diese Frage bejahend beantwortet, wenn auch seine Beweismethode sich als nicht einwurfsfrei erwies. Da das fragliche Existenztheorem Riemanns in der Folge keine grundsätzliche Rolle spielt, so gehen wir auf die späterhin gefundenen Beweismethoden sowie auf die gleichfalls gewonnene Verbesserung des ursprünglichen Riemannschen Beweisverfahrens nicht ein.[3]) Wir begnügen uns mit der Angabe des Satzes, *daß in der Tat zu jeder Riemannschen Fläche F_m eine Funktion $w = \varphi(z)$, die F_m zum Felde hat, existiert; damit gibt es dann zugleich einen ganzen Körper zugehöriger algebraischer Funktionen, der durch F_m als eindeutig definiert anzusehen ist.* Die ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes gehört in die allgemeine Theorie der algebraischen und der Abelschen Funktionen.

§ 17. Der Grad des Zusammenhangs einer Riemannschen Fläche F_m.

Neben den algebraischen Funktionen $R(w, z)$ sind jetzt weiter als zum betrachteten algebraischen Gebilde gehörende analytische Funktionen die Integrale der algebraischen Funktionen:

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z} R(w, z)\, dz$$

zu nennen, welche man als die *„algebraischen“* oder *„Abelschen“ Integrale des Gebildes* bezeichnet. Unter z_0 und z hat man dabei Stellen in der Fläche F_m zu verstehen und als Integrationsbahn irgendeine in F_m von z_0 nach z ziehende reguläre Kurve zu denken. Für die Untersuchung dieser Integrale und insbesondere ihrer Vieldeutigkeit sind die in § 2, S. 4ff., allgemein entwickelten Sätze maßgeblich.

1) Man vgl. hierüber „Osgood“, S. 400.

2) „Theorie der Abelschen Funktionen“, Journ. f. Math., Bd. 54 (1857), Art. 3 der Einleitung; siehe auch Riemanns Werke, S. 89 ff. der ersten Aufl.

3) S. hierüber H. Weyl, „Die Idee der Riemannschen Fläche“ (Leipzig und Berlin, 1913), S. 91 ff., wo auch die in Betracht kommende Literatur zusammengestellt ist (S. 93).

Als erste hierbei grundsätzliche Frage tritt diejenige nach dem *Grade des „Zusammenhangs“* der Fläche F_m auf. Die besonderen bei der Inversion der rationalen Funktionen S. 64ff. gewonnenen Flächen F_m konnten in jedem Falle eindeutig und stetig[1]) auf eine schlichte und vollständige Kugelfläche abgebildet werden. *Flächen* F_m, *die eindeutig und stetig auf eine schlichte und vollständige Kugelfläche abbildbar sind, besitzen demnach den „Zusammenhang der Kugelfläche“, und wir nennen sie dieserhalb „einfach zusammenhängend“.* Es liegt hier freilich gegenüber den S. 3 betrachteten Bereichen T_1 mit einer Randkurve insofern ein Unterschied vor, als die Kugelfläche ein geschlossener Bereich ist, der keinen einzigen Randpunkt besitzt.[2]) Einen „Querschnitt“ im damaligen Sinne können wir demnach auf der Kugelfläche nicht anbringen, wohl aber einen in sich zurücklaufenden und sich selbst nicht kreuzenden Schnitt, einen sogenannten *„Rückkehrschnitt“*. Dabei ist es das *Kennzeichen des „einfachen“ Zusammenhanges* der Kugelfläche, *daß jeder Rückkehrschnitt diese Fläche in zwei getrennte Stücke zerlegt.*

Aus funktionentheoretischen Erwägungen leiteten wir bei einer Fläche F_m der fraglichen Art die Relation (4) S. 64 für die Gesamtblätteranzahl m und die den l Verzweigungspunkten zukommenden Blätteranzahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ ab. Wir behaupten jetzt, *daß diese Relation für alle Flächen* F_m *vom Zusammenhang der Kugelfläche charakteristisch ist.* In der Tat ist diese Relation nichts weiter als ein Ausdruck des „Eulerschen Polyedersatzes“, den wir in der bekannten Gestalt:

$$E + F = K + 2 \tag{2}$$

darstellen, unter E, F, K die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders verstanden.

Um dies einzusehen, wolle man die Riemannsche Fläche F_m mit einem „geschlossenen“, sich selbst nicht überkreuzenden, überall stetig gekrümmten Schnitte S versehen, der vom ersten Verzweigungspunkt e_1 durch alle übrigen hin und bis zum ersten zurückläuft. Die zwischen e_1 und e_2, e_2 und e_3 usw. verlaufenden Teile von S denken wir als Verzweigungsschnitte $S_1, S_2, \ldots$ benutzt. Nun sollte F_m eindeutig und stetig (nicht notwendig konform) auf eine Kugeloberfläche beziehbar sein. Vollziehen wir die Übertragung, so wird jedes Blatt infolge seiner Durchschneidung längs S zwei einfach zusammenhängende Bildbereiche liefern und die ganze Kugelfläche erscheint schlicht und vollständig bedeckt durch $2m$ solche Bereiche. Die Ecken der vorliegenden Kugel-

1) ja sogar konform, was jedoch jetzt zunächst unwesentlich ist.

2) Dieser Unterschied wird später dadurch aufgehoben, daß wir einen einzelnen Punkt auf der Fläche markieren und als „Randpunkt“ ansehen.

teilung entsprechen den l Verzweigungspunkten. Von jeder Ecke laufen $2\nu_i$ Kanten aus, so daß die Kantenanzahl $\sum_{i=1}^{l}\nu_i$ ist.

Für die gewonnene Einteilung der Kugelfläche gilt der Eulersche Satz (2), und zwar haben wir, wie gerade festgestellt, zu setzen:

$$E = l, \quad F = 2m, \quad K = \sum_{i=1}^{l}\nu_i.$$

Schreiben wir noch:

$$-l + \sum_{i=1}^{l}\nu_i = \sum_{i=1}^{l}(\nu_i - 1),$$

so folgt durch Eintragung der angegebenen Werte in (2) nach Division mit 2:

$$0 = -m + 1 + \sum_{i=1}^{l}\frac{\nu_i - 1}{2},$$

womit die Relation (4) S. 64 in der Tat wiedergewonnen ist.

Zur Erläuterung der allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Flächen F_m betrachten wir jetzt zunächst ein Beispiel, das alsbald in den Mittelpunkt unserer Untersuchung rücken wird, nämlich eine *zweiblättrige Riemannsche Fläche* F_2 *mit vier Verzweigungspunkten.* Bei der Herstellung dieser Fläche haben wir längs des ersten von e_1 nach e_2 laufenden Schnittes S_1 das linke Ufer des oberen Blattes an das rechte des unteren Blattes zu heften und weiter natürlich das linke untere Ufer an das rechte obere. Damit dann aber bei e_2 auch wirklich ein Verzweigungspunkt auftritt, ist längs S_2 das einzelne linke Ufer mit dem rechten des gleichen Blattes zu verbinden. Längs S_3 sind die Blätter wieder wie längs S_1 über Kreuz aneinander zu heften. Wir wollen die Sachlage durch Fig. 15 zur Anschauung bringen, in der wir diejenigen Teile S_1 und S_3 der übrigens punktierten Kurve S, in denen die beiden Blätter über Kreuz zusammenhängen, stärker markiert haben.

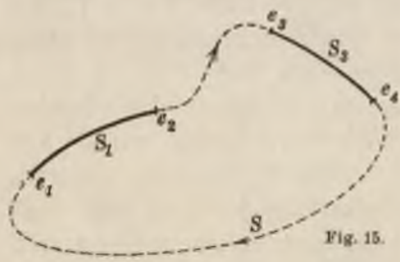


Fig. 15.

Es ist nun leicht zu zeigen, *daß die hier vorliegende Fläche den „Zusammenhang eines Kreisringes" besitzt.* Wir können sie geradezu, indem wir die Blätter der Fläche als elastische Membranen denken, durch stetige Gestaltsänderung in einen Kreisring überführen. Wir nehmen zunächst eine stetige Deformation derart vor, daß alle vier Verzweigungspunkte auf eine Gerade rücken, auf der sie in der Anordnung e_1, e_2, e_3, e_4

aufeinanderfolgen: S_1 und S_3 seien dann die geradlinigen Strecken von e_1 nach e_2 bzw. e_3 nach e_4. Bei den Blättern der Fläche F_2 denken wir zunächst die oberen Seiten als Trägerinnen der Werte des Argumentes z und etwaiger Funktionen. Es erweist sich indessen als zweckmäßig, daß wir bei einem, etwa dem oberen Blatte, die untere Seite zu dieser Trägerin machen. Wir können dies dadurch erreichen, daß wir den Zusammenhang beider Blätter längs S_1 und S_3 vorübergehend nochmals aufheben, das obere Blatt um die durch die Punkte e laufende Gerade umklappen, so daß die bisher obere Seite nun die untere ist, und endlich die Zusammenheftung der Blätter wiederherstellen. Dabei gehören jetzt sowohl längs S_1 als S_3 das linke untere mit dem „linken" oberen Ufer und das rechte untere mit dem „rechten" oberen Ufer zusammen.

Die jetzt gewonnene Gestalt der Fläche wird noch etwas anschaulicher, wenn wir das obere Blatt unter Rücksicht auf die Elastizität der Membranen ein wenig heben. Dabei wird die Fläche die in Fig. 16 skizzierte Gestalt darbieten, wo an Stelle der bisherigen Verzweigungsschnitte S_1 und S_3 zwei langgezogene Löcher auftreten und übrigens jedes der beiden Blätter über den in der Figur gezeichneten Rand hinaus ins Unendliche fortzusetzen ist. Die einander zugekehrten Seiten der Blätter sind die Trägerinnen der Werte z bzw. etwaiger Funktionswerte.


Fig. 16.

Um die Geschlossenheit des einzelnen Blattes im Unendlichen der Anschauung zugänglich zu machen, wollen wir, einer schon bisher vielfach benutzten Maßregel folgend, das obere Blatt nach oben hin, das untere aber nach unten hin kugelförmig in das Endliche ziehen. Unsere Fläche gewinnt dabei die in Fig. 17 angegebene Gestalt, wobei die Außenseite die Trägerin der z-Werte ist. Jetzt ist es nur noch ein Schritt, um durch eine weitere stetige Gestaltsänderung den „Kreisring" der Fig. 18 (S. 86) zu gewinnen.


Fig. 17.

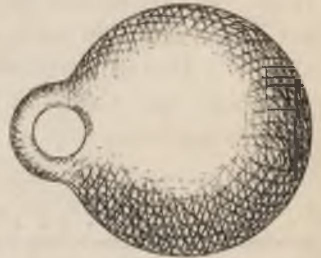
Klein[1]) benutzt an Stelle des Kreisringes auch *eine mit einem Henkel versehene Kugel*, wie

1) „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale" (Leipzig, 1882), S. 27.


Fig. 18.

dieselbe in Fig. 19 dargestellt ist und aus dem Kreisring leicht durch stetige Deformation hergestellt werden kann. Diese Vorstellung macht die Verallgemeinerung besonders anschaulich, indem wir uns leicht das Bild einer mit einer gewissen Anzahl, sagen wir, mit p Henkeln versehenen Kugelfläche bilden können (vgl. Fig. 20, wo $p = 3$ ist).

Gehen wir von einer zweiblättrigen Fläche F_2 mit $(2p+2)$ Verzweigungspunkten $e_1, e_2, \ldots, e_{2p+2}$ aus, deren Blätter (analog den oben beschriebenen Verhältnissen) längs $S_1, S_3, \ldots, S_{2p+1}$ über Kreuz zusammenhängen, so führt die Wiederholung der an der obigen F_2 vollzogenen Umgestaltung hier, wie man leicht übersieht, zu einer mit p Henkeln versehenen Kugel. *Aber auch jede andere Riemannsche Fläche F_m kann in eine mit einer gewissen Anzahl von Henkeln versehenen Kugelfläche stetig umgestaltet werden*[1]), *so daß wir im Bilde dieser Fläche zugleich den Grad des Zusammenhanges der ursprünglichen F_m anschaulich zu erfassen imstande sind.*


Fig. 19.

---

1) Es geht dies aus Untersuchungen von J. Lüroth und A. Clebsch über die Gestalt der Riemannschen Flächen hervor; siehe Lüroth „Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemannschen Fläche", Math. Ann., Bd. 4 (1871), S. 181 und Clebsch „Zur Theorie der Riemannschen Flächen", Math. Ann., Bd. 6 (1872), S. 216. Man hat zunächst jeden Verzweigungspunkt mit ν Blättern, sofern $\nu > 2$ ist, in $(\nu - 1)$ zweiblättrige Verzweigungspunkte aufzulösen. Sodann zeigt sich, daß man den Schnitt S durch die Verzweigungspunkte derart auswählen kann, daß folgende Gestalt der Fläche vorliegt. Die beiden untersten Blätter bilden für sich genommen eine F_2 mit $(2p+2)$ Verzweigungspunkten, wie wir sie schon im Texte betrachteten; jedes folgende Blatt ist dann nach unten hin nur an das unmittelbar darunterliegende mit *zwei* Verzweigungspunkten in einem zwischen ihnen verlaufenden Verzweigungsschnitte geheftet. Eine F_2 mit *zwei* Verzweigungspunkten verwandelt man nun mittelst einer Operation, wie wir sie im Texte an der F_2 mit vier Punkten e ausübten, leicht stetig in eine schlichte Ebene um. Beziehen wir diese Umwandlung auf die beiden obersten Blätter der F_m, so ergibt sich eine F_{m-1} von gleicher Bauart. Die mehrfache Wiederholung des gleichen Verfahrens führt schließlich zu einer F_2 mit $(2p+2)$ Verzweigungspunkten, welche wir bereits in eine Kugelfläche mit p Henkeln umwandelten.


Fig. 20.

Wir haben diese allgemeine Angabe ohne ausführlichen Beweis gemacht, da sich unsere späteren Entwicklungen allein auf die F_2 mit vier Verzweigungspunkten beziehen. Um aber die Stellung dieser F_2 in der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionen zu kennzeichnen mögen auch noch folgende Ausführungen über eine beliebige F_m Platz finden.

Es ist zunächst unzweifelhaft, daß die Anzahl p der Henkel ein wichtiges Attribut der Riemannschen Fläche F_m ist. Man faßt alle Flächen mit dem gleichen p zu einem *„Geschlechte“ von Flächen* zusammen und spricht in diesem Sinne von *„einer Riemannschen Fläche F_m des Geschlechtes p“*. Es wird erwünscht sein, eine Regel zu besitzen, nach der wir unmittelbar für die gegebene Fläche F_m das Geschlecht p bestimmen können. Diese Regel liefert uns der auf unsere Henkelfläche übertragene Eulersche Polyedersatz. Da dieser Satz gewöhnlich nur für einfach zusammenhängende Flächen aufgestellt wird, so werden einige Andeutungen über die verallgemeinerte Formel am Platze sein.

Die F_m durchschneiden wir wieder längs einer alle Verzweigungspunkte durchlaufenden, stetig gekrümmten Kurve S, welche sich nicht überkreuzt, aber in sich zurückläuft. Das eindeutige stetige Abbild des Schnittes S auf der Henkelfläche liefert dann wieder eine polyederartige Einteilung dieser Fläche mit:

$$(3) \qquad E = l, \quad F = 2m, \quad K = \sum_{i=1}^{l} \nu_i .$$

An jedem der p Henkel wollen wir weiter einen Rückkehrschnitt Q ausführen in der Art, wie in der unten folgenden Fig. 23 die Querschnitte Q_1, Q_1', Q_1'' gelegt sind. Dabei möge der Einfachheit halber Q durch keine der E Ecken unserer polyedrischen Teilung hindurchlaufen. Den Schnitt Q wollen wir der polyedrischen Teilung zufügen und überlegen, wie dieselbe dadurch geändert wird.

Jedenfalls ist Q eine sich nicht überkreuzende geschlossene Linie, welche die Henkelfläche nicht „zerstückt“ (nicht in getrennte Stücke zerlegt). Daraus folgt, daß Q nicht im Innern einer einzigen unter den $2m$ „Flächen“ verläuft; denn diese ist einfach zusammenhängend, so daß eine in ihrem Innern geschlossene Linie notwendig ein getrenntes Stück abschnitte. Q wird demnach mehrere „Flächen“ durchziehen und damit durch die „Kanten“ der Einteilung in mehrere, sagen wir in t Segmente zerlegt. Jedes dieser Segmente erhöht die Flächenzahl um *eine* Einheit; der gemeinsame Endpunkt zweier Segmente liefert *eine* neue Ecke und vermöge der Teilung der von Q in dieser Ecke zerschnittenen Kante der anfänglichen Teilung die Erhöhung der Kantenanzahl gleichfalls

um *eine* Einheit. Außerdem kommen die t Segmente selbst als neue Kanten hinzu, so daß unsere Anzahlen nach Zusatz des einzelnen Schnittes Q die folgenden sind:

$$E + t, \quad F + t, \quad K + 2t.$$

Man wolle nun weiter die beiden mittelst des Schnittes Q getrennten Henkelstücke auseinanderbiegen und die Löcher durch zwei neue, Flächen decken. Dann liefert jede der t neuen Ecken ein Eckenpaar, es sind weiter zwei Flächen hinzugekommen, und jedes der t Segmente von Q liefert ein Kantenpaar, so daß unsere Anzahlen die folgenden sind:

$$E + 2t, \quad F + 2 + t, \quad K + 3t.$$

Jetzt vollziehe man die gleiche Operation an allen p Henkeln nenne die entsprechenden Zahlen t genauer $t_1, t_2, \ldots, t_p$ und gelangt schließlich zu einer Einteilung mit folgenden Anzahlen:

$$E_1 = E + 2\sum t_i, \quad F_1 = F + 2p + \sum t_i, \quad K_1 = K + 3\sum t_i.$$

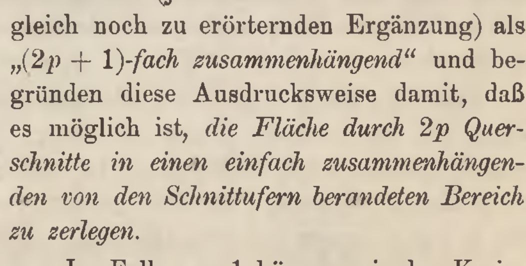
Aber die so gewonnene Fläche hat wieder den Zusammenhang der Kugelfläche, und also gilt $E_1 + F_1 = K_1 + 2$, was als verallgemeinerte Eulersche Polyederformel liefert:

$$E + F + 2p = K + 2.$$

Tragen wir hier die Werte (3) ein, so ergibt sich der Satz: *Eine m-blättrige Riemannsche Fläche* F_m *mit l Verzweigungspunkten, in denen bzw.* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ *Blätter zusammenhängen, hat das Geschlecht:*

$$p = -m + 1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{\nu_i - 1}{2}. \tag{4}$$

Eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes p bezeichnen wir nun im Anschluß an die Sprechweise S. 3 (jedoch unter Vorbehalt einer gleich noch zu erörternden Ergänzung) als „$(2p + 1)$-*fach zusammenhängend*“ und begründen diese Ausdrucksweise damit, daß es möglich ist, *die Fläche durch* $2p$ *Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden von den Schnittufern berandeten Bereich zu zerlegen.*



Im Falle $p = 1$ können wir den Kreisring der Fig. 18 benutzen. Wir ziehen, wie Fig. 21 andeutet, zunächst den Rückkehrschnitt Q_1. Derselbe „zerstückt“ die Fläche nicht; denn es ist möglich, wie Fig. 21 gleichfalls darlegt, einen Schnitt Q_2 von einem Uferpunkte des Schnittes Q_1 zum gegenüberliegenden Uferpunkte zu führen,

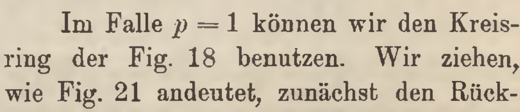
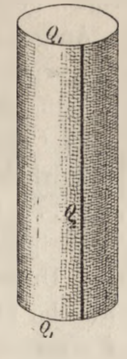


Fig. 21.

ohne Q_1 zu überschreiten. Auf dem unzerschnittenen Ringe würde auch Q_2 ein Rückkehrschnitt sein; man bezeichnet zwei in dieser Art zusammengehörige Schnitte als *ein Paar „konjugierter“ Rückkehrschnitte.* Nach Durchschneidung längs Q_1 können wir den Ring auseinanderbiegen und in die Gestalt des Zylinders der Fig. 22 überführen. Schneiden wir den Zylinder jetzt längs Q_2 auf, so ist die Abwickelung desselben auf das in Fig. 22 gleich mit angegebene Viereck möglich: *Durch die Schnitte Q_1 und Q_2 wird hiernach der Kreisring in einen einfach zusammenhängenden Bereich* T_1 *mit einem in sich zurücklaufenden, aus den vier Schnittufern bestehenden Rande verwandelt.*



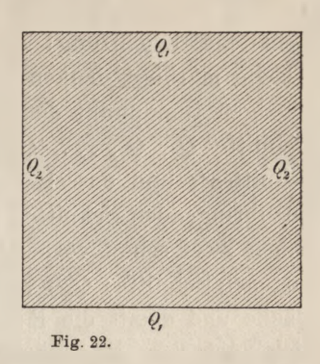


Fig. 22.

Haben wir nun eine Fläche mit p Henkeln, so können wir an jedem Henkel ein Paar „konjugierter Rückkehrschnitte“ Q_1, Q_2; Q_1', Q_2'; ...; $Q_1^{(p-1)}$, $Q_2^{(p-1)}$ anbringen (vgl. Fig. 23 für $p = 3$) und verwandeln

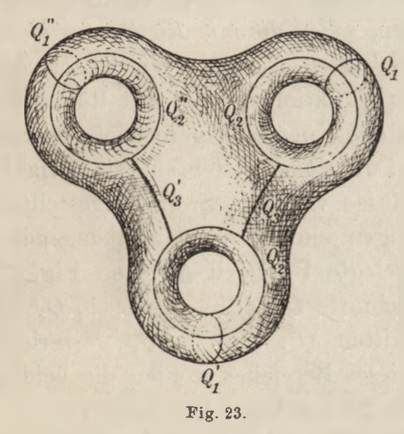


Fig. 23.

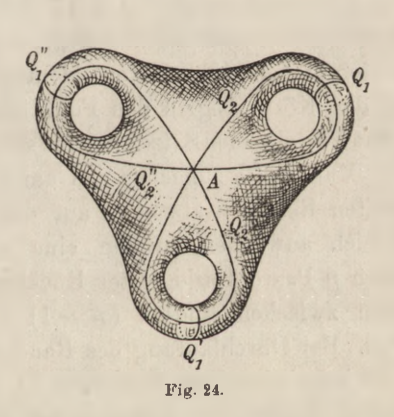


Fig. 24.

unsere Fläche hierdurch in einen p-fach zusammenhängenden Bereich T_p, welcher p getrennte, aus je vier Schnittufern bestehende Randkurven aufweist. Indem wir jetzt noch $(p-1)$ eigentliche Querschnitte $Q_3, Q_3', \ldots, Q_3^{(p-2)}$, wie Fig 23 darlegt, zwischen den bisherigen Randkurven anbringen, gelangen wir zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche.

Diese an sich anschauliche Maßregel ist nun aber, um zum Schlusse zu führen, noch zu modifizieren. Wir wollen die Schnitte Q_3, Q_3', ..., $Q_3^{(p-2)}$ unter Dehnung der Schnitte Q_2, Q_2', ..., $Q_2^{(p-1)}$ auf Punkte zusammenziehen und sodann (wie Fig. 24 wieder für $p = 3$ erläutert)

die $Q_2, Q_2', \ldots, Q_2^{(p-1)}$ noch weiter derart über die Fläche hinziehen, daß sie alle von einem gemeinsamen Ausgangspunkte A auslaufen und zu ihm zurückkehren. Wir wollen geradezu (und dies ist die noch vorbehaltene Ergänzung) diesen Ausgangspunkt A zu Anfang auf der Fläche markiert denken und (bevor irgendein Schnitt vollzogen ist) als einzigen Randpunkt der Fläche auffassen. Dann bekommt jeder unserer Schnitte $Q_2, Q_2', \ldots, Q_2^{(p-1)}$ den Charakter eines eigentlichen „Querschnittes"; und dasselbe gilt natürlich auch von den demnächst noch anzubringenden Schnitten $Q_1, Q_1', \ldots, Q_1^{(p-1)}$, insofern der einzelne von ihnen zwei schon vorhandene Randpunkte (Uferpunkte des bereits gezogenen Schnittes $Q_2^{(i)}$) verbindet. Unsere obige Behauptung, die Henkelfläche und damit die Riemannsche Fläche F_m (auf der wir uns natürlich auch den „Randpunkt" A markiert denken müssen) können durch $2p$ „Querschnitte" in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt werden, ist damit erwiesen.[1])

§ 18. Weiteres über algebraische Funktionen speziell bei $p = 0$ und $p = 1$. Grundproblem der Theorie der elliptischen Funktionen.

Bei den nächsten Betrachtungen, welche sich auf die geometrischen Vorstellungen von § 17 gründen, *sollen die mit Konstanten identischen Funktionen ausdrücklich ausgeschlossen werden.* Wir hatten die mit endlichen Konstanten identischen Funktionen oben mit Rücksicht auf den Körperbegriff den Funktionen des Körpers zugerechnet. Soweit die aufzustellenden Sätze auch für solche Funktionen gelten, sind sie trivial.[2])

Man wolle zunächst den am Schlusse von § 8, S. 39 aufgestellten zweiten Residuensatz etwa auf denjenigen einfach zusammenhängenden Bereich anwenden, in den eine vorgelegte F_m nach Art von Fig. 23 durch p Paare konjugierter Rückkehrschnitte $Q_1, Q_2; \ldots; Q_1^{(p-1)}, Q_2^{(p-1)}$ nebst zwischengefügten $(p-1)$ Schnitten $Q_3, Q_3', \ldots, Q_3^{(p-2)}$ zerlegt wird. Bei Durchlaufung des Randes dieses Bereiches werden die beiden Ufer jedes einzelnen Schnittes in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Bilden wir demnach das auf den gesamten Rand des fraglichen Bereiches bezogene Integral (5) S. 39 für irgendeine Funktion $f(z)$ des durch F_m erklärten Körpers (wobei wir annehmen dürfen, daß die Schnitte Q nicht gerade durch Nullpunkte oder Pole von $f(z)$ hin-

1) Der Zusatz des „Randpunktes" ist zur strengen Erfüllung unseres Satzes natürlich auch in dem zunächst besonders besprochenen Falle $p = 1$ nötig.

2) Der sogleich zu erklärende Begriff der „Wertigkeit" verliert bei einer mit einer Konstanten identischen Funktion überhaupt seine Bedeutung. Wird demnach weiterhin von einer n-wertigen Funktion des Körpers gesprochen, so ist damit implizite bereits gesagt, daß die Funktion nicht mit einer Konstanten identisch ist.

durchlaufen), so heben sich je die beiden Bestandteile des Integrales, welche sich auf die Ufer des einzelnen Querschnittes beziehen, als entgegengesetzt gleich auf, und das Gesamtintegral bekommt den Wert 0: *Für jede nicht mit einer Konstanten identische Funktion des Körpers ist die Summe der Ordnungen aller auf* F_m *eintretenden Pole der Funktion gleich der Summe der Ordnungen aller Nullpunkte.*[1]) Unter Aufnahme einer für die rationalen Funktionen S. 62 besprochenen Denkweise können wir auch sagen: *Eine nicht mit einer Konstanten identische Funktion des Körpers hat auf der Riemannschen Fläche genau so viele Pole erster Ordnung als Nullpunkte erster Ordnung; ist diese Anzahl gleich n, so nimmt die Funktion jeden beliebig vorgeschriebenen komplexen Wert wieder genau in n Punkten der* F_m *an, und sie möge dementsprechend fortan als eine „n-wertige" Funktion des Körpers bezeichnet werden.* Der zweite Teil des Satzes folgt aus dem ersten wieder durch die schon bei den rationalen Funktionen angewandte Schlußweise (vgl. S. 46 und 62). Natürlich dürfen bei den n Punkten, in denen die Funktion einen vorgeschriebenen Wert annimmt, irgendwelche Koinzidenzen eintreten; z. B. liefern k zusammenfallende Nullpunkte dann eben einen Nullpunkt k^{ter} Ordnung.[2])

Für irgendeine Funktion W des Körpers können wir die Darstellung (6) S. 80 in z und der damaligen Funktion w zugrunde legen, aus welcher unter Rücksicht auf (5) S. 79 folgt:

$$(1)\qquad \frac{dW}{dz} = \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dz} = \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial w}\cdot\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)}.$$

---

1) Für die Abschätzung der Ordnung eines etwa in einem Verzweigungspunkte liegenden Nullpunktes oder Poles gelten natürlich die schon S. 38 angegebenen Regeln.

2) Nach der S. 39 gegebenen allgemeinen Fassung des benutzten Residuensatzes wäre es übrigens gar nicht nötig gewesen, die F_m vorab durch Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich zu verwandeln. Wir hätten in einem Blatte der F_m um eine Stelle z_0, in der die Funktion weder einen Nullpunkt noch Pol hat, eine Kurve herumlegen können und hätten dann wie S. 62 bei den rationalen Funktionen verfahren. Andererseits mag auch noch folgende besonders elementare Auffassung Erwähnung finden, bei welcher wir die $2m$ „Flächen" der polyedrischen Einteilung auf der „Henkelfläche" zugrunde legen; die „Kanten" dieser Einteilung denken wir nötigenfalls so abgeändert, daß sie nirgends durch einen Nullpunkt oder Pol der Funktion laufen. Das auf den Rand der einzelnen „Fläche" bezogene Integral (5) S. 39 gibt die Summe der Ordnungen der Nullpunkte in dieser „Fläche", vermindert um die Summe der Ordnungen der daselbst gelegenen Pole. Die Summe aller $2m$ Integrale ist aber wieder gleich 0, da die beiden „Ufer" jeder Kante bei der Integration in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden. Aus dem Verschwinden der Integralsumme aber folgt wieder das Ergebnis des Textes.

Ist nun W eine n-wertige Funktion des Körpers, so wird die Fläche F_m durch W konform auf eine n-blättrige Riemannsche Fläche F_n über der W-Ebene abgebildet. Die Umgebung einer endlichen, von einem Verzweigungspunkte e_i verschiedenen Stelle z_0 in einem Blatte der F_m liefert dabei ein schlichtes Abbild, falls die Ableitung (1), welche zufolge der rechten Seite von (1) selber wieder eine Funktion des Körpers ist, im Punkte z_0 endlich und von 0 verschieden ist. Hat die Funktion (1) im Punkte z_0 aber einen Nullpunkt der Ordnung λ, so überträgt sich die Umgebung von z_0 auf eine Windungsfläche von $\nu = \lambda + 1$ Blättern. Bei einer eingehenden Untersuchung würden wir die Verzweigungspunkte von F_m, die Pole von W usw. noch besonders zu untersuchen haben. Doch führt uns dies wieder zu weit in die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen ab. Jedenfalls haben wir den Satz gewonnen, *daß die F_m mittels der n-wertigen Funktion W des Körpers eindeutig, stetig und konform auf eine n-blättrige Riemannsche Fläche F_n übertragen wird, die selbstverständlich wieder dem gleichen Geschlechte p angehört.*

Ist nun z. B. die in Gleichung (5) S. 79 vorliegende Funktion w eine n-wertige Funktion, so wird jetzt umgekehrt auf der n-blättrigen Fläche F_n über der w-Ebene das bisherige z in Abhängigkeit von w eine n-deutige algebraische Funktion, welche man übrigens direkt wieder durch die Gleichung (5) S. 79 gegeben denken kann. Diese Gleichung wird in z eben auf den n^{ten} Grad ansteigen, ein Umstand, den wir gelegentlich durch die Schreibweise:

$$(2) \qquad G(\overset{m}{\bar{w}}, \overset{n}{\bar{z}}) = 0$$

der Gleichung zwischen w und z hervorheben. Dabei ist natürlich diese Funktion z von w auf der F_n m-wertig.

Wir können nun aber gleich noch einen Schritt weiter gehen und betreffs der Funktionen $R(w, z)$ folgenden einleuchtenden Satz aussprechen: *Die gesamten Funktionen des bisherigen Körpers bilden, in Abhängigkeit von w betrachtet, gerade genau den durch die Riemannsche Fläche F_n zu definierenden Körper algebraischer Funktionen von w.*[1])

Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir an Stelle von w irgendeine nicht mit einer Konstanten identische Funktion W des ersten Körpers zugrunde legen. Um aber gegenüber diesen unendlich vielen Riemannschen Flächen zu einer Auffassung, die keine Fläche bevorzugt, zu gelangen, könnten wir sie etwa durch unsere Henkelfläche ersetzen, die wir F nennen wollen, und auf die alle jene Flächen

1) Hier sind die mit endlichen Konstanten identischen Funktionen natürlich mit einbegriffen.

eindeutig und stetig bezogen sind. Jeder Funktion entspricht dann *eine eindeutige Belegung von* F *mit Werten,* und wir werden die Belegung wieder *„m-wertig"* nennen, wenn eine beliebig gewählte komplexe Zahl immer an m Stellen von F aufgetragen ist. Den bisherigen Körpern algebraischer Funktionen entspricht dann ein sie alle liefernder *„Körper von Belegungen"* der Fläche F von folgender Eigenschaft: *Ist irgendeine m-wertige Belegung mit Zahlen z und irgendeine zweite n-wertige Belegung mit Zahlen w herausgegriffen, so gilt für die durch die Punkte von* F *einander zugeordneten Zahlen w und z eine algebraische Relation* (2) *vom Grade m in w und vom Grade n in z identisch, d. h. über die ganze Fläche* F *hin Ist diese Gleichung irreduzibel*[1]), *so ist „jede" Belegung des Körpers der vorliegenden Belegungen von* F *in der Gestalt* $W = R(w, z)$ *darstellbar, wie auch umgekehrt jeder nicht mit* ∞ *identische rationale Ausdruck* $R(w, z)$ *eine unserer Belegungen liefert.*

Der entwickelten allgemeinen Auffassung entsprechend haben wir die unterschiedenen Riemannschen Flächen F_m, F_n, ..., welche den einzelnen Belegungen von F zugehören, als nicht wesentlich verschieden anzusehen, und ebensowenig können die ihnen zugehörigen Körper algebraischer Funktionen als wesentlich verschieden gelten. Die Sachlage läßt sich auch noch in folgender Art analytisch einkleiden. Es sei von zwei Belegungen z, Z aus eine Fläche F_m über der z-Ebene und eine F_n über der Z-Ebene hergestellt. Ist w mit z durch eine irreduzible Gleichung (2) verknüpft, so ist durch w und z gewissermaßen ein Koordinatensystem auf F_m gegeben, welches die Punkte von F_m eindeutig zu bestimmen gestattet. Dasselbe möge durch W und Z auf F_n geleistet werden. Nun entspricht aber jedem Punkte von F_m eindeutig ein solcher von F_n, und zwar ist diese Beziehung darstellbar durch ein Gleichungenpaar:

(3) $$W = R_1(w, z), \quad Z = R_2(w, z).$$

Aber auch umgekehrt entspricht einem Punkte von F_n stets ein und nur ein Punkt von F_m, geliefert durch:

(4) $$w = R_3(W, Z), \quad z = R_4(W, Z).$$

1) Die Fälle der Reduzibilität der Gleichung (2) können wir wieder nicht allgemein verfolgen. Wir weisen nur auf das Beispiel hin, daß wir neben der schon gewählten m-wertigen Belegung z eine zweite Belegung w als rationale Funktion l^{ten} Grades $w = R(z)$ von z aussuchen, deren Wertigkeit dann $n = l \cdot m$ ist. Spalten wir $R(z)$ in den Quotienten $g_1(z) : g_0(z)$ zweier ganzen Funktionen, so schreibt sich die Gleichung (2) vom Grade m in w und n in z so:

$$(g_0(z)w - g_1(z))^m = 0.$$

Ihre linke Seite stellt die m^{te} Potenz eines Polynoms dar. Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt man übrigens in allen Fällen der Reduzibilität.

Die ein-eindeutige Beziehung der beiden Flächen aufeinander ist demnach durch eine umkehrbar rationale Transformation vollziehbar. Umgekehrt ist wieder einleuchtend, daß, wenn diese Beziehung zwischen zwei Flächen vorliegt, sie in unserem Sinne als nicht wesentlich verschieden zu gelten haben.

Gegenüber diesen allgemeinen Auffassungen ist für die ausführliche Untersuchung eines einzelnen Funktionenkörpers die Auffindung einer Funktion von möglichst kleiner Wertigkeit m und damit die Gewinnung einer Riemannschen Fläche von möglichst kleiner Blätterzahl m von grundlegender Bedeutung. Bei den S. 48 und 64 besprochenen Flächen des Geschlechtes $p = 0$ gab es stets *einwertige* Funktionen. Diese Flächen erhielten wir bei Inversion der rationalen Funktionen $w = R(z)$; auf der einzelnen solchen Fläche über der w-Ebene ist dann eben z eine einwertige Funktion, welche die Fläche auf eine F_1, nämlich die schlichte z-Ebene abbildet.

Beim Beweise des am Schlusse von § 16 (S. 82) angegebenen Riemannschen Existenztheorems findet man nun, *daß auf jeder Riemannschen Fläche des Geschlechtes $p = 0$ eine „einwertige" Funktion konstruiert werden kann.*[1]) Bezeichnen wir die Werte derselben mit z, so ist offenbar auch jede lineare Funktion von z:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5}$$

eine einwertige Funktion des zur gegebenen Riemannschen Fläche gehörenden Körpers; und umgekehrt können wir, wie leicht zu sehen ist, jede einwertige Funktion dieses Körpers in einer unter ihnen, die z heiße, in der Gestalt (5) darstellen. Da hierbei nur zu fordern ist, daß die Determinante $(ad - bc)$ der linearen Funktion (5) von 0 verschieden ist (vgl. S. 66), und übrigens für die Funktion z' nur die „Verhältnisse" der Koeffizienten a, b, c, d maßgeblich sind, so haben wir die Auswahl unter *dreifach unendlich vielen einwertigen Funktionen* unsrer Fläche.

In dem ausgewählten z stellen sich nun die gesamten Funktionen des Körpers in der Gestalt $R(z)$ dar. Es folgt: *Im Falle $p = 0$ haben wir im wesentlichen nur einen einzigen Funktionenkörper, denjenigen der „rationalen Funktionen einer komplexen Variabeln".* Auch die dem Körper zugehörigen *Integrale* erledigen sich sofort durch die bekannte Formel:

$$\int R(z)\,dz = R_1(z) + \sum_{i=1}^{n} C_i \log(z - s_i),$$

welche sich den Bezeichnungen von S. 61 anschließt.

1) Man vgl. etwa die Behandlung des Riemannschen Existenzsatzes in den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen" von F. Klein und R. Fricke (Leipzig, 1890 und 1892), Bd. 1, S. 493 ff. Dieses weiterhin oft zu nennende Buch soll fortan durch „Modulfunktionen" zitiert werden.

Ist zweitens $p = 1$, so ist die Existenz einer einwertigen Funktion ausgeschlossen, da man einen Kreisring (vgl. Fig. 18, S. 86) nicht eindeutig und stetig auf eine schlichte Kugelfläche abbilden kann. Eine *zweiblättrige* Fläche F_2 mit vier Verzweigungspunkten hatte uns oben (S. 84) ein erstes Beispiel für eine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ geliefert. *Beim Beweise des Riemannschen Existenztheorems gelingt es, für irgendeine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ eine zweiwertige Funktion zu konstruieren, welche noch dazu an zwei willkürlich wählbaren Stellen der Fläche ihre beiden Pole erster Ordnung hat.*[1]) Bezeichnet man die Werte dieser zweiwertigen Funktion wieder mit z, so ist zugleich:

(6) $$z' = az + b$$

die allgemeinste zweiwertige Funktion der Fläche, welche an den beiden vorgeschriebenen Stellen ihre Pole hat; dabei sind a, b willkürliche endliche Konstante, nur muß a von 0 verschieden sein.

Die zweiwertige Funktion z bildet nun die anfänglich vorgelegte Fläche konform auf *eine zweiblättrige Riemannsche Fläche* F_2 *ab, die als zum Geschlechte $p = 1$ gehörig vier getrennt liegende Verzweigungspunkte hat* (vgl. Formel (4) S. 88). Mindestens drei von den vier Verzweigungspunkten liegen im Endlichen, etwa wieder bei e_1, e_2, e_3. Der vierte Verzweigungspunkt ist entweder auch endlich, etwa bei e_4 gelegen, oder er liegt bei $z = \infty$; letzteres tritt stets und nur dann ein, wenn die beiden für z vorgeschriebenen Pole zusammenfallen und dadurch einen einzigen Pol zweiter Ordnung liefern.

Wir können die beiden eben unterschiedenen Fälle in einen Ausdruck zusammenziehen. Wir setzen im ersten Falle, unter a eine nichtverschwindende komplexe Konstante verstanden:

$$a(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4) = g(z)$$

und wollen bei Anordnung dieser *ganzen Funktion vierten Grades* $g(z)$ nach abfallenden Potenzen von z die Schreibweise:

(7) $$g(z) = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e$$

gebrauchen, wo die Koeffizienten $a, b, \ldots$ natürlich nichts mit denen in (5) und (6) zu tun haben. Wir fassen dann die beiden fraglichen Fälle einfach dadurch zusammen, *daß wir von der ganzen Funktion $g(z)$ nur das Getrenntliegen der „vier" Nullpunkte fordern, aber ein Verschwinden des höchsten Koeffizienten a zulassen;* wird $a = 0$, so rückt dann eben einer der vier Nullpunkte nach $z = \infty$.

Umgekehrt können wir für *jede* ganze Funktion (7), welche die eben ausgesprochene Forderung erfüllt, eine Fläche F_2 konstruieren,

1) Vgl. etwa wieder „Modulfunktionen", Bd. 1, S. 540ff.

deren Verzweigungspunkte die „vier" Nullpunkte von $g(z)$ sind, und deren Geschlecht dann wieder $p = 1$ ist.

Nun erkennt man sofort in:

$$w = \sqrt{g(z)} = \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}$$

eine zur F_2 gehörende algebraische Funktion. Dieselbe erscheint mit z verbunden durch die Gleichung:

$$(8) \qquad w^2 - (az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e) = 0,$$

welche irreduzibel ist, da $g(z)$ nicht das Quadrat einer ganzen Funktion ist. Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis: *Alle beim Geschlechte $p = 1$ existierenden Körper algebraischer Funktionen werden uns geliefert von den durch* (8) *gegebenen algebraischen Gebilden, wo die in Klammern stehende ganze Funktion getrennt liegende Nullpunkte haben soll. Beim einzelnen Gebilde sind die gesamten Funktionen des zugehörigen Körpers gegeben durch:*

$$(9) \qquad R(z, \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}),$$

die zugehörigen Integrale aber durch:

$$(10) \qquad \int R(z, \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e})dz.$$

Die Eigenschaften dieser Integrale näher festzustellen, ergibt sich hier als nächstes Problem. Aber indem wir dieses Problem aufgreifen und zur Durchführung bringen, tritt eine neue und grundsätzliche Wendung in unseren Entwicklungen ein: *Wir werden erkennen, daß die gesamten Funktionen des Körpers, in Abhängigkeit von einem bestimmten unter den Integralen* (10) *betrachtet, zu eindeutigen Funktionen werden.* Diese fundamentale Tatsache der *„Eindeutigkeit"* wird uns daraufhin veranlassen, die Größen (9) als Funktionen jenes Integrales ausführlich zu untersuchen. Wir werden sie als solche mit dem Namen der *„elliptischen Funktionen"* belegen und unseren bisherigen Körper algebraischer Funktionen des Geschlechtes 1 in einen *„Körper elliptischer Funktionen"* umwandeln.

Daneben tritt dann noch eine zweite Frage auf (welche sich beim Geschlechte $p = 0$ unmittelbar erledigte), *nämlich wie man beim Geschlechte $p = 1$ einen Überblick über die gesamten wesentlich verschiedenen Körper algebraischer Funktionen verschaffen kann.* Auch für diese Aufgabe wird uns jenes eben genannte Integral die geeignetsten Hilfsmittel zur Lösung an die Hand geben.

Die beiden hiermit genannten Aufgaben, *nämlich den einzelnen „Körper elliptischer Funktionen" ausführlich zu untersuchen* und zweitens *den Überblick über das „System aller wesentlich verschiedenen Körper elliptischer Funktionen" zu gewinnen,* setzen das „Grundproblem" unserer

folgenden Untersuchungen zusammen. Ehe wir an die Behandlung desselben gehen, sind indessen unsere vorbereitenden Entwicklungen noch nach einer anderen Seite hin zu ergänzen.

§ 19. Lösung linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Einige Grundsätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung kommen weiterhin für den Fall $n = 2$ zur Verwendung und sollen hier sogleich für diese Ordnung entwickelt werden.[1]) Eine lineare homogene Differentialgleichung dieser Ordnung sei in der Gestalt:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = f_1(z)\frac{d\zeta}{dz} + f_2(z)\zeta$$

vorgelegt, wo $f_1(z)$ und $f_2(z)$ analytische Funktionen sein sollen. Ist z_0 irgendeine Stelle, in deren Umgebung $f_1(z)$ und $f_2(z)$ analytisch sind, so soll zunächst gefragt werden, ob sich ebenda eine analytische Lösung ζ von (1) angeben läßt, und welches die allgemeinste Lösung dieser Art ist.

Die Reihenentwicklungen von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Umgebung von z_0 seien:

$$f_1(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$
$$f_2(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Hat mindestens eine dieser Reihen einen endlichen Konvergenzradius, so bezeichnen wir den kleineren unter den Konvergenzradien oder, falls beide gleich sind, den gemeinsamen Radius mit R; handelt es sich um zwei beständig konvergente Reihen, so sei R als positive Größe beliebig gewählt. Die Lösung ζ möge, falls sie existiert, als analytische Funktion von z die Entwicklung haben:

$$\zeta = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Innerhalb des Konvergenzkreises dieser Reihe ergeben sich, indem wir rechts gliedweise differenzieren, sofort die Reihenentwicklungen für $\frac{d\zeta}{dz}$ und $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$. Die letztere Entwicklung muß (vgl. S. 14) identisch sein mit derjenigen Entwicklung, welche man aus der rechten Seite von (1) durch Eintragen der Reihen und Umordnung nach ansteigenden Po-

1) Siehe L. Fuchs, „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen", Journ. f. Math., Bd. 66 (1866) und Bd. 68 (1868). Eine umfassende Darstellung der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung gab L. Schlesinger, „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", zwei Bände (Leipzig 1895 und 1898).

tenzen von $(z - z_0)$ gewinnt. Dies ist aber stets und nur dann der Fall, wenn die Gleichung:

$$(2) \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} = c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 \\ + c_1 a_n + 2c_2 a_{n-1} + 3c_3 a_{n-2} + \cdots + (n+1)c_{n+1} a_0$$

für alle Indizes $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Während demnach c_0 und c_1 unbestimmt bleiben, berechnen sich aus der Rekursionsformel (2) alle weiteren Koeffizienten $c_2, c_3, \ldots$ in der Gestalt:

$$(3) \qquad c_n = c_n' c_0 + c_n'' c_1,$$

wo die c_n' und c_n'' bestimmte rationale ganze Ausdrücke in den Koeffizienten a_k und b_k sind; dabei sind, was man beachten wolle, in diesen ganzen rationalen Ausdrücken nur Pluszeichen enthalten.

Um nun die Konvergenz der für ζ angesetzten Reihe zu erörtern, wähle man z beliebig, aber fest im Innern des Kreises vom Radius R um z_0 und bestimme ferner eine positive Zahl r aus dem Intervall:

$$(4) \qquad |z - z_0| < r < R.$$

Dann können wir (vgl. S. 16) eine bestimmte endliche Zahl M angeben, so daß längs der Peripherie des Kreises vom Radius r um z_0 die Ungleichungen $|f_1(z)| < M$ und $|f_2(z)| < M$ zutreffen. M soll außerdem jedenfalls der Bedingung:

$$(5) \qquad Mr > 2$$

genügen. Wie S. 50 ergibt sich für die absoluten Beträge der Koeffizienten in den für $f_1(z)$ und $f_2(z)$ angegebenen Reihen:

$$|a_k| < \frac{M}{r^k}, \quad |b_k| < \frac{M}{r^k}.$$

Wenn wir demnach die sämtlichen Koeffizienten a_k und b_k durch Mr^{-k} ersetzen, außerdem aber $|c_0|$ und $|c_1|$ an Stelle von c_0 und c_1 treten lassen, so wird zufolge der angegebenen Bauart der c_n', c_n'' in den a_k, b_k jedenfalls $|c_n|$ vergrößert. Ist die Reihe für ζ auch nach dieser Vergrößerung der Beträge $|c_n|$ konvergent, so konvergiert sicher auch die ursprüngliche Reihe $c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$ im ausgewählten Punkte z.

Nun kommt aber der vollzogene Ersatz der a_k, b_k einfach darauf hinaus, daß wir die bisherigen $f_1(z)$, $f_2(z)$ zugleich durch die Funktion:

$$\frac{M}{1 - \frac{z - z_0}{r}}$$

ersetzen, oder daß wir an Stelle der Differentialgleichung (1) die folgende treten lassen:

$$\left(1 - \frac{z - z_0}{r}\right)\frac{d^2\zeta}{dz^2} = M\left(\frac{d\zeta}{dz} + \zeta\right).$$

Hier kann man entweder aus den dieser Gleichung zugehörigen Relationen (2) oder auch durch direktes Operieren mit dieser Differentialgleichung die Rekursionsformel in die einfachere Gestalt kleiden:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)n\frac{c_{n+1}}{r} = M((n+1)c_{n+1} + c_n),$$

aus welcher sich weiter ergibt:

$$c_{n+2}r^2 = c_{n+1}r\frac{n+Mr}{n+2} + c_n\frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)}.$$

Die im vorliegenden Falle für $n \geqq 2$ eintretenden c_n' und c_n'' sind durchweg reell und positiv. Ersetzen wir somit die noch frei wählbaren c_0, c_1 durch ihre absoluten Beträge, so werden zufolge (3) die Beträge $|c_n|$ nicht verkleinert. Es ist also ausreichend, wenn wir für positive c_0, c_1 die Konvergenz zeigen. Dann aber werden alle c_n positiv, und es ergibt sich aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf (5) für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$c_{n+2}r^2 > c_{n+1}r.$$

Somit ist auch $c_{n+1}r > c_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \cdots$, so daß wir wieder aus der letzten Gleichung für $n = 1, 2, 3, \cdots$ die Folgerung ziehen:

$$c_{n+2}r^2 < c_{n+1}r\left(\frac{n+Mr}{n+2} + \frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)}\right).$$

Man schreibe diese Ungleichung um in die Gestalt:

$$\left|\frac{c_{n+2}(z-z_0)^{n+2}}{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}\right| < \frac{|z-z_0|}{r}\left(\frac{n+Mr}{n+2} + \frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)}\right)$$

und beachte, daß der Klammerausdruck rechter Hand sich für $\lim n = \infty$ dem Grenzwerte 1 nähert. Der links stehende Quotient zweier aufeinander folgender Reihenglieder nähert sich somit für $\lim n = \infty$ zufolge (4), absolut genommen, einem unterhalb 1 gelegenen Grenzwerte, womit die Konvergenz der für ζ angesetzten Reihe im Punkte z bewiesen ist.

Es ist hiermit bewiesen, daß die für die Lösung ζ der Differentialgleichung (1) angesetzte Reihe in der Umgebung von z_0 mindestens ebensoweit konvergiert, als die für $f_1(z)$ und $f_2(z)$ geltenden Reihen zugleich konvergent sind. Wir erhalten also in ζ, und zwar für jede Auswahl von c_0 und c_1, eine Lösung von (1); und andererseits ist hiermit jede analytische Lösung von (1) in der Umgebung von z_0 gewonnen, da ja für jede Reihe $c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$, welche die Gleichung (1) identisch befriedigt, die Relation (3) gilt.

Den besonderen Auswahlen $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ und sodann $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ entsprechen zwei partikuläre Lösungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \zeta_1 = 1 + \cdot + c_2'(z-z_0)^2 + c_3'(z-z_0)^3 + \cdots, \\ \zeta_2 = \cdot + (z-z_0) + c_2''(z-z_0)^2 + \cdots, \end{cases}$$

wobei in der ersten Reihe das lineare Glied und in der zweiten das Absolutglied fehlt, was beide Male durch einen Stern angedeutet ist. Schreiben wir statt der bisherigen c_0, c_1 fortan a und b, so ist folgender Satz gewonnen: *Die Differentialgleichung* (1) *besitzt in der Umgebung*[1]) *jeder Stelle* z_0, *in der* $f_1(z)$ *und* $f_2(z)$ *überall analytisch sind, Lösungen* ζ, *welche ebenda gleichfalls überall analytisch sind; dabei läßt sich jede dieser Lösungen in den beiden partikulären Lösungen* (6) *mittels zweier Konstanten* a, b *in der Gestalt:*

$$\zeta = a\zeta_1 + b\zeta_2 \tag{7}$$

darstellen, wie auch umgekehrt für jede Auswahl endlicher Konstanten a, b *in* (7) *eine Lösung vorliegt.*

Soll die Summe $(a\zeta_1 + b\zeta_2)$ als Funktion von z mit 0 identisch sein, so muß in der Reihenentwicklung derselben der Koeffizient jedes Gliedes gleich 0 sein, so daß zufolge (6) insbesondere $a = 0$, $b = 0$ zutreffen muß. Die Lösungen ζ_1, ζ_2 sollen in dem Sinne voneinander *„linear-unabhängig"* heißen, als hiernach eine Gleichung $a\zeta_1 + b\zeta_2 = 0$ mit nicht zugleich verschwindenden a, b nicht identisch bestehen kann. Greifen wir nun (immer in der Umgebung von z_0) irgend zwei Lösungen:

$$\zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \quad \zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2 \tag{8}$$

auf, so gilt identisch:

$$a'\zeta_1' + b'\zeta_2' = (a'\alpha + b'\gamma)\zeta_1 + (a'\beta + b'\delta)\zeta_2.$$

Man folgert hieraus leicht: *Ist die Determinante* $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ *der Koeffizienten in* (8) *von* 0 *verschieden, so sind* ζ_1', ζ_2' *linear-unabhängig; und wenn* ζ_1', ζ_2' *linear-unabhängig sind, so ist umgekehrt* $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ *von* 0 *verschieden.* In diesem Falle kann man die Gleichungen (8) nach ζ_1, ζ_2 lösen und also ζ_1, ζ_2 linear und homogen in ζ_1', ζ_2' darstellen. Diese Darstellungen können wir dann auch in (7) eintragen, *so daß wir in der Umgebung von* z_0 *zur Darstellung aller Lösungen in der Gestalt* (7) *an Stelle der obigen* ζ_1, ζ_2 *irgend zwei linear-unabhängige Lösungen zugrunde legen können.*

Indem wir jetzt über die Umgebung von z_0 hinausgehen, hat es zunächst keine Schwierigkeit, auf Grund der Überlegungen von S. 24 ff. ein *„Feld"* **F** *des Funktionenpaares* $f_1(z)$, $f_2(z)$ zu erklären. Man hat hierbei einfach den Prozeß der analytischen Fortsetzung gleichzeitig auf $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auszuüben und bei dem einzelnen Paare von Funktionselementen, sofern die beiden Konvergenzkreise verschieden sind, nur den

---

1) Eine „Umgebung" von z_0 sollte nach S. 1 stets als „Kreisfläche" des Mittelpunktes z_0 gewählt werden.

kleineren Kreis zuzulassen. Auch hat man natürlich, falls das System der aneinander geklebten Konvergenzkreise um singuläre Punkte herum über sich selbst hinübergreift, die übereinander liegenden Teile der Kreise nur dann zu verkleben, falls sowohl $f_1(z)$ als $f_2(z)$ bei dem betreffenden Umlaufe zu den anfänglichen Funktionswerten zurückkehren.

Wir wollen zunächst außer den „singulären" Punkten (Polen, endlich-blättrigen Verzweigungspunkten[1]), wesentlich singulären Punkten) für mindestens eine der Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ auch alle Stellen ∞, welche dem Felde **F** etwa angehören, als „Randpunkte" von **F** auffassen. Dann ist sofort einleuchtend: *In der Umgebung jedes „Innenpunktes" z_0 von* **F** *gelten über die Natur der Lösungen ζ von* (1) *die obigen Sätze; irgendeine bei einer speziellen Stelle z_0 aufgegriffene Lösung $\zeta(z)$ von* (1) *ist im Innern von* **F** *unbegrenzt fortsetzbar, erweist sich daselbst überall als analytisch und stellt beständig eine Lösung von* (1) *dar.* Man hat nur zu beachten, daß in der Umgebung von z_0 der Ausdruck:

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} - f_1(z)\frac{d\zeta}{dz} - f_2(z)\zeta$$

als Funktion von z identisch verschwindet und also auch bei Fortsetzung beständig mit 0 identisch bleiben muß. Die bei Fortsetzung auftretenden Funktionswerte ζ stellen demnach immer wieder eine Lösung von (1) dar, müssen also die oben gewonnenen Gesetze der Lösungen befriedigen.

Die endlich-blättrigen Verzweigungspunkte und die Stellen ∞ machen übrigens keine Schwierigkeiten. Haben wir einen ν-blättrigen Verzweigungspunkt bei z_0 oder eine Stelle $z = \infty$[2]), so führen wir als neue Variable bzw.:

$$z' = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{1}{z}$$

ein und rechnen in beiden Fällen[3]) die Gleichung (1) in die Gestalt:

$$\frac{d^2\zeta}{dz'^2} = \bar{f}_1(z')\frac{d\zeta}{dz'} + \bar{f}_2(z')\zeta$$

um, wo $\bar{f}_1(z')$, $\bar{f}_2(z')$ in der Umgebung von $z' = 0$ eindeutig sind. Hier ist dann einfach zu prüfen, ob $\bar{f}_1(z')$ und $\bar{f}_2(z')$ bei $z' = 0$ beide analytisch sind, oder ob mindestens eine dieser Funktionen daselbst einen

---

1) Findet man bei der analytischen Fortsetzung Koinzidenz eines ν_1-blättrigen Verzweigungspunktes von $f_1(z)$ mit einem ν_2-blättrigen von $f_2(z)$, so hat **F** daselbst einen ν-blättrigen Verzweigungspunkt, unter ν das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von ν_1 und ν_2 verstanden.

2) Letztere Stelle nach der eben gegebenen Bestimmung als isolierten Randpunkt von **F**.

3) Natürlich darf auch wieder ein ν-blättriger Verzweigungspunkt bei $z = \infty$ liegen, wo man dann $(z - z_0)$ durch z^{-1} zu ersetzen hat.

Pol oder, was im Falle eines Punktes $z = \infty$ ja zunächst nicht ausgeschlossen ist, einen wesentlich singulären Punkt hat. Im zweiten und dritten Falle rechnen wir die betrachtete Stelle den Polen bzw. wesentlich singulären Stellen des Funktionenpaares $f_1(z)$, $f_2(z)$ zu und *erklären nunmehr als „singuläre Stellen" der Differentialgleichung* (1) *die gesamten Pole und wesentlich singulären Punkte des Funktionenpaars* $f_1(z), f_2(z)$.

Ehe wir auf die Untersuchung dieser singulären Stellen näher eingehen, ist über die Vieldeutigkeit der Lösungen ζ im Felde **F** eine grundlegende Betrachtung auszuführen. In der Umgebung einer nichtsingulären Stelle seien ζ_1, ζ_2 zwei linear-unabhängige Lösungen und ζ irgendeine Lösung von (1). Man beschreibe von z_0 eine im Felde **F** geschlossene Bahn C bis z_0 zurück und setze ζ über C fort. Ist es möglich, C stetig und ohne Zerreißen auf einen Punkt zusammenzuziehen, ohne daß die Bahn C hierbei über eine singuläre Stelle von (1) hinweggezogen wird, so kehrt ζ längs C notwendig zu seinen Anfangswerten zurück. Ist diese Zusammenziehung von C nicht möglich, so können wir nur folgern, daß die Fortsetzung von ζ über C hin am Schlusse wieder zu einer Lösung ζ' von (1) für die Umgebung von z_0 hinführt, wo sich alsdann ζ' wieder linear und homogen in den ζ_1, ζ_2 darstellt.

Wenden wir dieses Ergebnis insbesondere auf ζ_1 und ζ_2 selbst an, so mögen wir am Schlusse zu:

$$\zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \quad \zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2 \tag{9}$$

gelangen. Diese Lösungen ζ_1', ζ_2' müssen dann wieder linear-unabhängig sein, da eine am Schlusse identisch bestehende Gleichung $a\zeta_1' + b\zeta_2' = 0$ auch schon zu Anfang bestehen müßte. Wir gelangen demnach zu folgendem grundlegenden, die Vieldeutigkeit der Lösungen ζ im Felde **F** regelnden Satze: *Ein System linear-unabhängiger Lösungen* ζ_1, ζ_2 *geht bei Fortsetzung über einen im Felde* **F** *geschlossenen Weg* C *in ein System der Gestalt* (9) *mit* $|\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$ *über, so daß sich das System* ζ_1, ζ_2 *bei Fortsetzung über* C, *wie man sagt, linear mit nicht-verschwindender Determinante* $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ *substituiert; so oft* C, *ohne über singuläre Punkte von* (1) *hinweggeschoben zu werden, stetig und ohne Zerreißen in* **F** *auf einen Punkt zusammenziehbar ist, liegt die „identische Substitution"* (*vgl.* S. 68) *d. h. diejenige mit* $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, *vor.*

Dieses Ergebnis eröffnet uns zugleich die Möglichkeit, Darstellungen der Lösungen ζ von (1) *in der Umgebung eines isoliert liegenden singulären Punktes* z_0 dieser Differentialgleichung zu machen, wobei man, falls z_0 ein Verzweigungspunkt oder eine Stelle ∞ ist, zuvor die Transformation auf die oben genannte Variabele z' vornehme. C umlaufe z_0

im positiven Sinne und sei so gewählt, daß kein weiterer singulärer Punkt in oder auf C liegt. Dem Umlauf entspreche die Substitution (9) eines ausgewählten Systems linear-unabhängiger Lösungen ζ_1, ζ_2.

Wir fragen nun, ob es eine nicht identisch verschwindende Lösung

$$Z = A\zeta_1 + B\zeta_2$$

geben kann, welche beim Umlauf C in sich selbst multipliziert mit einem konstanten Faktor μ übergeht, so daß die Gleichung $Z' = \mu Z$ bestehen würde. Dann müßte:

$$A(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2) + B(\gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2) = \mu A\zeta_1 + \mu B\zeta_2$$

identisch gelten, woraus wir, da ζ_1, ζ_2 linear-unabhängig sind:

$$(10) \qquad A(\alpha - \mu) + B\gamma = 0, \quad A\beta + B(\delta - \mu) = 0$$

folgern. Zwei nicht zugleich verschwindende Konstante A, B, welche die Gleichungen (10) befriedigen, liefern auch umgekehrt eine gewünschte Lösung Z.

Damit nun die Gleichungen (10) durch zwei nicht zugleich verschwindende A, B befriedigt werden können, muß ihre Determinante verschwinden:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \alpha - \mu, & \gamma \\ \beta, & \delta - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (\alpha + \delta)\mu + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Es gibt demnach für unseren singulären Punkt z_0 *höchstens zwei Faktoren* μ_1, μ_2 *oder gar nur einen* μ, *in dem Falle nämlich, daß die Gleichung* (11) *zusammenfallende Wurzeln hat.*[1]) Man beachte noch, daß die Faktoren μ als Lösungen von (11) sicher endlich und von 0 verschieden sind.

Tragen wir nun einen aus (11) berechneten Faktor μ in (10) ein, so können zwei Fälle eintreten. Entweder sind die linearen Gleichungen (10) für die gesuchten A, B identisch erfüllt, oder es gibt, abgesehen von einem gemeinsamen Faktor, den wir den A, B zusetzen dürfen, nur *ein* System nicht zugleich verschwindender Lösungen A, B von (10). Im ersten Falle ist $\alpha = \delta = \mu$, $\beta = \gamma = 0$, und es sind die A, B willkürlich wählbar: *In der Tat nehmen jetzt bereits die beiden linear-unabhängigen Lösungen* ζ_1, ζ_2 *bei einem Umlauf um den singulären Punkt* z_0 *den Faktor* μ *an, und dasselbe gilt also für jede Lösung. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es, abgesehen von einem konstanten Faktor, den wir der Lösung zusetzen mögen, eine und nur eine Lösung* Z, *welche bei Umlauf um* z_0 *den aus* (11) *berechneten Faktor* μ *annimmt.*

---

1) Aus der Bestimmtheit der Faktoren μ folgt zugleich ihre Unabhängigkeit von der Auswahl des Systems ζ_1, ζ_2, die man auch leicht durch direkte Rechnung beweisen kann.

Für die in Rede stehende Lösung Z können wir nun leicht in der Umgebung von z_0 eine Darstellung angeben. Setzen wir:

$$(12) \qquad \varrho = \frac{\log \mu}{2 i \pi},$$

so ist ϱ bis auf eine additive ganze Zahl bestimmt; wir behalten uns eine spezielle Auswahl von ϱ vor und denken zunächst eine beliebige Wahl getroffen. Dann ist:

$$e^{\varrho \log (z - z_0)} = (z - z_0)^{\varrho}$$

eine in der Umgebung von z_0, abgesehen von diesem Punkte selbst, überall analytische Funktion, die bei dem Umlaufe um z_0 gleichfalls den Faktor μ annimmt. Somit ist $Z \cdot (z - z_0)^{-\varrho}$ ebendaselbst überall analytisch und kehrt beim Umlaufe um z_0 zu seinen Anfangswerten zurück. Für dieses Produkt gilt demnach (vgl. S. 41) eine Laurentsche Entwicklung nach Potenzen von $(z - z_0)$, die durch $\mathfrak{L}(z - z_0)$ bezeichnet werde:

$$Z \cdot (z - z_0)^{-\varrho} = \mathfrak{L}(z - z_0),$$

und die in der Umgebung von z_0, abgesehen vielleicht[1]) von diesem Punkte selbst, konvergiert.

Hat jetzt die Gleichung (11) verschiedene Wurzeln μ_1, μ_2, so mögen ihnen die bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmten Lösungen Z_1, Z_2 von (1) zugehören, welche man leicht als linear-unabhängig erkennt.[2]) Wählen wir zwei zugehörige ϱ_1, ϱ_2, so folgt: *Sind die beiden Wurzeln μ_1, μ_2 von* (11) *verschieden, so gibt es zwei bis auf konstante Faktoren bestimmte, linear-unabhängige Lösungen Z_1, Z_2 mit den Darstellungen:*

$$(13) \qquad Z_1 = (z - z_0)^{\varrho_1} \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0), \quad Z_2 = (z - z_0)^{\varrho_2} \cdot \mathfrak{L}_2(z - z_0).$$

Sind die beiden Wurzeln μ von (11) einander gleich, so setzen wir eine erste Lösung Z_1 mit der Darstellung:

$$Z_1 = (z - z_0)^{\varrho} \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0)$$

an. Ist Z_2 eine von Z_1 linear-unabhängige Lösung, so tritt jetzt bei dem Umlaufe um z_0 an Stelle von (9):

$$Z_1' = \alpha Z_1, \quad Z_2' = \gamma Z_1 + \delta Z_2,$$

---

1) Es kann ja der besondere Fall eintreten, daß $\mathfrak{L}(z - z_0)$ überhaupt keine Glieder mit negativen Potenzexponenten aufweist.

2) Besteht nämlich $a Z_1 + b Z_2 = 0$ identisch, so folgt durch Ausführung des Umlaufs um z_0 als wieder identisch gültig $a \mu_1 Z_1 + b \mu_2 Z_2 = 0$. Durch Kombination beider Gleichungen folgt leicht $a = 0$, $b = 0$.

wo natürlich $\alpha = \mu$ ist. Da aber die zugehörige Gleichung (11) auch als zweite Lösung wieder μ haben muß, so ist auch $\delta = \mu$, und also gilt:

$$Z_1' = \mu Z_1, \quad Z_2 = \gamma Z_1 + \mu Z_2.$$

Ist nun erstlich $\gamma = 0$, so haben wir den schon vorhin erwähnten Fall, *daß alle Lösungen beim Umlauf um z_0 den Faktor μ annehmen, wo dann also Darstellungen gelten:*

(14) $$Z_1 = (z - z_0)^{\varrho} \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0), \quad Z_2 = (z - z_0)^{\varrho} \cdot \mathfrak{L}_2(z - z_0),$$

Ist zweitens $|\gamma| > 0$, so beachte man, daß die Lösung Z_1 bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, da jetzt der eben erledigte Fall nicht vorliegt. Nach bestimmter Auswahl von Z_1 möge an Stelle der zuerst aufgegriffenen Lösung Z_2 die folgende:

$$\bar{Z}_2 = 2 i \pi \mu \gamma^{-1} Z_2$$

treten, die hernach gleich selbst wieder Z_2 heiße. Offenbar gilt dann für den Umlauf um z_0:

$$Z_1' = \mu Z_1, \quad Z_2 = 2 i \pi \mu Z_1 + \mu Z_2.$$

Hieraus aber folgert man ohne Mühe, daß die Funktion:

$$Z_2 - \log(z - z_0) \cdot Z_1,$$

welche in der Umgebung von z_0, abgesehen von z_0 selbst, überall analytisch ist, gegenüber dem Umlauf um z_0 einfach wieder den Faktor μ annimmt und also eine Darstellung $(z - z_0)^{\varrho} \cdot \mathfrak{L}_2(z - z_0)$ gestattet. *Jetzt existieren zwei linear-unabhängige Lösungen mit den Darstellungen:*

(15) $$Z_1 = (z - z_0)^{\varrho} \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0), \; Z_2 = (z - z_0)^{\varrho}(\mathfrak{L}_2(z - z_0) + \log(z - z_0) \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0)),$$

wo Z_1 bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist und Z_2 nach Auswahl von Z_1 insoweit unbestimmt bleibt, daß Z_2 durch irgendeine Lösung $(Z_2 + a Z_1)$ ersetzbar ist.

Alle in (13)ff. zur Benutzung kommenden Laurentschen Reihen konvergieren in der Umgebung des singulären Punktes z_0, abgesehen vielleicht von diesem Punkte selbst.

§ 20. Ausführungen über die hypergeometrische Differentialgleichung.

Die vorstehenden Ausführungen werden späterhin insbesondere im Falle der *„hypergeometrischen" Differentialgleichung*:

(1) $$z(z-1)\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \Big[(\alpha + \beta + 1)z - \gamma\Big]\frac{d\zeta}{dz} + \alpha\beta\zeta = 0$$

zur Verwendung kommen. Wir wollen hierbei unter α, β, γ reelle Größen verstehen, die weiterhin noch gewissen Beschränkungen unterworfen werden sollen.

Die bisher mit $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bezeichneten Funktionen sind für die Differentialgleichung (1) rational und haben Pole bei $z = 0$ und $z = 1$. *Das Feld* F *des Funktionenpaars ist die schlichte z-Kugel; singuläre Punkte der Differentialgleichung sind im Endlichen nur die Punkte* $z = 0$ *und* $z = 1$, *denen wir nötigenfalls als dritten singulären Punkt den noch näher zu untersuchenden Punkt* $z = \infty$ *hinzuzufügen haben.*

Um diese Untersuchung sogleich durchzuführen, setzen wir $z = \frac{1}{z'}$ und rechnen (1) auf die Gestalt um:

$$z'(z'-1)\frac{d^2\zeta}{dz'^2} + \left[(2-\gamma)z' - (1-\alpha-\beta)\right]\frac{d\zeta}{dz'} - \frac{\alpha\beta}{z'}\zeta = 0.$$

Hieraus geht zunächst hervor, *daß* $z' = 0$ *und also* $z = \infty$ *ein singulärer Punkt unserer Differentialgleichung ist.* Andererseits gewinnen wir aus der letzten Gleichung die Kenntnis einer grundlegenden Eigenschaft der Gleichung (1) auf folgende Art. Die auf z' transformierte Gleichung hat zwar nicht unmittelbar die Gestalt (1) einer hypergeometrischen Differentialgleichung, kann aber durch die Transformation $\zeta = z'^{\varrho}\zeta'$ wieder auf diese Gestalt gebracht werden. Man wird nämlich durch diese Transformation zu der Gleichung:

$$z'(z'-1)\frac{d^2\zeta'}{dz'^2} + \left[(2\varrho-\gamma+2)z' - (2\varrho-\alpha-\beta+1)\right]\frac{d\zeta'}{dz'}$$
$$+\left[\varrho(\varrho-\gamma+1) - \frac{(\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)}{z'}\right]\zeta' = 0$$

geführt und erkennt sofort, daß hier wieder eine Gleichung (1) vorliegt, falls ϱ entweder $= \alpha$ oder $= \beta$ gesetzt wird. Im ersten Falle treten an Stelle der α, β, γ die Größen:

(2) $$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \alpha - \gamma + 1, \quad \gamma' = \alpha - \beta + 1,$$

im zweiten Falle aber:

(3) $$\alpha' = \beta - \gamma + 1, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = -\alpha + \beta + 1.$$

Das gewonnene Ergebnis läßt sich noch in eine wesentlich einfachere Gestalt kleiden, wenn wir statt der α, β, γ drei neue Größen λ, μ, ν einführen, welche mit den α, β, γ durch:

(4) $$\begin{cases} \lambda = 1-\gamma, \quad \mu = \gamma - \alpha - \beta, \quad \nu = \beta - \alpha, \\ \alpha = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), \quad \beta = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), \quad \gamma = 1-\lambda \end{cases}$$

zusammenhängen. Die Transformationen (2) und (3) der α, β, γ nehmen nämlich, auf λ, μ, ν umgerechnet, die einfachen Gestalten an:

$$\lambda' = \nu, \qquad \mu' = \mu, \qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = -\nu, \quad \mu' = \mu, \qquad \nu' = -\lambda.$$

Bezeichnen wir die linke Seite der Differentialgleichung (1) durch das Symbol $D(\zeta, z; \lambda, \mu, \nu)$, *so erweist sich dieser Ausdruck D als invariant gegenüber jeder der beiden Transformationen:*

(5) $$\zeta' = z^\alpha \zeta, \quad z' = z^{-1}, \quad \lambda' = \nu, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = \lambda,$$

(6) $$\zeta' = z^\beta \zeta, \quad z' = z^{-1}, \quad \lambda' = -\nu, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = -\lambda,$$

da $D' = D(\zeta', z'; \lambda', \mu', \nu')$ bis auf die Faktoren $z^{\alpha-2}$ bzw. $z^{\beta-2}$ gleich D ist:

$$D' = z^{\alpha-2} D \quad \text{bzw.} \quad D' = z^{\beta-2} D.$$

Setzt man ferner $\zeta = \zeta'$, $z = 1 - z'$ in (1) ein, so folgt:

$$z'(z'-1)\frac{d^2\zeta'}{dz'^2} + [(\alpha+\beta+1)z' - (\alpha+\beta-\gamma+1)]\frac{d\zeta'}{dz'} + \alpha\beta\zeta' = 0,$$

womit wieder eine Gleichung (1), nämlich diejenige mit:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \alpha + \beta - \gamma + 1$$

gewonnen ist. Für die λ, μ, ν liefern diese Gleichungen: $\lambda' = \mu$, $\mu' = \lambda$, $\nu' = \nu$, *so daß D invariant ist auch gegenüber der Transformation:*

(7) $$\zeta' = \zeta, \quad z' = 1 - z, \quad \lambda' = \mu, \quad \mu' = \lambda, \quad \nu' = \nu.$$

Es ist nun ein einfacher, aber wichtiger Grundsatz, daß, wenn man zwei Transformationen, die beide D (von Faktoren abgesehen) in sich überführen, hintereinander ausübt, hierdurch eine aus jenen zusammengesetzte dritte Transformation entsteht, gegenüber der D in gleichem Sinne invariant sein muß. Wir wenden dies Prinzip zunächst nur auf die Transformationen (5) und (7) an, kombinieren die entspringenden Transformationen aber sowohl unter sich als auch wieder mit (5) und (7). Es zeigt sich, *daß wir von* (5) *und* (7) *aus auf diese Weise insgesamt nur zu sechs verschiedenen Transformationen, die „identische" Transformation $\zeta' = \zeta$, $z' = z$, $\lambda' = \lambda, \ldots$ mitgerechnet, hingelangen, die wir in leicht verständlicher Weise tabellarisch zusammenstellen:*

ζ	z	λ	μ	ν
ζ	$1 - z$	μ	λ	ν
$z^\alpha \zeta$	$\frac{1}{z}$	ν	μ	λ
$z^\alpha \zeta$	$\frac{z-1}{z}$	μ	ν	λ
$(1-z)^\alpha \zeta$	$\frac{1}{1-z}$	ν	λ	μ
$(1-z)^\alpha \zeta$	$\frac{z}{z-1}$	λ	ν	μ

Hier ist an erster Stelle die identische Transformation genannt, an zweiter die Transformation (7) und an dritter Stelle die Transformation (5). Die vierte Transformation entsteht, wenn wir zunächst die dritte und auf die transformierten Größen sodann die zweite Transformation ausüben. Beginnen wir mit der zweiten Transformation und üben sodann die dritte aus, so folgt die fünfte. Endlich ergibt sich die sechste Transformation etwa durch Kombination der fünften und der zweiten. Man überzeugt sich leicht durch direkte Rechnung, daß irgend zwei unter den sechs Transformationen kombiniert immer wieder eine unter diesen Transformationen liefern. Man sagt, um dieses Sachverhältnis zum Ausdruck zu bringen, *sie bilden eine „Gruppe" von sechs zusammengehörigen Transformationen, nennt die Anzahl sechs der Transformationen die „Ordnung" der Gruppe und bezeichnet diese durch das Symbol* G_6. Kehren wir die einzelne Transformation um, so entsteht die zur ihr *„inverse"* Transformation. Man stellt ohne Mühe fest, daß (außer der identischen) die zweite, dritte und sechste Transformation je sich selbst invers sind, daß aber die vierte und fünfte zueinander invers sind. Man sagt auch, die zweite, dritte und sechste Transformation *seien von der Periode zwei*, insofern zweimalige Ausführung einer dieser Transformationen die identische Transformation erzeugt. Die vierte und fünfte Transformation haben im gleichen Sinne *die Periode drei.*[1])

Kombinieren wir nunmehr die Transformationen (5) und (6), so ergibt sich als neue Transformation, gegenüber welcher D wieder invariant ist:

$$(8)\qquad \zeta' = z^{-\lambda}\zeta, \quad z' = z, \quad \lambda' = -\lambda, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = -\nu.$$

Demnächst wolle man die zweite Transformation der G_6, hierauf (8) und dann nochmals die zweite Transformation der G_6 ausüben, wodurch man erhält:

$$\zeta' = (1-z)^{-\mu}\zeta, \quad z' = z, \quad \lambda' = \lambda, \quad \mu' = -\mu, \quad \nu' = -\nu.$$

Endlich kombiniere man diese Transformation mit (8). Wir stellen die

---

1) Die G_6 des Textes ist, wie man sieht, vom Standpunkte der abstrakten Gruppentheorie (die nur auf die „Struktur" der Gruppen achtet und die besondere Darstellungsform derselben als unwesentlich betrachtet) einfach mit der Gruppe der sechs Permutationen von drei Dingen (hier entweder die drei Größen λ, μ, ν oder, wenn man will, die drei singulären Punkte $z = 0, 1, \infty$) identisch. Faßt man die G_6 in der Gestalt der sechs linearen Substitutionen:

$$z' = z, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{1}{1-z}, \quad z' = \frac{z}{z-1},$$

so gelangt man zu der in der „Theorie der regulären Körper" oder in der „Theorie der Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen" wohlbekannten *„Diedergruppe"* G_6; siehe darüber Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder", (Leipzig, 1884) S. 9 und 36 oder „Modulfunktionen" Bd. 1 S. 15. Übrigens kommen wir im nächsten Kapitel (S. 126 ff.) auf die fraglichen Gruppen ausführlich zurück.

drei so gewonnenen Transformationen, unter Hinzunahme der identischen Transformation, wieder tabellarisch zusammen:

ζ	z	λ	μ	ν
$z^{-\lambda}\zeta$	z	$-\lambda$	μ	$-\nu$
$(1-z)^{-\mu}\zeta$	z	λ	$-\mu$	$-\nu$
$z^{-\lambda}(1-z)^{-\mu}\zeta$	z	$-\lambda$	$-\mu$	ν

Diese vier Transformationen bilden für sich eine „Gruppe“ G_4 der Ordnung vier, wie man leicht zeigt.[1])

Man kombiniere schließlich die vier Transformationen der G_4 einzeln mit den sechs der G_6 und gelangt so zu 24 verschiedenen Transformationen mit einem (wenigstens was die z, λ, μ, ν angeht) unmittelbar übersehbaren Bildungsgesetze. *Diese 24 Transformationen bilden wiederum eine Gruppe G_{24} der Ordnung 24, welche die besonderen Transformationen* (5), (6) *und* (7) *enthält; von diesen letzteren aus gelangen wir also insgesamt zu 24 verschiedenen Transformationen, welche die linke Seite der hypergeometrischen Differentialgleichung* (1) *bis auf einen Faktor in sich überführen.*[2])

Die vorstehenden Betrachtungen sind für die Lösungen der Differentialgleichung (1) in den Umgebungen der singulären Stellen wichtig. Die hierbei eintretenden Entwicklungen gründen sich auf folgende Tatsache: *Man kann zunächst für die Umgebung des singulären Punktes $z=0$, falls γ weder gleich* 0 *noch gleich einer negativen ganzen Zahl ist, eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung* (1) *angeben, welche auch im singulären Punkt $z=0$ selbst analytisch bleibt.* Trägt man nämlich

$$\zeta = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

in die Gleichung (1) ein, so ist für das identische Bestehen dieser Gleichung in z, die Konvergenz der Reihe vorausgesetzt, die für alle Indizes $n = 0, 1, 2, \ldots$ gültige Gleichung:

$$c_{n+1} = c_n \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} \tag{9}$$

---

1) Es handelt sich hier im Sinne der abstrakten Gruppentheorie um dieselbe Gruppe, welche in der „Theorie der Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen„ als *„Vierergruppe“* auftritt; vgl. die Nachweise der letzten Note.

2) Diese G_{24} ist im Sinne der abstrakten Gruppentheorie identisch mit der Gruppe der 24 Permutationen von vier Dingen; in der „Theorie der regulären Körper“ tritt die G_{24} als *„Oktaedergruppe“* auf (vgl. vorletzte Note).

hinreichend und notwendig. Dies führt auf:

$$\zeta = c_0\left(1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3+\cdots\right),$$

wo in der Klammer die wohlbekannte Gestalt der *„hypergeometrischen“ Reihe* gewonnen ist, nach welcher auch die Differentialgleichung (1) ihren Namen trägt. Für diese Reihe hat Gauß[1]) die abkürzende Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ eingeführt; wir wollen entsprechend dieser Schreibweise α, β, γ, z als „erstes“, „zweites“ usw. „Argument“ von F bezeichnen. Das dritte Argument γ darf, wie schon bemerkt, weder gleich 0, noch gleich einer negativen ganzen Zahl sein, da ja sonst in den Koeffizienten unserer Reihe von einer gewissen Stelle an der Faktor 0 im Nenner auftreten würde.[2]) Da übrigens aus (9) offenbar $\lim\limits_{n=\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ folgt, so ist die Reihe für $|z| < 1$ konvergent und für $|z| > 1$ divergent, sofern sie nicht dadurch, daß eine der Größen α, β mit einer unterhalb 1 gelegenen ganzen Zahl gleich ist, bei einem gewissen endlichen Gliede abbricht[3]): *Die unter der genannten beschränkenden Voraussetzung betreffs des dritten Argumentes γ anzusetzende hypergeometrische Reihe:*

$$(10)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots$$

hat, falls sie überhaupt eine „unendliche“ Reihe ist, den Konvergenzradius $R = 1$.

Setzt man $c_0 = 1$, so ist:

$$(11)\qquad \zeta = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

eine erste Lösung der Differentialgleichung (1) in der Umgebung der singulären Stelle $z = 0$, aus welcher die allgemeinste in diesem Punkte

1) In der für die hypergeometrische Reihe und Differentialgleichung grundlegenden Arbeit „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$“, Göttinger Abhandl. von 1813 oder Gauß’ Werke, Bd. 3, S. 123.

2) Man muß in diesem Falle (worauf wir unten zurückkommen werden) die Anfangskoeffizienten $c_0, c_1, \ldots$ bis $c_{-\gamma}$ gleich 0 setzen, $c_{1-\gamma}$ aber gleich 1 wählen. Die sich ergebende Lösung ist wieder im singulären Punkte $z = 0$ analytisch und besitzt dortselbst einen Nullpunkt der Ordnung $1-\gamma$.

3) Ist etwa α eine negative ganze Zahl, so ist offenbar $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ eine ganze rationale Funktion des Grades $-\alpha$. Der Fall $\alpha = 0$ ist elementar, insofern man in diesem Falle als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) findet:

$$\zeta = A\int z^{-\gamma}(1-z)^{-\beta+\gamma-1}\,dz + B,$$

unter A und B Konstante verstanden.

analytisch bleibende Lösung durch Zusatz eines Faktors c_0 herstellbar ist.

Man gehe nun auf die obigen 24 Transformationen unserer Differentialgleichung (1) zurück. Die einzelne derselben hat, was ζ anlangt, die Gestalt $\zeta' = z^m(1-z)^n\zeta$. Ist die Gleichung $D = 0$ für ζ identisch erfüllt, so wird, da D' bis auf einen Faktor gleich D ist, ζ' eine Lösung der transformierten Gleichung $D' = 0$ sein; und umgekehrt ergibt jede Lösung ζ' dieser Gleichung in $\zeta = z^{-m}(1-z)^{-n}\zeta'$ eine solche der ursprünglichen. *Indem wir nun nach* (11) *für* ζ' *die Lösung* $F(\alpha', \beta', \gamma'; z')$ *eintragen, gewinnen wir für die Differentialgleichung* (1) *einen Ansatz von 24 zunächst formal verschiedenen Lösungen:*

$$\zeta = z^{-m}(1-z)^{-n} \cdot F(\alpha', \beta', \gamma'; z'), \tag{12}$$

wobei die Lösung (11) *selbst, der identischen Transformation der* G_{24} *entsprechend, mitgezählt ist.*

Was die Konvergenz der einzelnen dieser Reihen angeht, sofern dieselbe eine unendliche Reihe ist und auch nicht etwa dadurch, daß eine der Gleichungen $\gamma' = 0, -1, -2, \ldots$ zutrifft, unbrauchbar wird, so ist das Innere des Konvergenzkreises stets durch $|z'| < 1$ gegeben. Je nachdem

$$z' = z, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{1}{1-z}, \quad z' = \frac{z}{z-1}$$

ist, wird man in jedem Falle den Konvergenzkreis in der z-Ebene leicht feststellen. Der einzelne singuläre Punkt liegt dabei je in zweien unter diesen sechs Konvergenzkreisen, *so daß von den 24 in Ansatz gebrachten Lösungen* (12) *sich je 8 auf die Umgebung des einzelnen unter den drei singulären Punkten beziehen.* Z. B. erhalten wir für die Umgebung von $z = 0$ vier Reihen nach Potenzen von z und vier solche nach Potenzen von $\frac{z}{z-1}$, wobei das Innere des „Konvergenzkreises" für die letzten vier Reihen von allen den Werten z geliefert wird, die einen reellen Bestandteil $< \frac{1}{2}$ besitzen.

Da die drei singulären Punkte bei den Transformationen der Gleichung (1) in sich ausgetauscht werden, so übertragen sich die für einen einzelnen unter den drei Punkten gemachten Ausführungen eben durch jene Transformationen auf die beiden anderen Punkte. Es ist demnach ausreichend, wenn wir ausführlich nur etwa den Punkt $z = 0$ betrachten. Die acht zum singulären Punkte $z = 0$ gehörenden Ansätze (12) sind die folgenden:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z),$$
$$z^{1-\gamma}F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; z),$$
$$(1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma}F(-\alpha + \gamma, -\beta + \gamma, \gamma; z),$$
$$z^{1-\gamma}(1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma}F(-\beta + 1, -\alpha + 1, 2 - \gamma; z),$$

$$(1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, -\beta+\gamma, \gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$(1-z)^{-\beta} F\left(-\alpha+\gamma, \beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{-\alpha+\gamma-1} F\left(-\beta+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{-\beta+\gamma-1} F\left(\beta-\gamma+1, -\alpha+1, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right).$$

Diese acht Ansätze sind aber nur formal alle voneinander verschieden. Da nämlich der dritte, ebenso wie der fünfte und sechste Ansatz, zu einer Potenzreihe mit dem Anfangsgliede 1 führt, so ergeben diese drei Ansätze einfach $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ wieder, was man auch leicht durch Ausrechnung einiger Reihenglieder bestätigt findet. Ebenso führen die vier restierenden Ansätze (sofern dieselben brauchbar sind) zu einer und derselben Lösung. Wir kommen somit auf die beiden nunmehr durch:

$$(13) \quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ Z_2 = z^{1-\gamma} F(\beta-\gamma+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z) \end{cases}$$

zu bezeichnenden Lösungen zurück.

Ist nun erstlich γ keine ganze Zahl, so haben wir in Z_1, Z_2 die beiden Lösungen (13) S. 104 der allgemeinen Theorie gewonnen: *Ist γ nicht ganzzahlig, so liefern die in* (13) *dargestellten Z_1, Z_2 für die Umgebung des singulären Punktes $z = 0$ zwei linear-unabhängige Lösungen, die übrigens durch ihre Eigenschaften, daß die Anfangsglieder der Potenzreihen 1 bzw. $z^{1-\gamma}$ sind, eindeutig bestimmt sind.*

Ist zweitens γ ganzzahlig, so haben wir zu unterscheiden, ob $\gamma < 1$, $= 1$ oder > 1 ist. Im ersten Falle bleibt nur die Lösung Z_2 brauchbar und zeigt, *daß wir in diesem oben ausgeschlossenen Falle*[1]) *eine im Punkte $z = 0$ analytisch bleibende Lösung mit einem daselbst gelegenen Nullpunkte der Ordnung* $(1-\gamma)$ *haben.* Ist $\gamma = 1$, so liefern die beiden Reihen (13) ein und dieselbe Lösung, da $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ im ersten und zweiten Argumente symmetrisch ist. Im dritten Falle, $\gamma > 1$, wird die zweite Reihe (13) unbrauchbar, und es verbleibt nur die Lösung $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$.

In allen diesen Fällen kann man sich eine zweite Lösung vermittelst einer Methode verschaffen, *nach der man bei jeder linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus einer ersten partikulären Lösung mittelst zweier Quadraturen die allgemeine Lösung fin-*

1) Siehe jedoch die zweite Note S. 110.

det. Ist nämlich Z_1 eine erste partikuläre Lösung der Gleichung (1) S. 97 und ζ irgendeine Lösung derselben, so gilt:

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = f_1(z)\frac{d\zeta}{dz} + f_2(z)\zeta,$$

$$\frac{d^2 Z_1}{dz^2} = f_1(z)\frac{dZ_1}{dz} + f_2(z) Z_1.$$

Durch Elimination von $f_2(z)$ folgt:

$$\frac{d}{dz}\left(Z_1\frac{d\zeta}{dz} - \zeta\frac{dZ_1}{dz}\right) = f_1(z)\left(Z_1\frac{d\zeta}{dz} - \zeta\frac{dZ_1}{dz}\right),$$

so daß es gelingt, den hier links und rechts in der Klammer auftretenden Ausdruck durch eine erste Quadratur zu berechnen; man findet:

$$Z_1\frac{d\zeta}{dz} - \zeta\frac{dZ_1}{dz} = A e^{\int f_1(z)dz},$$

unter A eine Konstante verstanden. Aus dieser Gleichung aber folgt sofort weiter:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\zeta}{Z_1}\right) = A Z_1^{-2} e^{\int f_1(z)dz},$$

so daß wir mittelst einer zweiten Quadratur die allgemeine Lösung ζ in der Gestalt gewinnen:

$$\zeta = A Z_1 \int\left(Z_1^{-2} e^{\int f_1(z)dz}\right)dz + BZ_1,$$

unter B eine zweite Konstante verstanden.

Im Falle der hypergeometrischen Differentialgleichung liefert diese Methode die allgemeine Lösung:

$$\zeta = A Z_1 \int\left(z^{-\gamma}(1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma-1} Z_1^{-2}\right)dz + BZ_1.$$

Wir wollen diese Gleichung in dem unten allein in Betracht kommenden Falle $\gamma = 1$ noch weiter verfolgen, indem wir unter Z_1 die Lösung $F(\alpha, \beta, 1; z)$ verstehen; auch wollen wir $A = 1$, $B = 0$ setzen, was die besondere Lösung:

$$Z_2 = Z_1 \int\left(z^{-1}(1-z)^{-\alpha-\beta} Z_1^{-2}\right)dz$$

liefert. Der Ausdruck in der Klammer gestattet eine Reihenentwicklung, deren erstes Glied z^{-1} ist und die übrigens jedenfalls in der Umgebung von $z = 0$ konvergiert, da Z_1 hier analytisch ist und den Wert 1 hat. Die Integration und Multiplikation des Integrales mit $Z_1 = F(\alpha, \beta, 1; z)$ ergibt für Z_2 eine Darstellung der Gestalt:

$$Z_2 = \mathfrak{P}_2(z) + \log z \cdot \mathfrak{P}_1(z),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ einfach unsere hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, 1; z)$ ist und die Reihe $\mathfrak{P}_2(z)$, insofern wir die Konstante $B = 0$ setzen wollten, das

Absolutglied 0 hat. Die hiermit gewonnene Darstellung von Z_2 ordnet sich dem allgemeinen Ansatze (15) S. 105 unter, so daß die damaligen Aussagen für die hier betrachtete Lösung gelten. *Insbesondere wird auch* $\mathfrak{P}_2(z)$ *für* $|z| < 1$ *konvergent sein; im übrigen sind die hier vorliegenden* $\mathfrak{P}_1(z)$, $\mathfrak{P}_2(z)$ *eindeutig bestimmt,* $\mathfrak{P}_1(z)$ *als hypergeometrische Reihe* $F(\alpha, \beta, 1; z)$ *und* $\mathfrak{P}_2(z)$ *durch die Forderung des verschwindenden Absolutgliedes.*

Übrigens ist es nicht schwer, die Reihe $\mathfrak{P}_2(z)$ explizite anzugeben. Schreiben wir:

$$\mathfrak{P}_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad \mathfrak{P}_2(z) = c_0' + c_1' z + c_2' z^2 + \cdots,$$

so ist $c_0 = 1$, $c_0' = 0$ und die erste Reihe ist die hypergeometrische mit $\gamma = 1$, so daß sich aus (9):

$$(14) \qquad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n^2}$$

ergibt. Trägt man nun in die Gleichung (1) die Lösung Z_2 ein, entwickelt nach Potenzen von z und setzt den Koeffizienten von z^n gleich 0, so ergibt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung der c_n', welche man unter Benutzung von (14) leicht auf die Gestalt bringt:

$$\frac{c_n'}{c_n} = \frac{c_{n-1}'}{c_{n-1}} + \frac{1}{\alpha + n - 1} + \frac{1}{\beta + n - 1} - \frac{2}{n},$$

gültig für $n = 1, 2, 3, \ldots$[1]) Auf Grund der bekannten Ausdrücke für die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sowie der Festsetzung $c_0' = 0$ bestimmen sich jetzt leicht alle weiteren Koeffizienten $c_1', c_2', \ldots$, und man wird für $\mathfrak{P}_2(z)$ auf folgende, fortan durch das Symbol $F_1(\alpha, \beta; z)$ zu bezeichnende Reihe geführt:

$$(15) \quad F_1(\alpha, \beta; z) = \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot 1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{2}{1}\right) z$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) z^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2}\right.$$
$$\left. - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) z^3 + \cdots,$$

1) Wenn eine der Größen α, β, etwa die erste, ganzzahlig und < 0 ist und damit $F(\alpha, \beta, 1; z)$ eine rationale ganze Funktion des Grades $-\alpha$ darstellt, so ist die Rekursionsformel des Textes nur für die Indizes $n < -\alpha$ zu benutzen. Für $n = 1 - \alpha$ und $n > 1 - \alpha$ sind alsdann die folgenden Rekursionsformeln zu benutzen:

$$(1 - \alpha)^2 c_{1-\alpha}' = (\beta - \alpha) c_{-\alpha}, \qquad c_n' = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n^2} c_{n-1}'.$$

Die im Texte sogleich anzugebende Reihe $F_1(\alpha, \beta; z)$ verliert in diesem Falle, wie man leicht nachweisen wird, ihre Gültigkeit nicht.

die, wie schon hervorgehoben wurde, für $|z| < 1$ konvergiert. Wir merken als Ergebnis an: *Ist* $\gamma = 1$, *so besitzen wir in:*

$$(16)\qquad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, 1; z), \\ Z_2 = F_1(\alpha, \beta; z) + \log z \cdot F(\alpha, \beta, 1; z) \end{cases}$$

ein System linear-unabhängiger Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung (1).

Zur Vorbereitung der späteren Anwendungen wollen wir für jeden der beiden anderen singulären Punkte ein Paar von Lösungen der Differentialgleichung (1) zusammenstellen, die sich jetzt unmittelbar durch je zwei geeignet ausgewählte unter unseren 24 Transformationen ergeben. *Für* $z = 1$ *nehmen wir an, daß das hierbei in Betracht kommende dritte Argument* $\gamma' = \alpha + \beta - \gamma + 1$ *nicht ganzzahlig sei, und haben dann für die Umgebung des singulären Punktes* $z = 1$ *als linear-unabhängige Lösungen:*

$$(17)\begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \\ Z_2 = (1 - z)^{-\alpha-\beta+\gamma} F(-\alpha + \gamma, -\beta + \gamma, -\alpha - \beta + \gamma + 1; 1 - z), \end{cases}$$

wo übrigens, wie wir doch noch hinzusetzen wollen, die hier mit Z_1, Z_2 bezeichneten Lösungen keineswegs die Fortsetzungen der oben bei $z = 0$ so bezeichneten Lösungen zu sein brauchen. Für den dritten singulären Punkt $z = \infty$ kommt unten gerade der Fall in Betracht, daß nach Ausführung der Transformation das dritte Argument $\gamma' = \alpha - \beta + 1$ gleich 1 ist, was $\beta = \alpha$ zur Folge hat. Für die transformierte Gleichung müssen wir jetzt ein Lösungssystem in der Gestalt (16) ansetzen. Die einfache Zwischenrechnung liefert das Ergebnis: *Ist* $\beta = \alpha$, *so hat man für die Umgebung des singulären Punktes* $z = \infty$ *ein System linear-unabhängiger Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung in der Gestalt:*

$$(18)\begin{cases} Z_1 = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1; \frac{1}{z}\right), \\ Z_2 = z^{-\alpha}\left(F_1(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \frac{1}{z}) - \log z \cdot F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1; \frac{1}{z})\right). \end{cases}$$

Hiermit sind alle Vorbereitungen getroffen, deren wir zur Behandlung der Theorie der elliptischen Funktionen bedürfen.

8*

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen erster Stufe.

Das S. 96 entwickelte Grundproblem der Theorie der elliptischen Funktionen hat als erstes Ziel, den einzelnen Körper algebraischer Funktionen des Geschlechtes $p = 1$, den wir durch eine Riemannsche Fläche F_2 mit zwei Blättern und vier getrennt liegenden Verzweigungspunkten erklären können, und die dem Körper zugehörigen Integrale:

$$(1) \qquad \int R(z, \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e})\, dz$$

näher zu untersuchen. Integrale dieser Art sind sehr früh bei Untersuchungen über Rektifikation von Kurven, insbesondere der Ellipse, aufgetreten[1]), und diese Beziehung zur Ellipse hat für die Integrale (1), welche wir fortan allgemein als *„elliptische" Integrale* bezeichnen, den Namen abgegeben. Wie wir schon S. 96 andeuteten, wird in die Untersuchung dadurch eine grundsätzliche Wendung hineinkommen, daß die algebraischen Funktionen des vorgelegten Körpers, in Abhängigkeit von einem gewissen unter den Integralen (1) betrachtet, zu *eindeutigen* Funktionen werden, die wir eben in dieser Abhängigkeit als *„elliptische" Funktionen* bezeichnen werden. Der Körper algebraischer Funktionen geht dabei in einen *„Körper elliptischer Funktionen"* über, dem dann weiter unsere Betrachtung gelten wird.

Darüber hinaus haben wir als zweites Ziel, welches unser Grundproblem stellt, nach S. 96 zu nennen, daß wir einen Überblick über das Gesamtsystem aller Körper algebraischer Funktionen des Geschlechtes $p = 1$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, aller Körper elliptischer Funktionen gewinnen sollen. Diese Aufgabe ist sehr wohl einer algebraischen Behandlung fähig und soll sogleich in dieser Weise in Angriff genommen werden. Aber auch hier wird die Hereinnahme jenes

---

1) Bogendifferentiale von der fraglichen Gestalt für die Ellipse sowie für die verlängerte und verkürzte Zykloide finden sich bereits bei J. Wallis, der in der Zeit von 1655—59 Untersuchungen über die Bogenlängen der genannten Kurven anstellte; siehe darüber W. Kutta, „Elliptische und andere Integrale bei Wallis", Bibl. math., 3. Reihe, Bd. 2 (1901), S. 230. Man vgl. auch die geschichtlichen Notizen in dem Referate II B 3 „Elliptische Funktionen" von R. Fricke im Bd. 2, Teil 2 der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", S. 182; wir zitieren diese Darstellung als „Referat über elliptische Funktionen".

besonderen Integrales eine neue Wendung in die Entwicklung hineinbringen, bei welcher wir an den Begriff der elliptischen Funktionen denjenigen der *„elliptischen Modulfunktionen“* anzureihen haben werden.

Die Behandlung der angegebenen Probleme, die wir hier zunächst vorlegen, ist nicht diejenige, welche geschichtlich zuerst entstanden ist. Die Theorie der elliptischen Integrale bei A. M. Legendre[1]), sowie diejenige der elliptischen Funktionen bei C. F. Gauß[2]), N. H. Abel[3]) und C. G. J. Jacobi[4]) hatte eine Gestalt, welche wir erst im nächsten Abschnitt näher kennen lernen werden. Der Vorrang gebührt derjenigen Gestalt, in welche K. Weierstraß[5]) die Theorie der elliptischen Funktionen gekleidet hat; dieser Gestalt der Theorie schließt sich der vorliegende erste Abschnitt an.

Das Verhältnis der Weierstraßschen Darstellung der Theorie der elliptischen Funktionen zu der älteren Gestalt derselben findet seine klarste Ausdrucksform in der von F. Klein[6]) aufgestellten *„Stufentheorie“*. Wir können die einfachen arithmetisch-gruppentheoretischen Grundlagen der Stufentheorie erst unten zur Darstellung bringen. Die

---

1) S. dessen „Traité des fonctions elliptiques“, 3 Bde. (Paris 1825—1828); Legendre benennt die Integrale als „fonctions elliptiques“.

2) „Gesammelte Werke“, Bd. 3 und 8 (Göttingen, 1866 und 1900); siehe auch L. Schlesinger „Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie“, Gött. Nachr. von 1912 (Beiheft).

3) Die Untersuchungen Abels beginnen 1826 und sind vornehmlich in den fünf ersten Bänden des Journ. für Math. veröffentlicht; siehe auch „Oeuvres compl. de N. H. Abel“, nouv. édition par L. Sylow et S. Lie (Kristiania, 1881). Die beiden wichtigsten Abhandlungen sind „Recherches sur les fonctions elliptiques“, Oeuvres, Bd. 1, p. 279 und „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques“, Oeuvres, Bd. 1, p. 518.

4) Jacobis erste Mitteilungen sind im Jahre 1828 in den Astron. Nachrichten und im Journ. f. Math. erschienen. Die Hauptschrift „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ ist 1829 in Königsberg als selbständiges Buch erschienen. Die Vorlesungen Jacobis „Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet“ sind 1838 von C. W. Borchardt ausgearbeitet. Man vgl. übrigens Jacobis „Gesammelte Werke“, Bd. 1 und 2 (Berlin, 1881 und 82).

5) In seinen Berliner Vorlesungen seit dem Winter 1862/63. Siehe auch H. A. Schwarz „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen“, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstraß, (Göttingen, 1881 ff.). Vgl. endlich „Referat über elliptische Funktionen“, S. 246.

6) Siehe Kleins Abhandlungen „Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung“, Math. Ann., Bd. 17 (1880), S. 133 und „Zur Theorie der elliptischen Funktionen n^{ter} Stufe“, Leipziger Ber. von 1884, S. 61. Vgl. übrigens „Modulfunktionen“, Bd. 2, S. 1 und „Referat über elliptische Funktionen“, S. 247 und 277.

Integrale und Funktionen der *ersten* Stufe werden diejenigen sein, mit denen die Weierstraßsche Behandlung der Theorie arbeitet; und demgegenüber gehören die Größen der älteren Theorie zur *zweiten* bzw. *vierten* Stufe. Schon hier ist folgende Erklärung verständlich: *Wir gelangen zur Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen „erster" Stufe, wenn wir uns bei den alsbald einzuführenden Invarianten der in* (1) *unter dem Wurzelzeichen stehenden ganzen Funktion vierten Grades ausschließlich auf den Gebrauch „rationaler" Invarianten beschränken.* In diesem Sinne wird es schon hier gestattet sein, die Bezeichnung „erste Stufe" zu benutzen.

Erstes Kapitel.

Die elliptischen Integrale und ihre zur ersten Stufe gehörenden Normalgestalten.

Wir nehmen nunmehr den Gedankengang von S. 96 wieder auf und wenden uns zur Untersuchung der Integrale einer vorgelegten Riemannschen Fläche F_2 mit vier getrennt liegenden Verzweigungspunkten. Diese Fläche ist eine unter unendlich vielen F_2, welche ein und denselben Körper algebraischer Funktionen definieren; in der Tat ist ja jede andere F_2, welche auf die zunächst vorgelegte Fläche im Sinne von S. 93ff. umkehrbar rational bezogen ist, ebensogut brauchbar, als Grundlage der Betrachtung der Funktionen des Körpers und der Integrale zu dienen. Wir werden danach streben, die Integrale tunlichst in eine Gestalt zu kleiden, die gegenüber Wechsel der Fläche invariant ist. Auf der anderen Seite werden wir, sobald es sich um die Bevorzugung einer besonderen F_2 und um den Aufbau der ihr zugehörigen „Normalgestalten" der Integrale handelt, dem Prinzip der „ersten" Stufe folgend nur mit „rationalen" Invarianten arbeiten.

§ 1. Die Verzweigungsform, ihre Invarianten und ihre Normalgestalt erster Stufe.

Um Kollisionen der Bezeichnungen zu vermeiden, soll die ganze Funktion, deren Nullpunkte die vier Verzweigungspunkte sind, fortan durch:

(1) $$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

bezeichnet werden. Unter den sonstigen zweiwertigen Funktionen des Körpers (deren einzelne jedesmal eine der anderen F_2 liefert) wollen wir zunächst nur diejenigen Funktionen z' zulassen, welche mit z vermöge einer linearen Gleichung:

(2) $$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

von nicht verschwindender Determinante $(ad - bc)$ zusammenhängen. Die Beziehung, welche hierdurch zwischen der z-Ebene und der z'-Ebene begründet ist, stellt eine „*Kreisverwandtschaft*" dar, und wir gewinnen also Anschluß an die vorbereitenden Entwicklungen von S. 66ff.

Bei der Umrechnung des Ausdrucks (1) auf z' muß man, um die zu z' gehörende Funktion $f'(z')$ zu gewinnen[1]), welche die neue Fläche F_2' festlegt, nach Einführung von z' noch mit $(-cz' + a)^4$ multiplizieren. Die Rechnungen gestalten sich übersichtlicher, wenn wir in folgender Art eine „*homogene Schreibweise*" einführen: *Wir setzen* $z = \frac{z_1}{z_2}$ *und führen* z_1 *und* z_2 *nebeneinander als „binäre Variable" ein, wobei wir festsetzen, daß* z_1, z_2 *niemals zugleich verschwinden und stets endlich sein sollen.* Dem einzelnen Werte z entsprechen dann natürlich unendlich viele Paare z_1, z_2; dieselben gehen aus einem unter ihnen durch die Substitution:

$$z_1' = \sigma z_1, \quad z_2' = \sigma z_2 \tag{3}$$

hervor, unter σ irgendeinen endlichen, von 0 verschiedenen komplexen Proportionalitätsfaktor verstanden.

An Stelle von (1) tritt nun eine *homogene* Funktion vierten Grades:

$$f(z_1, z_2) = z_2^4 \cdot f(z)$$

oder, wie man sagt, eine „*Form*" vierten Grades:

$$f(z_1, z_2) = a_0 z_1^4 + 4a_1 z_1^3 z_2 + 6a_2 z_1^2 z_2^2 + 4a_3 z_1 z_2^3 + a_4 z_2^4; \tag{4}$$

wir wollen sie die „*Verzweigungsform*" der Fläche F_2 nennen und weiterhin der Kürze halber durch f_z bezeichnen. Von (2) gehen wir durch Lösung nach z zunächst zur „inversen" Substitution und spalten die letztere sodann in:

$$z_1 = dz_1' - bz_2', \quad z_2 = -cz_1' + az_2', \tag{5}$$

wobei diese binäre oder homogene Substitution wieder die bisherige nicht verschwindende Determinante $(ad - bc)$ hat. Auf diese Weise sind die Rechnungen gut vorbereitet, indem man durch Eintragung der Ausdrücke (5) für z_1 und z_2 in (4) nach der erforderlichen Neuordnung der Glieder die transformierte Form $f'_{z'}$ erhält.

Wir wollen nun Formen, die auf diese Weise durch lineare Substitutionen auseinander hervorgehen, miteinander „*äquivalent*" nennen und übertragen diese Bezeichnung auch auf die ihnen zugehörigen Riemannschen Flächen; „gleichwertig" sind diese Flächen auch in dem Sinne, daß sie einen und denselben Körper algebraischer Funktionen de-

1) Es dürfte kaum nötig sein, darauf hinzuweisen, daß hier f' natürlich nicht die Ableitung von f bedeutet.

finieren. Es stellt sich hier nun die Frage ein, *wie man zwei Formen unmittelbar ansehen kann, ob sie äquivalent sind oder nicht,* sowie dann weiter, *wie man unter allen äquivalenten Formen f_z eine besonders zweckmäßig gebaute zum endgültigen Gebrauche auswählen kann.*

Auf diese Fragen antwortet die „*Invariantentheorie der binären Formen*".[1]) Um in dieser Hinsicht keine besonderen Vorkenntnisse vorauszusetzen, stellen wir folgende Erklärung an die Spitze: Als eine rationale Invariante von f_z bezeichnen wir jede rationale Funktion der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$, welche, gebildet für die Koeffizienten $a'_0, a'_1, \ldots, a'_4$ einer mit f_z äquivalenten Form $f'_{z'}$, bis auf einen Faktor, der eine Potenz der Determinante $(ad - bc)$ der benutzten Substitution (5) ist, gleich der ursprünglichen, d. h. für die $a_0, a_1, \ldots, a_4$ gebildeten Funktion ist; falls der Faktor gleich 1 (d. i. gleich der nullten Potenz der Determinante $ad - bc$) ist, so spricht man von einer „absoluten" Invariante.

Da die einzelne Invariante z. B. auch gegenüber der Substitution (3), aus welcher $a'_i = \sigma^{-4} a_i$ folgt, ihre charakteristische Eigenschaft bewahren muß, so ist sie notwendig eine *homogene* Funktion der $a_0, a_1, \ldots, a_4$, und insbesondere muß die „Dimension" dieser homogenen Funktion gleich 0 sein, wenn eine absolute Invariante vorliegen soll.

Wir fragen nun zunächst, ob es möglich ist, ganze rationale Invarianten herzustellen, und wollen eine solche, wenn δ ihre Dimension ist, durch das Symbol:

$$g_\delta(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

bezeichnen. Ist die Determinante $D = ad - bc$ der Substitution (5) gleich 1, so nennen wir diese Substitution „unimodular". Ist D nicht gleich 1, so können wir die Substitution (5) in die beiden Substitutionen:

$$z_1 = \sqrt{D} z''_1, \quad z_2 = \sqrt{D} z''_2,$$
$$z''_1 = \frac{d}{\sqrt{D}} z'_1 - \frac{b}{\sqrt{D}} z'_2, \quad z''_2 = -\frac{c}{\sqrt{D}} z'_1 + \frac{a}{\sqrt{D}} z'_2$$

zerlegen, deren zweite unimodular ist, während die Wirkung der ersten auf g_δ einfach die folgende ist:

(6) $$g_\delta(a''_0, a''_1, \ldots) = D^{2\delta} g_\delta(a_0, a_1, \ldots).$$

Wir dürfen uns demnach zunächst auf die Feststellung der Wirkung irgendwelcher unimodularer Substitutionen auf g_δ beschränken.

Nach einer S. 69ff ausgeführten Rechnung kann man nun jede Sub-

1) S. etwa A. Clebsch, „Theorie der binären algebraischen Formen", (Leipzig, 1872), S. 134.

stitution (2) durch Kombination von höchstens vier Substitutionen herstellen, deren jede eine der Gestalten hat:

$$z' = \frac{az}{d}, \quad z' = \frac{-1}{z}, \quad z' = z - b.$$

Im ersten Falle dürfen wir die Koeffizienten so gewählt denken, daß $ad = 1$ zutrifft. Diese besonderen Substitutionen sind dann sämtlich unimodular; und es kommt auch die durch ihre Kombinierung zu gewinnende Substitution (2) unimodular heraus.

Die drei ebengenannten Substitutionen liefern die nachfolgenden homogenen Substitutionen, denen wir sogleich die zugehörigen Transformationen der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ anreihen:

$$(7) \qquad z_1 = dz_1', \quad z_2 = az_2', \quad a_k' = a^k d^{4-k} \cdot a_k,$$

$$(8) \qquad z_1 = z_2', \quad z_2 = -z_1', \quad a_k' = (-1)^k a_{4-k},$$

$$(9) \qquad \begin{cases} z_1 = z_1' + bz_2', \quad z_2 = z_2', \\ a_k' = a_0 b^k + \binom{k}{1} a_1 b^{k-1} + \binom{k}{2} a_2 b^{k-2} + \cdots + a_k. \end{cases}$$

Sollen wir also in g_δ wirklich eine Invariante vor uns haben, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß g_δ diesen Charakter der Invarianz bezüglich der drei Transformationen (7), (8) und (9) besitzt.

Es ist nun zunächst sehr leicht, für $\delta = 2$ eine Invariante g_2 herzustellen. Man beachte nämlich, daß jedes der drei Produkte $a_k a_{4-k}$ gegenüber den Transformationen (7) und (8) absolut invariant ist, wobei im ersten Falle die Relation $ad = 1$ mit in Betracht kommt. Die Transformation (9) aber liefert:

$$a_k' a_{4-k}' = a_0^2 b^4 + 4a_0 a_1 b^3 + ((k^2 - 4k + 6)a_0 a_2 - (k^2 - 4k)a_1^2)b^2$$
$$+ ((k^2 - 4k + 4)a_0 a_3 - (k^2 - 4k)a_1 a_2)b + a_k a_{4-k}.$$

Zufolge der rechten Seite wird die lineare Kombination:

$$A_0 a_0 a_4 + A_1 a_1 a_3 + A_2 a_2^2$$

der drei Produkte $a_k a_{4-k}$ auch gegenüber der Transformation (9) absolut invariant sein, falls die beiden Gleichungen:

$$\sum_{k=0}^{2} A_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{2} (k^2 - 4k) A_k = 0$$

zutreffen. Wir lösen dieselben durch $A_0 = 1$, $A_1 = -4$, $A_2 = 3$ und finden damit eine erste Invariante:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Noch weit leichter gewinnen wir eine Invariante g_3, nämlich in Gestalt der Determinante:

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix},$$

deren absolute Invarianz gegenüber den drei Transformationen (7), (8) und (9) leicht beweisbar ist. Das Verhalten von g_2 und g_3 gegenüber einer nicht-unimodularen Substitution regelt sich auf Grund der Gleichung (6). Als Ergebnis merken wir somit an: *Die Verzweigungsform f_z hat die beiden Invarianten der Dimensionen 2 und 3:*

$$(10)\qquad \begin{cases} g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \\ g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3, \end{cases}$$

welche sich bei Übergang zu einer beliebigen äquivalenten Form bis auf die 4te bzw. 6te Potenz der Substitutionsdeterminante D reproduzieren:

$$(11)\qquad g_2' = D^4 g_2, \quad g_3' = D^6 g_3.$$

Wir benutzen die bisherigen Entwicklungen sofort zur Auswahl einer besonderen mit (1) äquivalenten Form, einer sogenannten „Normalgestalt" der Verzweigungsform, die wir als *„Verzweigungsform erster Stufe"* bezeichnen werden. Wir begehen hierbei eine weiterhin noch zu besprechende Unsymmetrie, indem wir einen der vier Verzweigungspunkte e_k (Nullpunkte von f_z) etwa e_4 mittelst einer ersten Substitution:

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = -z_1 + e_4 z_2$$

nach $z' = \infty$ werfen.[1] Die Folge ist, daß in der zu gewinnenden äquivalenten Form $f_{z'}'$ der Keoffizient a_0' verschwindet. Dagegen wird a_1' nicht verschwinden, da kein zweiter Verzweigungspunkt nach $z' = \infty$ fallen kann. Wir führen daraufhin als zweite Transformation:

$$z_1'' = z_1' + \frac{a_2'}{2a_1'} z_2', \quad z_2'' = z_2'$$

aus, welche für die z'-Ebene den Charakter einer Translation besitzt und also den Punkt $z' = \infty$ zum Fixpunkte hat. Die Substitution ist im übrigen so gewählt, daß in $f_{z''}''$ auch noch der dritte Koeffizient a_2'' verschwindet, während $a_1'' = a_1'$ ist. Wir setzen endlich drittens:

$$z_1''' = \sqrt{a_1''}\, z_1'', \quad z_2''' = \frac{1}{\sqrt{a_1''}} z_2''$$

und erzielen hierdurch eine Form von der Gestalt:

$$f_{z'''}''' = 4z_1'''^3 z_2''' + 4a_3''' z_1''' z_2'''^3 + a_4''' z_2'''^4.$$

Es ist nun nicht nötig, die a_3''', a_4''' auf dem Wege der drei ausgeübten Substitutionen zu berechnen. Man wolle vielmehr auf Grund der allgemeinen Vorschrift (10) für $f_{z'''}'''$ die Invarianten g_2''', g_3''' berechnen, wobei man findet:

$$g_2''' = -4a_3''', \quad g_3''' = -a_4'''.$$

1) Liegt dort bereits ein Verzweigungspunkt, so ist diese Transformation natürlich nicht erforderlich.

Nun sind aber alle drei zur Verwendung gekommenen Substitutionen unimodular; also gilt $g_2''' = g_2$, $g_3''' = g_3$ und damit:

$$4a_3''' = -g_2, \quad a_4''' = -g_3.$$

Die gewonnene Normalgestalt der Verzweigungsform, welche wir unter Fortlassung der oberen Indizes so schreiben:

(12) $$f_z = 4z_1^3 z_2 - g_2 z_1 z_2^3 - g_3 z_2^4,$$

ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß die Invarianten g_2 und g_3 unmittelbar ihre Koeffizienten abgeben; sie soll fortan unsere „Verzweigungsform der ersten Stufe" sein.[1])

Man gewinnt nun leicht einen Satz über die gesamten rationalen Invarianten der Form (4). Irgendeine solche Invariante läßt sich als rationale homogene Funktion der a_k in die Gestalt des Quotienten zweier ganzen Invarianten $g_\delta(a_0, a_1, \ldots, a_4)$ setzen.[2]) Da nun die Form (12) aus (4) durch eine unimodulare Substitution entstand, so wird g_δ unverändert bleiben, wenn wir an Stelle der a_k die Koeffizienten der Form (12) eintragen; es läßt sich sonach g_δ als ganze rationale Funktion der g_2, g_3 darstellen. Da ferner g_δ homogen von der Dimension δ in den a_k ist, so werden in dem gewonnenen Ausdrucke von g_δ nur Glieder mit $g_2^\lambda g_3^\mu$ auftreten, in denen λ und μ nicht-negative ganze Zahlen sind, die der Gleichung:

(13) $$\delta = 2\lambda + 3\mu$$

genügen. Wir haben also als Ergebnis: *Jede ganze rationale Invariante der Form* (4) *läßt sich als ganze rationale Funktion der g_2, g_3 in der Gestalt:*

(14) $$g_\delta = \sum_{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu} g_2^\lambda g_3^\mu$$

1) Die hier mit g_2 und g_3 bezeichneten Invarianten der biquadratischen binären Form gehören zu den ersten Beispielen, welche für den Invariantenbegriff beigebracht wurden, und sind von A. Cayley und Boole aufgefunden; s. Cayleys Veröffentlichung im Cambridge Math. Journ., Bd. 4 (1845), S. 193 oder Cayley, „Collected Mathematical Papers", Bd. 1 (Cambridge, 1888), S. 80ff. Für die elliptischen Funktionen hat Ch. Hermite jene Invarianten zuerst verwertet, indem er freilich nicht durch eine lineare Substitution, sondern durch eine in invariante Gestalt gekleidete Transformation 6ten Grades zur Normalform (12) des Textes gelangt; s. Hermite, „Sur la théorie des fonctions monogènes à deux indéterminées", Journ. f. Math., Bd. 52 (1854) S. 1 oder Hermite, „Oeuvres", Bd. 1 (Paris, 1905) S. 350. Ganz allgemein hat dann Weierstraß die elliptischen Integrale in Übereinstimmung mit der Form (12) des Textes in der Gestalt:

$$\int R(z, \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3})\, dz$$

seiner Darstellung der Theorie zugrunde gelegt; s. darüber die fünfte Note S. 117.

2) Schreibt man die rationale homogene Funktion der a_k als Quotient zweier ganzer homogener Funktionen, so folgt aus dem Umstande, daß die neuen Koeffizienten a_k' linear und homogen in den alten a_k sind, sehr leicht die Invarianteneigenschaft von Zähler und Nenner des Quotienten, je für sich genommen.

darstellen, wo sich die Summe auf alle Lösungen der Gleichung (13) *in nicht-negativen ganzen Zahlen λ, μ bezieht und die $C_{\lambda,\mu}$ von den a_k unabhängige Konstante sind.* Daß umgekehrt jeder solche Ausdruck eine Invariante liefert, ist selbstverständlich.

Unter den Invarianten g_δ ist insbesondere die „*Diskriminante*" der Verzweigungsform enthalten, welche durch die Bezeichnung Δ hervorgehoben werden soll. Man gewinnt den Ausdruck (14) von Δ am einfachsten auf Grund des Satzes, daß das Verschwinden von Δ für das Auftreten einer mehrfachen Lösung der kubischen Gleichung $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$ charakteristisch ist, die dann also auch die quadratische Gleichung $12z^2 - g_2 = 0$ befriedigt. Die Elimination von z aus beiden Gleichungen liefert: *Die Diskriminante Δ der Verzweigungsform stellt sich in den Invarianten g_2 und g_3, wie folgt, dar:*

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \tag{15}$$

und ist demnach eine Invariante sechster Dimension in den a_k.

Als einfachste absolute rationale Invariante führen wir den Quotienten von g_2^3 und Δ ein, den wir als die wichtigste Invariante aller folgenden Betrachtungen durch die besondere Bezeichnung J hervorheben wollen. *Solange die Verzweigungspunkte, wie wir ja zunächst annahmen, getrennt liegen, kann J niemals unendlich werden, da Δ stets von 0 verschieden ist; übrigens können wir die Erklärung von J zufolge* (15) *in die beiden Gestalten kleiden:*

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \quad J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta},$$

die wir auch in Gestalt der Proportion:

$$J : (J-1) : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : \Delta \tag{16}$$

zusammenfassen können.

Mit Hilfe von J können wir die Darstellungen (14) der g_δ noch ein wenig umformen, wobei zu unterscheiden ist, ob die Dimension δ gerade oder ungerade ist. Ist erstlich $\delta = 2\varepsilon$ gerade, so muß zufolge (13) auch $\mu = 2\nu$ gerade sein; an Stelle von (13) tritt die Gleichung $\varepsilon = \lambda + 3\nu$. Die Gleichung (14) läßt sich alsdann so schreiben:

$$g_{2\varepsilon} = g_2^\varepsilon \sum_{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu} \left(\frac{g_3^2}{g_2^3}\right)^\nu,$$

so daß wir mit Benutzung von (16) gewinnen:

$$g_{2\varepsilon} = g_2^\varepsilon \sum_\nu C'_\nu \left(\frac{J-1}{J}\right)^\nu, \tag{17}$$

wobei sich die Summe auf alle nicht-negativen ganzen Zahlen ν be-

zieht, die nicht größer als $\frac{1}{3}\varepsilon$ sind. Ebenso findet man für ungerade Dimensionen $\delta = 2\varepsilon + 1$ die Darstellung:

(18) $$g_{2\varepsilon+1} = g_2^{\varepsilon-1} g_3 \sum_\nu C_\nu'' \left(\frac{J-1}{J}\right)^\nu,$$

wo jetzt ν alle nicht-negativen ganzen Zahlen durchläuft, die nicht größer als $\frac{1}{3}(\varepsilon - 1)$ sind. Berücksichtigt man noch, daß eine absolute Invariante stets als Quotient zweier g_δ gleicher Dimension darstellbar ist, so folgt: *Jede absolute rationale Invariante der Verzweigungsform ist als rationale Funktion von J darstellbar.* Daß umgekehrt jede rationale Funktion von J eine absolute Invariante ist, erscheint wieder selbstverständlich.

Es ist endlich die Frage, ob zwei vorgelegte Verzweigungsformen äquivalent sind, jetzt unmittelbar zu beantworten. Als ersten Satz merken wir an: *Zwei Verzweigungsformen sind stets und nur dann durch unimodulare Substitutionen ineinander überführbar, wenn sie gleiche Invarianten g_2 und g_3 haben.* Haben nämlich beide Formen dieselben Invarianten g_2, g_3, so ist jede von ihnen mittelst einer unimodularen Substitution in die Form (12) mit diesen g_2, g_3 überführbar, und also sind sie selber durch unimodulare Substitutionen ineinander überführbar. Daß andrerseits irgend zwei Formen, von denen die eine aus der anderen durch eine unimodulare Substitution entsteht, gleiche g_2, g_3 haben, ist wieder selbstverständlich.

Zu speziellen, und zwar besonders einfachen Fällen gelangen wir, wenn entweder $g_2 = 0$ oder $g_3 = 0$ zutrifft. Ist $g_2 = 0$, so darf g_3 nicht auch noch verschwinden, da Δ nicht 0 ist. In diesem Falle üben wir auf die Form (12) die nun freilich nicht mehr unimodulare Substitution:

$$z_1 = \frac{\sqrt[12]{g_3}}{\sqrt[6]{2}}\, z_1', \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{g_3}}\, z_2'$$

aus und finden (bei Fortlassung der oberen Indizes) als äquivalente Form:

(19) $$f_s = 4z_1^3 z_2 - 4z_2^3 = 4z_2(z_1^3 - z_2^3).$$

Alle Formen mit $J = 0$ sind hiernach mit der besonderen Form (19) *und also untereinander äquivalent.* Ist $g_3 = 0$ und also g_2 nicht gleich 0, so übe man auf (12) die Substitution:

$$z_1 = \frac{\sqrt[8]{g_2}}{\sqrt[4]{2}}\, z_1', \quad z_2 = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[8]{g_2^3}}\, z_2'$$

aus und findet als äquivalente Form:

(20) $$f_s = 4z_1^3 z_2 - 4z_1 z_2^3 = 4z_1 z_2 (z_1^2 - z_2^2).$$

Alle Formen mit $J = 1$ sind mit der besonderen Form (20) *und also wieder untereinander äquivalent.* Liegt endlich keiner dieser beiden Spezialfälle vor, so übe man auf (12) die wieder nicht mehr unimodulare Substitution:

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{g_3}{g_2}}\, z_1', \quad z_2 = \left(\sqrt[4]{\frac{g_2}{g_3}}\right)^3 z_2'$$

aus und erhält als transformierte Form:

$$f_z = 4 z_1^3 z_2 - \frac{27 J}{J-1}(z_1 z_2^3 + z_2^4). \tag{21}$$

Hieraus ergibt sich als Hauptsatz: *Zwei Verzweigungsformen sind stets und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe absolute Invariante J haben.* Der Satz schließt in dieser Gestalt die beiden Spezialfälle mit ein; zum Beweise hat man eben nur noch zu erwägen, daß zwei Formen mit gleichen J ein und derselben Form (21) äquivalent sind.

§ 2. Exkurs über lineare Substitutionen und deren Gruppen endlicher Ordnung.

Die Verzweigungsform erster Stufe f_z wurde vorhin dadurch eingeführt, daß wir einen unter den vier Verzweigungspunkten, nämlich e_4, nach dem Punkte ∞ der z-Ebene verlegten. Trotz dieser unsymmetrischen Bevorzugung eines unter vier gleichberechtigten Punkten gelangten wir zu einer Form f_z mit „rationalen“ Invarianten als Koeffizienten. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung in dem Umstande, daß es lineare Substitutionen gibt, *welche die vier Verzweigungspunkte in gewisser Weise permutieren und also f_z in sich transformieren.* Die Form f_z bleibt dieserhalb eben die gleiche, falls wir an Stelle von e_4 einen der anderen Punkte e_k nach ∞ verlegen. Um die Sachlage näher bezeichnen zu können, müssen wir ein paar Bemerkungen über das Rechnen mit linearen Substitutionen und über Gruppen solcher Substitutionen voraussenden.

Eine lineare Substitution der Variabelen z:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

nicht verschwindender Determinante $D = ad - bc$ wollen wir kurz durch das Symbol $z' = S(z)$ bezeichnen. Die Substitution ändert sich nicht wesentlich, falls wir die vier Koeffizienten a, b, c, d mit irgendeinem endlichen und von 0 verschiedenen gemeinsamen Faktor σ versehen.[1]) Die Determinante nimmt dabei den Faktor σ^2 an, und wir

1) Dies wird natürlich sofort anders, falls wir an Stelle von $z' = S(z)$ mit der „homogenen binären“ Substitution:

$$z_1' = a z_1 + b z_2, \quad z_2' = c z_1 + d z_2$$

arbeiten.

könnten σ insbesondere auf zwei Weisen so bestimmen, daß die Substitution „unimodular" wird; doch ist hierauf zunächst kein Gewicht zu legen. Wollen wir die Substitution nur durch Angabe ihrer vier Koeffizienten bezeichnen, so bedienen wir uns der symbolischen Schreibweise:

$$(1) \qquad S = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}.$$

Man wolle nun zwei Substitutionen:

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a_2, & b_2 \\ c_2, & d_2 \end{pmatrix}$$

hintereinander ausüben, d. h. auf $z' = S_1(z)$ die Substitution S_2 anwenden; man gewinnt:

$$z'' = S_2(z') = S_2(S_1(z)) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}$$

und also wieder eine lineare Substitution, deren Determinante, wie man leicht feststellt, das Produkt der Determinanten von S_1 und S_2 ist. Diese dritte, aus S_1 und S_2 „erzeugte" Substitution wollen wir symbolisch als „Produkt" $S_2 \cdot S_1$ oder $S_2 S_1$ von S_2 und S_1 bezeichnen. Dies wird um so mehr berechtigt sein, als die Formel

$$(2) \qquad S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} a_2, & b_2 \\ c_2, & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ c_1, & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1, & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1, & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

ein der Produktregel der Determinanten analoges Bildungsgesetz befolgt. Übrigens folgt aus den angegebenen Formeln, daß $S_2 \cdot S_1$ und $S_1 \cdot S_2$ im allgemeinen verschieden sind: *Für die symbolischen Produkte $S_2 \cdot S_1$ gilt das kommutative Gesetz nicht.*

Erzeugen wir aus drei Substitutionen S_1, S_2, S_3, die wir nacheinander ausüben, die Substitution $S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$, so würde die Herstellungsweise dieser Substitution genauer durch $S_3 \cdot (S_2 \cdot S_1)$ zu bezeichnen sein, da wir doch zunächst die Substitution $z'' = S_2 \cdot S_1(z)$ zu bilden haben und alsdann auf z'' die Substitution S_3 ausüben. Man kann aber $z''' = S_3(S_2(S_1(z)))$ auch dadurch berechnen, daß man erst $S_3 \cdot S_2$ herstellt und sodann in das Argument dieser Substitution $S_1(z)$ einträgt. *Für unsere symbolischen Produkte gilt also die Regel:*

$$(3) \qquad S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 = S_3 \cdot (S_2 \cdot S_1) = (S_3 \cdot S_2) \cdot S_1,$$

d. h. es gilt das „assoziative" Gesetz.

Ist S_0 die „identische" Substitution $z' = z$, so ist $S \cdot S_0 = S$, d. h. S_0 spielt die Rolle des Faktors 1; die identische Substitution bezeichnen wir demnach auch durch das Symbol 1. Ist $S' = \begin{pmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{pmatrix}$ die zu (1) „inverse" Substitution, so gilt $S' \cdot S = 1$; wir bezeichnen dieserhalb die zu S inverse Substitution auch durch S^{-1}. Üben wir die Substitution

S n Male hintereinander aus, so entsteht S^n, die n^{te} Potenz von S. Ist $S^n = 1$, ohne daß übrigens bereits eine niedere Potenz $S, S^2, \ldots, S^{n-1}$ gleich 1 wäre, so heißt S *„periodisch“* und n die *„Periode“* von S. Aus der S. 70 ff. besprochenen geometrischen Natur unserer Substitutionen geht hervor, daß nur die *„elliptischen“* Substitutionen periodisch sein können, und diese auch nur dann, wenn der S. 70 mit μ bezeichnete „Drehungswinkel“ zu 2π in einem rationalen Verhältnis steht.

Führen wir an Stelle von z eine neue Variabele Z wieder mittelst einer linearen Substitution ein, die wir aber, um sie besonders hervorzuheben, $Z = T(z)$ nennen, so rechnet sich S, in der neuen Variabelen geschrieben, auf:

$$Z' = TST^{-1}(Z)$$

um. Man sagt, die Substitution TST^{-1} entstehe aus S *durch „Transformation“ vermittelst der Substitution T.* Von solchen Transformationen haben wir bereits S. 70 Gebrauch gemacht, indem wir, falls eine nichtparabolische Substitution S vorliegt, deren „Fixpunkte“ nach $Z = 0$ und $Z = \infty$ warfen, um dadurch S auf die Gestalt:

$$Z' = mZ = |\, m \,| \cdot e^{\mu i} Z$$

zu transformieren. Je nach der Natur des rechts auftretenden Faktors m nannten wir dann S „elliptisch“, „hyperbolisch“ oder „loxodromisch“. Bei einer „parabolischen“ Substitution S fanden wir S. 71 entsprechend die transformierte Gestalt:

$$Z' = Z + b.$$

Man wolle sich hier auch der geometrischen Deutung unserer Substitution durch ihre „Bahn- und Niveaukurven“ erinnern und vergegenwärtige sich nochmals die verschiedene Gestaltung dieser Kurvenscharen bei den vier Gattungen unserer Substitutionen.

Wir sagen nun von einem System von Substitutionen:

$$S_0 = 1,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots, \tag{4}$$

dasselbe bilde eine „Gruppe“ G, falls zu jeder Substitution S des Systems (4) *auch die inverse S^{-1} im System enthalten ist, und falls mit irgend zwei Substitutionen S_i, S_k des Systems auch immer die aus ihnen zu erzeugende Substitution $S_k \cdot S_i = S_l$ dem System angehört.* Mit S und S^{-1} ist auch $S \cdot S^{-1} = 1$ in der Gruppe enthalten; wir haben dementsprechend die identische Substitution $S_0 = 1$ sogleich in (4) aufgenommen. Die Anzahl m der Substitutionen (4) heißt die *„Ordnung“* der Gruppe; dieselbe soll entsprechend genauer durch G_m bezeichnet werden.

Führen wir eine neue Variabele Z mittels einer Transformation T ein, so liefert die einzelne S_i der G_m, auf Z umgerechnet, die trans-

formierte Substitution $S'_i = TS_iT^{-1}$. Ist $S_k \cdot S_i = S_l$, so folgt aus dem assoziativen Gesetze (3):

$$S'_k \cdot S'_i = TS_kT^{-1} \cdot TS_iT^{-1} = T(S_kS_i)T^{-1} = S'_l$$

und hieraus insbesondere, falls $S_i = S_k^{-1}$ ist, $S'_k \cdot S'_i = 1$ und also $S'_i = S'^{-1}_k$. Somit ergibt sich, *daß auch die transformierten Substitutionen* $S'_0 = 1$, S'_1, S'_2, ... *eine Gruppe bilden*, von welcher wir sagen, *sie entstehe aus* G_m *durch Transformation vermittelst* T, *und die wir deshalb symbolisch durch:*

$$G'_m = TG_mT^{-1}$$

bezeichnen. Die Substitutionen beider Gruppen sind einander eindeutig zugeordnet, indem S'_i der Substitution S_i und S'^{-1}_i der zu S_i inversen S_i^{-1} entspricht. Auch folgt aus $S_k \cdot S_i = S_l$ für die G'_m die analoge Relation $S'_k \cdot S'_i = S'_l$. Das Gesetz, nach dem bei Kombination zweier Substitutionen jedesmal eine dritte entsteht, ist also für beide Gruppen völlig gleich gestaltet; die Gruppen G_m und G'_m heißen dieserhalb *„isomorph"*.

Mit S sind auch sämtliche Potenzen S^2, S^3, S^4, ... in G_m enthalten. Ist demnach, wie wir jetzt annehmen wollen, die Ordnung m *endlich*, so müssen die unendlich vielen Potenzen von S nur eine endliche Anzahl verschiedener Substitutionen darstellen. Man kann also zwei verschiedene ganze Zahlen μ, ν angeben, so daß $S^\mu = S^\nu$ zutrifft. Wir folgern hieraus, indem wir unter μ die größere unter beiden Zahlen verstehen, $S^{\mu-\nu} = 1$; also ist S periodisch und damit elliptisch: *Eine Gruppe* G_m *von endlicher Ordnung* m *enthält neben der identischen Substitution* $S_0 = 1$ *nur noch elliptische Substitutionen, und zwar natürlich nur solche von endlicher Periode.* Ist n die Periode von S, so haben wir in:

$$S,\ S^2,\ S^3,\ \ldots,\ S^{n-1},\ S^n = 1$$

alle aus S erzeugbaren Substitutionen. Man erkennt sofort, *daß diese* n *Substitutionen für sich eine Gruppe* G_n *bilden, die man als „zyklisch" bezeichnet und, als in* G_m *enthalten, eine „Untergruppe" von* G_m *nennt.*

Die wirkliche Herstellung von Gruppen endlicher Ordnung kann man auf folgende Erwägung gründen. Wir denken die z-Ebene im Raume horizontal angeordnet und konstruieren irgendwo im Raume eine Kugeloberfläche, auf welche wir vom höchsten Punkte der Kugel aus die z-Ebene stereographisch projizieren; die Kugelfläche wird so die Trägerin der komplexen Werte z.[1]) Drehen wir nun die Kugel um irgendeinen ihrer Durchmesser durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, so geht jeder

1) Siehe die spezielle S. 22 durchgeführte Projektion dieser Art.

Punkt z der Kugel in einen Punkt z' derselben über, und wir erhalten eine Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst, die kongruent und also konform ist. Dabei führt die n-malige Wiederholung der Drehung jeden Punkt z an seinen ursprünglichen Ort zurück. Nun stellt die stereographische Projektion eine konforme Abbildung dar (vgl. S. 23); jene Drehung liefert also eine umkehrbar eindeutige und konforme Beziehung der z-Ebene auf sich selbst und also nach S. 66 eine lineare Substitution $z' = S(z)$. Da aber die n-malige Ausübung der Drehung jeden Punkt z an seine Anfangsstelle zurückführte, so ist $S^n = 1$, d. h. S ist elliptisch von der Periode n.[1])

Das Prinzip, mittels dessen wir auf dieser Grundlage Gruppen G_m erklären können, ist nun folgendes. Wir denken konzentrisch mit der Kugel im Raume irgendeine regelmäßige Figur konstruiert. Die gesamten Drehungen der Kugel, welche diese Figur mit sich selbst zur Deckung bringen, ergeben dabei ein System gleichartiger Operationen, an dem man die oben bei den G_m aufgestellten Gruppeneigenschaften sofort erkennt. Der Übergang zur z-Ebene liefert dann in der Tat eine G_m gewünschter Art.[2])

Dieses Prinzip soll nun an einigen, sogleich weiter zu benutzenden Beispielen erläutert werden. Zuerst zeichnen wir in irgendeiner Diametralebene der Kugel einen schiefwinkligen mit der Kugel konzentrischen Rhombus. Hier gibt es außer der „identischen" Drehung im ganzen drei Drehungen des Rhombus in sich, nämlich die beiden Drehungen der Periode zwei um die Diagonalen des Rhombus und die Drehung der Periode zwei um den zur Rhombusebene senkrechten Kugeldurchmesser. Man kann auch sagen, *es handele sich hier um die Drehungen der Periode zwei um drei zueinander senkrechte Achsen durch den Kugelmittelpunkt.*

Die zugehörige G_4 der vier Substitutionen $S_0 = 1$, S_1, S_2, S_3 heißt „*Vierergruppe*". Es ist an der Rhombusfigur leicht ersichtlich, daß für die drei Substitutionen S_1, S_2, S_3 der G_4 die Beziehungen:

$$S_k \cdot S_i = S_l$$

gelten, wenn i, k, l irgendeine Permutation der Indizes 1, 2, 3 ist. Hier ist also insbesondere auch $S_k \cdot S_i = S_i \cdot S_k$; man nennt die beiden Sub-

1) Die „Parallel"- und „Meridiankreise" der Kugeldrehung liefern bei der Projektion unmittelbar die Bahn- und Niveaukurven der elliptischen Substitution, welche wir S. 71 besprachen.

2) Auf diese Weise gewinnt Klein in den „Vorlesungen über das Ikosaeder" (Leipzig, 1884) die gesamten Gruppen endlicher Ordnung von linearen Substitutionen; siehe daselbst S. 1ff. sowie S. 115ff. und die an diesen Stellen genannten Originalarbeiten.

stitutionen S_i, S_k dieserhalb miteinander *„vertauschbar"*. Daß übrigens $S_i^2 = 1$ ist, brauchen wir kaum hervorzuheben.

Wir können die Vierergruppe G_4 auch leicht durch eine in der z-Ebene zu zeichnende Figur erklären. Legen wir nämlich durch je zwei unter den drei zu den S_1, S_2, S_3 gehörenden Drehungsachsen die Diametralebene der Kugel, so schneiden diese drei Ebenen auf der Kugeloberfläche drei einander senkrecht schneidende größte Kugelkreise aus, die diese Oberfläche in acht Kugeloktanten zerlegen. Die stereographische Projektion liefert in der z-Ebene ein System von drei sich senkrecht schneidenden Kreisen (vgl. Fig. 25), wobei die Schnittpunkte zweier Kreise die Fixpunkte einer der Substitutionen S_i sind, für welche der dritte Kreis eine Bahnkurve ist; in der Figur sind die Fixpunkte von S_i mit z_i, z_i' bezeichnet.

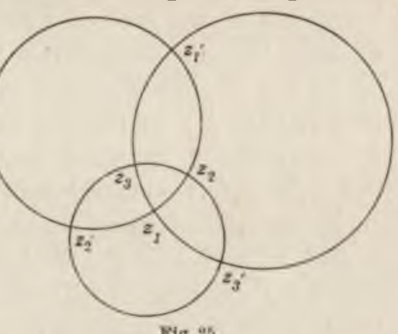


Fig. 25.

Durch jede solche Figur ist eine Vierergruppe G_4 unserer Art erklärbar, und alle diese G_4 sind durch „Transformation" ineinander überführbar. Benutzen wir nämlich die Transformation:

$$Z = T(z) = \frac{z_2 - z_1'}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_1'},$$

so kommen den Substitutionen der $G_4' = T G_4 T^{-1}$ die Fixpunkte zu:

$$Z_1 = 0, \quad Z_1' = \infty, \quad Z_2 = 1, \ldots,$$

so daß die drei Kreise der Fig. 25 übergehen in die reelle Z-Achse, die imaginäre Z-Achse und den Kreis des Radius 1 um $Z = 0$. Üben wir jetzt die S. 22 besprochene besondere stereographische Projektion aus, so werden die Achsen der drei Kugeldrehungen direkt die Achsen des damaligen Koordinatensystems der ξ, η, ζ.

Wir werden auch noch den folgenden Satz zu benutzen haben: *Jede Gruppe G_4, die außer der identischen Substitution $S_0 = 1$ drei Substitutionen der Periode 2 enthält, ist eine Vierergruppe.* Sind nämlich in dieser G_4 wieder S_i, S_k, S_l die drei elliptischen Substitutionen in beliebiger Anordnung, so ist die in G_4 enthaltene Substitution $S_k S_i$ weder gleich S_0 noch S_i noch auch gleich S_k, da andernfalls $S_k = S_i$ bzw. eine der Substitutionen S_k, S_i gleich S_0 wäre. Somit ist notwendig $S_k \cdot S_i = S_l$, woraus sofort $S_k \cdot S_i = S_i \cdot S_k$ wieder folgt. Nun können S_k und S_i nicht beide Fixpunkte gemein haben, da diese Substitutionen sonst identisch wären. Ist demnach z_i ein Fixpunkt von S_i, der nicht zugleich Fixpunkt von S_k ist, so gilt:

$$S_i(S_k(z_i)) = S_k(S_i(z_i)) = S_k(z_i),$$

d. h. der von z_i verschiedene Punkt $S_k(z_i)$ ist der zweite Fixpunkt z_i' von S_i:

$$z_i' = S_k(z_i).$$

Auch dieser Punkt z_i' ist, wie man sieht, nicht Fixpunkt von S_k, so daß überhaupt keine zwei unter den sechs Fixpunkten von S_i, S_k, S_l zusammenfallen können.

Man setze nun $k = 1$ und $i = 2$, lege durch z_1, z_2, z_1' den „Niveaukreis" von S_1 und senkrecht zu diesem den eindeutig bestimmten, durch z_2 laufenden „Bahnkreis" von S_1; der zweite Kreis schneidet auf dem ersten den zweiten Fixpunkt z_2' von S_2 aus (vgl. Fig. 25). Man füge jetzt drittens den zum ersten Kreise senkrechten, durch z_1, z_1' laufenden Niveaukreis von S_1 hinzu, der, insofern er durch die beiden Punkte z_1 und $z_1' = S_2(z_1)$ hindurchläuft, ein „Bahnkreis" von S_2 ist und also auch den zweiten Kreis senkrecht schneidet. Die beiden Schnittpunkte z_3 und z_3' (vgl. Fig. 25) sind dann notwendig die Fixpunkte von S_3. Aus der Bedeutung der Niveau- und Bahnkreise von S_2 und S_1 folgt nämlich für die fraglichen Schnittpunkte $z_3 = S_2(z_3')$, $z_3' = S_1(z_3)$ und also $z_3 = S_2 \cdot S_1(z_3) = S_3(z_3)$, sowie $z_3' = S_1 \cdot S_2(z_3') = S_3(z_3')$. Hiermit sind wir vollständig zur Fig. 25 zurückgelangt, und also ist die vorgelegte G_4 tatsächlich eine Vierergruppe.

Ein zweites Beispiel einer G_m von endlicher Ordnung erklären wir so: In einer beliebigen Diametralebene der Kugel zeichnen wir mit derselben konzentrisch ein reguläres Polygon mit n Ecken. Dann gibt es, die identische Drehung mitgerechnet, im ganzen $2n$ Kugeldrehungen, welche das Polygon in sich überführen. Es sind dies erstens n eine „zyklische" Untergruppe G_n liefernde Drehungen um den zur Ebene des Polygons senkrechten Kugeldurchmesser, und zweitens n Drehungen der Periode 2 um Achsen, die für ungerades n die n Verbindungsgeraden der Ecken mit den gegenüberliegenden Seitenmitten sind, für gerades n aber die $\frac{1}{2}n$ durch den Mittelpunkt laufenden Diagonalen und die $\frac{1}{2}n$ Verbindungsgeraden gegenüberliegender Seitenmitten. Zieht man von den beiden Endpunkten des zur Polygonebene senkrechten Kugeldurchmessers je die n Geraden nach den Polygonecken, so entsteht eine „Doppelpyramide". Diese Doppelpyramide wird durch die Drehungen der G_{2n} wieder in sich übergeführt, und wir hätten die Erklärung der Gruppe auch an diese reguläre Figur anknüpfen können. *Die G_{2n} ist eine Gruppe von „Doppelpyramidentypus"; gebräuchlicher ist die Bezeichnung „Diëdergruppe", welche wir in der Folge anwenden wollen.* Für $n = 2$ gelangt man, wie leicht zu sehen ist, zur Vierergruppe zurück. Im Falle $n = 4$ sind in der Diëdergruppe G_8 zwei Vierergruppen als Untergruppen enthalten; z. B. erhalten wir eine solche G_4, wenn wir

die beiden Mittellinien des Quadrates und den zur Quadratebene senkrechten Kugeldurchmesser als die drei Drehungsachsen für die G_4 benutzen.

Zur Erklärung einer letzten Gruppe G_m endlicher Ordnung konstruieren wir ein mit der Kugel konzentrisches reguläres Tetraeder. Hier gibt es zunächst Drehungen des Tetraeders in sich um eine Achse, die von einer der vier Ecken nach der Mitte der Gegenseite läuft; offenbar liefert jede Achse eine zyklische Untergruppe G_3 von drei Drehungen (die identische Drehung immer mitgezählt). Die vier Ecken liefern dabei neben der identischen Drehung im ganzen acht Drehungen je von der Periode drei. Verbindet man ferner je zwei diametrale unter den sechs Kantenmitten geradlinig, so entstehen drei Achsen, die sich in der Kugelmitte senkrecht kreuzen. Die ihnen zugehörige Vierergruppe liefert gleichfalls Drehungen des Tetraeders in sich, so daß neben der identischen Drehung noch drei Drehungen von der Periode zwei hinzukommen. Weitere Drehungen des Tetraeders in sich existieren nicht: *Die „Tetraedergruppe" ist eine G_{12}, welche acht Substitutionen der Periode drei, drei Substitutionen der Periode zwei und natürlich $S_0 = 1$ enthält; die drei Substitutionen der Periode zwei bilden mit $S_0 = 1$ eine in der G_{12} als Untergruppe enthaltene Vierergruppe G_4.*[1])

§ 3. Die linearen Transformationen der Verzweigungsform in sich.

Unter Rückgang auf den am Anfang von § 2 entwickelten Gedankengang fragen wir nunmehr nach Substitutionen S, welche das System der vier Nullpunkte e_1, e_2, e_3 und $e_4 = \infty$ der Verzweigungsform f_z erster Stufe in sich überführen, und deren entsprechende homogene binäre Substitutionen alsdann die Verzweigungsform f_z selbst, abgesehen von einem Faktor, in sich transformieren werden.

Da in f_z ein Glied mit $z_1^2\, z_2^2$ nicht auftritt, so verschwindet die Summe der drei im Endlichen gelegenen Nullpunkte e_1, e_2, e_3:

$$(1) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Ist wieder i, k, l irgendeine Permutation der Indizes 1, 2, 3, so zeigt man mit Benutzung der Relation (1), daß die Substitution:

$$(2) \qquad z' = S_i(z) = \frac{e_i z + (e_i^2 + e_k e_l)}{z - e_i},$$

---

1) Auf die entsprechend zu erklärenden Gruppen des Oktaeders und Ikosaeders, welche Gruppen G_{24} und G_{60} sind, gehen wir hier noch nicht ein, da diese Gruppen zunächst noch nicht gebraucht werden; siehe betreffs derselben Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder", S. 15 ff.

welche elliptisch von der Periode 2 ist, die beiden Punkte e_k und e_l austauscht und ebenso die beiden Punkte e_i und $e_4 = \infty$.[1]) Es gibt nur eine einzige Substitution, welche diese Permutation der vier Punkte e vollzieht[2]); denn gäbe es noch eine zweite S_i', so würde $S_i' S_i^{-1}$, ohne die identische Substitution zu sein, *vier* Fixpunkte $e_1, \ldots, e_4$ haben, dem Umstand entgegen, daß eine von 1 verschiedene Substitution höchstens zwei Fixpunkte hat.

Üben wir auf die vier Werte:

$$S_i(\infty) = e_i, \quad S_i(e_l) = e_k, \quad S_i(e_i) = \infty, \quad S_i(e_k) = e_l$$

die Substitution S_k aus, so folgt:

$$S_k S_i(\infty) = e_l, \quad S_k S_i(e_l) = \infty, \quad S_k S_i(e_i) = e_k, \quad S_k S_i(e_k) = e_i,$$

d. h. es ist $S_k S_i = S_l$. Da überdies $S_i^2 = 1$ gilt und also S_i^{-1} mit S_i gleich ist, so bilden die vier Substitutionen $S_0 = 1$, S_1, S_2, S_3 eine Vierergruppe (vgl. S. 131). *Die vier Punkte e_1, e_2, e_3 und $e_4 = \infty$ werden durch die vier eine Vierergruppe G_4 bildenden Substitutionen $S_0 = 1$, S_1, S_2, S_3 in sich transformiert, wobei insbesondere die drei letzten Substitutionen die vier Punkte auf die drei möglichen Arten zu Paaren permutieren.*

Schreiben wir für die Determinante $-2e_i^2 - e_k e_l$ von S_i kurz D_i, so können wir noch fragen, welchen Faktor f_z bei Ausführung der unimodularen Substitution:

$$(3) \qquad z_1 = \frac{e_i}{\sqrt{D_i}} z_1' + \frac{e_i^2 + e_k e_l}{\sqrt{D_i}} z_2', \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{D_i}} z_1' - \frac{e_i}{\sqrt{D_i}} z_2'$$

annimmt. Da die zweite Potenz dieser homogenen Substitution $z_1 = -z_1''$, $z_2 = -z_2''$ ist und also f_z unverändert läßt, so kann der fragliche Faktor nur $+1$ oder -1 sein. *Die Rechnung zeigt $f_z = f_{z'}$, d. h. die Verzweigungsform wird durch die homogenen unimodularen Substitutionen* (3) *unmittelbar in sich selbst transformiert.*

Wir fragen nun, ob es außer der G_4 noch weitere Substitutionen gibt, welche die vier Punkte e ineinander überführen. Ist S eine solche

1) Die Determinante von S_i kann man mit Hilfe der Relation (1) in die Gestalt $(e_i - e_k) \cdot (e_l - e_i)$ kleiden; sie ist also $\neq 0$, da die drei Nullpunkte e_1, e_2, e_3 von einander verschieden sind.

2) Die beiden Fixpunkte von S_i liegen sowohl mit ∞ und e_i als auch mit e_k und e_l je auf einem Kreise; dabei trennen sie sowohl ∞ und e_i als auch e_k und e_l „*harmonisch*". Wir haben hier mit dem Satze der projektiven Geometrie zu tun, daß es zu zwei Punktepaaren der Ebene (der „Geraden" mit reellen und komplexen Punkten) ein und nur ein drittes Punktepaar gibt, welches mit jedem der beiden gegebenen Paare in der bezeichneten Art ein harmonisches Quadrupel bildet. Die sechs Fixpunkte der drei S_i sind die Nullpunkte einer bekannten Kovariante sechsten Grades von f_z. Man vgl. das S. 120 genannte Werk von Clebsch, S. 175.

Substitution, so dürfen wir annehmen, daß dieselbe den Punkt $e_4 = \infty$ zum Fixpunkte hat. Wäre nämlich $S(\infty) = e_i$, so hätten wir sofort in $S_i S$ eine neue Substitution mit dem Fixpunkte ∞. Die Substitution S darf man hiernach in der Gestalt:

(4) $$z' = S(z) = az + b$$

ansetzen. Bei der durch S bewirkten Permutation der e_1, e_2, e_3 haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder tauscht S zwei Punkte e_k, e_l aus und hat dann e_i zum Fixpunkte, oder S bewirkt eine zyklische Permutation der drei e.

Im ersten Falle ist S elliptisch von der Periode zwei und hat demnach die Gestalt:

$$z' = -z + 2e_i.$$

Da hieraus insbesondere $e_l = -e_k + 2e_i$ und also:

$$e_i + e_k + e_l = 3e_i$$

folgt, so ergibt sich aus (1) sofort:

$$e_i = 0 \quad \text{und} \quad e_l = -e_k.$$

Wir sind demnach zu dem schon S. 125 besprochenen Falle mit $g_3 = 0$ zurückgeführt und haben die Verzweigungsform erster Stufe in der einfachsten daselbst unter (20) gegebenen Gestalt vorauszusetzen. Man bezeichnet diesen besonderen Fall als den „*harmonischen*"; in der Tat werden ja, welche mit der Form (20) S. 125 äquivalente Form wir auch wählen mögen, die vier Punkte e der letzteren stets auf *einem* Kreise liegen und auf demselben ein harmonisches Punktquadrupel darstellen.[1]) Benutzen wir die Form (20) und vollziehen die S. 22 besprochene stereographische Projektion auf die Kugelfläche, so liefern die vier Punkte e die Eckpunkte eines einem größten Kugelkreise eingeschriebenen Quadrates. Die Überlegungen von S. 132 liefern jetzt das Ergebnis: *Im harmonischen Falle gibt es im ganzen acht, eine Diëdergruppe G_8 bildende Substitutionen, welche das System der vier Punkte e in sich überführen; die eine der beiden in der G_8 enthaltenen Vierergruppen (vgl. S. 132, unten) ist unsere bisherige G_4.*

Übrigens ist in der G_8 eine *zyklische* Untergruppe G_4 enthalten und als „erzeugende" Substitution dieser G_4 eine elliptische Substitution der Periode vier, welche die vier Punkte e zyklisch permutiert. Man zeigt sofort, daß dieser Austausch der Punkte e bei der Form (20) S. 125 durch die Substitution:

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1) Wir weisen hier auf die im folgenden Abschnitte (bei der zweiten Stufe) zu entwickelnden Sätze über das „Doppelverhältnis" der Verzweigungspunkte hin.

geleistet wird. Wir stellen noch fest, *daß die unimodulare homogene Substitution:*

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1' + z_2'), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-z_1' + z_2')$$

einen Zeichenwechsel der Verzweigungsform (20) *S. 125 bewirkt:* $f_{z'} = -f_z$.

Wir haben zweitens die Möglichkeit zu besprechen, daß die Substitution (4) die im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte zyklisch permutiert. Dann gilt also:

$$e_k = ae_i + b, \quad e_l = ae_k + b, \quad e_i = ae_l + b,$$

woraus wir durch Addition mit Rücksicht auf $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ sofort $b = 0$ finden. Von den e darf nun keines verschwinden, da sonst alle drei gleich 0 sein würden. Das Produkt der drei vorstehenden Gleichungen liefert also mit Rücksicht auf $b = 0$ weiter $a^3 = 1$; es ist also, da $a = 1$ die identische Substitution liefern würde, a eine komplexe dritte Wurzel der Einheit. Wir wollen weiterhin die Abkürzung $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varrho$ gebrauchen und dürfen insbesondere $S(z) = \varrho z$ setzen, da, falls $S(z) = \varrho^2 z$ wäre, an Stelle dieser Substitution einfach ihre zweite Potenz $S^2(z) = \varrho z$ treten könnte. Aus $e_k = \varrho e_i$, $e_l = \varrho^2 e_i$ folgt nun sofort $g_2 = 0$. Wir haben also jetzt den auch bereits S. 125 besprochenen anderen Spezialfall $g_2 = 0$ mit der besonderen Verzweigungsform (19) (S. 125) vor uns, den wir hinfort als den „*äquianharmonischen*" Fall bezeichnen wollen.

Benutzen wir die Form (19) S. 125, so dürfen wir in einfachster Weise $e_1 = 1$, $e_2 = \varrho$, $e_3 = \varrho^2$ schreiben. Über dem Dreieck dieser drei Endpunkte, als Grundfläche, wolle man nun ein reguläres Tetraeder aufbauen und durch dessen vier Ecken die mit ihm konzentrische Kugelfläche einführen. Vollziehen wir die stereographische Projektion der z-Ebene auf diese Kugelfläche, indem wir als Projektionszentrum die Spitze des Tetraeders benutzen, so werden die *vier* Punkte e auf der Kugeloberfläche die vier Eckpunkte jenes regulären Tetraeders. Hier liefert nun die vorbereitende Entwicklung von S. 133 sofort den Satz: *Im äquianharmonischen Falle gibt es im ganzen zwölf eine Tetraedergruppe* G_{12} *bildende Substitutionen S, welche das System der vier Verzweigungspunkte e in sich transformieren; die nach S. 133 in der Tetraedergruppe als Untergruppe enthaltene Vierergruppe* G_4 *ist diejenige unserer obigen Substitutionen* S_0, S_1, S_2, S_3.

Der Substitution $z' = \varrho z$ lassen wir die unimodulare homogene Substitution:

$$z_1 = \varrho z_1', \quad z_2 = \varrho^2 z_2'$$

entsprechen und notieren noch den Satz: *Die Verzweigungsform* (19) *S. 125 reproduziert sich bei Ausübung der vorstehenden Substitution bis auf eine multiplikative dritte Wurzel der Einheit:* $f_{z'} = \varrho f_z$.

§ 4. Invarianz von J gegenüber beliebiger rationaler Transformation der Riemannschen Fläche F_2.

Die linearen Funktionen von z erschöpfen nun keineswegs alle zweiwertigen Funktionen des zur F_2 gehörenden Körpers algebraischer Funktionen. Ist $w = R(z, \sqrt{f(z)})$ irgendeine solche zweiwertige Funktion, so wird mittelst dieser Funktion die F_2 wieder auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche F_2' mit vier Verzweigungspunkten abgebildet, welche wir statt der F_2 zur Definition unseres Funktionenkörpers zugrunde legen können. Die Verzweigungspunkte der F_2' seien die Nullpunkte einer zugehörigen Funktion:

$$(1) \qquad \varphi(w) = b_0 w^4 + 4b_1 w^3 + 6b_2 w^2 + 4b_3 w + b_4,$$

deren Invarianten wir mit g_2', g_3' und J' bezeichnen wollen. Dann ist insbesondere J' wieder gegenüber beliebiger *linearer* Transformation von w absolut invariant.

Hier tritt nun die Frage auf, wie sich die Invariante J' der Funktion (1) zur Invariante J der ursprünglichen Funktion $f(z)$ verhält. Die Antwort ist, *daß geradezu $J' = J$ ist, daß also J den Charakter der absoluten Invarianz nicht nur gegenüber linearer Transformation von z, sondern auch gegenüber jeder umkehrbar rationalen Transformation der F_2 wieder auf eine zweiblättrige Fläche (vgl. S. 93) bewahrt und also als eine Invariante des ganzen Funktionenkörpers anzusehen ist.* Dieser Satz wird später in sehr einfacher Weise mittels des schon öfter erwähnten Integrals bewiesen werden können. Da es sich aber hier offenbar um einen grundlegenden Satz handelt, so wird es angebracht erscheinen, schon jetzt mit den allein erst zur Verfügung stehenden algebraischen Mitteln einen Beweis des Satzes auszuführen.

Eine kurze Bemerkung über die zweiwertigen Funktionen des Körpers ist vorauszuschicken. Es sei w eine derselben, und es mögen die beiden Pole von w auf der F_2 getrennt, und zwar bei $z = s$ und $z = t$ gelegen sein, natürlich daselbst immer nur in einem der beiden Blätter.[1]) Bei der Stelle s gelte die Entwicklung:

$$w = \frac{a_{-1}}{z - s} + a_0 + a_1(z - s) + \cdots,$$

bei $z = t$ entsprechend:

$$w = \frac{b_{-1}}{z - t} + b_0 + b_1(z - t) + \cdots{}^{2)},$$

---

1) Liegen beide Pole übereinander, so ist $t = s$.

2) Ist s einer der Verzweigungspunkte, so ist $\sqrt{z - s}$ an Stelle von $(z - s)$ zu setzen; ist $s = \infty$, so hat man z^{-1} für $(z - s)$ einzutragen. Dasselbe gilt natürlich von der Stelle t.

wobei a_{-1} und b_{-1} nicht-verschwindende reelle oder komplexe Koeffizienten sind. Es sei nun w' eine zweite zweiwertige Funktion mit denselben Polen und dem Anfangskoeffizienten a'_{-1} bei $z = s$. Dann ist $(a_{-1}w' - a'_{-1}w)$ eine Funktion, welche höchstens noch bei $z = t$ einen Pol erster Ordnung haben könnte und demnach einwertig sein würde, wenn sie diesen Pol wirklich hätte. Aber nach S. 95 gibt es auf der F_2 keine einwertige Funktion, so daß $(a_{-1}w' - a'_{-1}w)$ auch bei t endlich bleibt und damit einer Konstanten gleich wird $a_{-1}w' - a'_{-1}w = c$. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{a'_{-1}}{a_{-1}} = a, \quad \frac{c}{a_{-1}} = b,$$

so folgt[1]): *Alle zweiwertigen Funktionen mit den gleichen Polen sind in einer beliebigen unter ihnen, w, linear in der Gestalt darstellbar:*

$$w' = aw + b. \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich insbesondere, daß eine zweiwertige Funktion w, welche ihre Pole an zwei in der F_2 übereinander liegenden Stellen $z = s$ hat oder in einem Verzweigungspunkte $z = s$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt, stets eine lineare Funktion:

$$w = \frac{a}{z-s} + b = \frac{bz + (a - bs)}{z - s}$$

von z ist. Da nun J gegenüber linearer Transformation von z sicher invariant ist, so brauchen wir nur noch solche Funktionen w zu prüfen, deren Pole zwei nicht übereinander liegende Stellen der F_2 sind.

Da überdies jede lineare Transformation von w die Invariante J' von (1) wieder unverändert läßt, so können wir nötigenfalls durch eine solche Transformation erstlich erreichen, daß die beiden Pole von w auch wirklich getrennt liegen, und zweitens, daß einer der Pole von w in einen Verzweigungspunkt der F_2 fällt. Indem wir f_2 als Verzweigungsform erster Stufe ausgesucht denken, schreiben wir vor, daß der eine Pol von w in dem Verzweigungspunkt $z = \infty$ der F_2 gelegen sei. Der zweite Pol liegt nun in irgendeiner endlichen Stelle bei $z = s$; und indem wir über diese Stelle s nichts weiter voraussetzen, wird unsere Überlegung für jede von z nicht linear abhängende zweiwertige Funktion w des Körpers gelten. Im übrigen dürfen wir unter den zweiwertigen Funktionen dieser Pole ∞ und s wiederum eine beliebige aussuchen, da alle weiteren zufolge (2) in jener linear darstellbar sind.

Wir wählen nun die nachfolgende Funktion:

$$w = \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(s)}}{z - s}, \tag{3}$$

1) Man überträgt die Überlegung des Textes leicht auf den Fall, daß w und w' an einer und derselben Stelle der F_2 je einen Pol *zweiter* Ordnung haben.

welche mit Rücksicht auf die Gestalt $(4z^3 - g_2 z - g_3)$ von $f(z)$ den gestellten Anforderungen in der Tat genügt. Das Vorzeichen von $\sqrt{f(s)}$ ist fest zu wählen; und es wird dann w in demjenigen Blatte der F_2, in welchem $\sqrt{f(z)} = \sqrt{f(s)}$ bei $z = s$ zutrifft, seinen Pol haben, während w im anderen Blatte daselbst endlich bleibt. Die Darstellung (3) gilt aber auch unmittelbar in dem Falle, daß s einer der drei im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte e_i ist; in der Tat gewinnt man in diesem Falle sofort für die Umgebung von e_i mit Rücksicht auf $f(e_i) = 0$ die Entwicklung:

$$w = 2\,\frac{\sqrt{(e_i - e_k)(e_i - e_l)}}{\sqrt{z - e_i}}\,(1 + a_1(z - e_i) + a_2(z - e_i)^2 + \cdots).$$

Unterscheiden wir nun die in übereinander liegenden Punkten der F_2 eintretenden Funktionswerte von w durch die Bezeichnungen w_1 und w_2:

$$w_1 = \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(s)}}{z - s}, \quad w_2 = \frac{-\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(s)}}{z - s},$$

so ergibt sich:

$$w_1 + w_2 = \frac{2\sqrt{f(s)}}{z - s},$$

$$w_1 \cdot w_2 = -\frac{f(z) - f(s)}{(z - s)^2} = -\frac{4(z^2 + zs + s^2) - g_2}{z - s}.$$

Die zwischen z und w bestehende algebraische Relation, welche nach (2) S. 92 in jeder dieser Größen vom zweiten Grade sein muß, hat demnach die Gestalt:

$$w^2(z - s) - 2\sqrt{f(s)}\,w - 4(z^2 + zs + s^2) + g_2 = 0.$$

Lösen wir sie nach z auf, so ist der Ausdruck unter dem dabei auftretenden Wurzelzeichen unsere unter (1) gemeinte Funktion $\varphi(w)$. Die Rechnung liefert als Ausdruck derselben:

$$\varphi(w) = \tfrac{1}{4}w^4 - 6sw^2 - 8\sqrt{f(s)}\,w + (4g_2 - 12s^2),$$

so daß die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_4$ die folgende Bedeutung haben:

$$b_0 = \tfrac{1}{4}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -s, \quad b_3 = -2\sqrt{f(s)}, \quad b_4 = 4g_2 - 12s^2.$$

Die in den $b_0, b_1, \ldots, b_4$ anzusetzenden Ausdrücke (10) S. 122 für die Invarianten g_2' und g_3' ergeben damit:

$$g_2' = \tfrac{1}{4}(4g_2 - 12s^2) + 3s^2 = g_2,$$

$$g_3' = -\tfrac{1}{4}s(4g_2 - 12s^2) - f(s) + s^3 = 4s^3 - g_2 s - f(s) = g_3.$$

Es ist also $g_2' = g_2$, $g_3' = g_3$ und damit auch $J' = J$, so daß die Invarianz von J gegenüber beliebiger umkehrbar rationaler Transformation der F_2 in eine F_2' bewiesen ist.

§ 5. Allgemeine Bemerkungen über die elliptischen Integrale.

Bei den nächsten Entwicklungen setzen wir die Verzweigungsform wieder in der allgemeinen Gestalt (4) S. 119 gegeben voraus und werden erst im übernächsten Paragraphen auf die Verzweigungsform erster Stufe (12) S. 123 zurückkommen. Irgendeine Funktion $R(z, \sqrt{f(z)})$ des durch die F_2 gegebenen Körpers wollen wir in der Umgebung einer Stelle z_0 der Fläche in ihre Potenzreihe entwickeln und haben dabei die Entwicklungsgröße (wir wollen sie weiterhin als die „normale Variable" der Stelle z_0 bezeichnen):

$$(1) \qquad z' = z - z_0, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \sqrt{z - z_0}, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

zu benutzen, je nachdem z_0 eine gewöhnliche endliche Stelle in einem Blatte oder die Stelle ∞ eines Blattes oder ein endlicher Verzweigungspunkt oder schließlich die Stelle ∞, falls daselbst ein Verzweigungspunkt liegt, ist. Für $R(z, \sqrt{f(z)})$ gilt dann in der Umgebung von z_0 eine Entwicklung:

$$(2) \quad R(z, \sqrt{f(z)}) = c_{-m} z'^{-m} + c_{-m+1} z'^{-m+1} + \cdots + c_{-1} z'^{-1} + c_0 + c_1 z' + \cdots.$$

Im allgemeinen treten keine Glieder mit negativen Exponenten von z' auf; solche finden sich nur für die Umgebungen der in endlicher Anzahl auftretenden Pole unserer Funktion.

Man kann nun auf Grund der Darstellung (2) sofort das Verhalten des Integrals der Funktion $R(z, \sqrt{f(z)})$ in der Umgebung von z_0 angeben:

$$\int^{*} R(z, \sqrt{f(z)})\, dz = \int^{*} (c_{-m} z'^{-m} + c_{-m+1} z'^{-m+1} + \cdots + c_{-1} z'^{-1} + c_0 + c_1 z' + \cdots)\, dz;$$

die Beziehung des Differentials dz' der „normalen Variabelen" der Stelle z_0 zum Differential dz stellt man in den vier Fällen (1) leicht fest. Liegt in der endlichen Stelle z_0 kein Pol von $R(z, \sqrt{f(z)})$, so ist auch das Integral als Funktion von z'[1]) im Punkte z_0 analytisch, *so daß eine singuläre Stelle des Integrales jedenfalls nur in einem Pole von $R(z, \sqrt{(f(z)})$ oder an einer Stelle $z_0 = \infty$ und damit nur an endlich vielen Stellen der F_2 auftreten kann.*

Was die Natur der singulären Stelle angeht, so kann nur ein Glied der Reihe bei der Integration ein nicht-algebraisches Glied, nämlich eines von der Gestalt $C \cdot \log z'$, liefern. Man stellt leicht fest, daß der Koeffizient C von $\log z'$ je nach dem vorliegenden Falle (1) die Bedeutung hat:

$$C = c_{-1}, \quad C = -c_1, \quad C = 2c_{-2}, \quad C = -2c_2.$$

1) Dieser Zusatz ist mit Rücksicht auf die Verzweigungspunkte erforderlich.

Nehmen wir als selbstverständlich $C = 0$ für einen nicht-singulären Punkt hinzu, so ergibt der Vergleich mit der S. 37 aufgestellten Erklärung des „Residuums“ einer Funktion in einem einzelnen Punkte der F_2 den Satz: *C ist für jede Stelle der F_2 direkt mit dem zugehörigen „Residuum“ der Funktion $R(z, \sqrt{f(z)})$ identisch und soll demnach auch für das Integral als dessen zur Stelle z_0 gehöriges „Residuum“ benannt werden.*

Wir ziehen sogleich eine Folgerung, welche aus dem ersten Residuensatze (S. 38) mittelst einer Überlegung gewonnen wird, wie wir sie S. 90 für beliebiges Geschlecht p an den zweiten Residuensatz (S. 39) angeschlossen haben. Nach S. 88 ziehen wir zwei Querschnitte Q_1, Q_2, die nicht gerade durch einen singulären Punkt unseres betrachteten Integrals hindurchlaufen sollen, und verwandeln unsere F_2 in dieser Art in einen einfach zusammenhängenden Bereich. Eine Stelle z_0 mit nicht-verschwindendem Residuum C soll ein *„logarithmischer Unstetigkeitspunkt“* des Integrals genannt werden. Das über den Rand der zerschnittenen Fläche erstreckte Integral (3) S. 38, also in unserem Falle:

$$\frac{1}{2i\pi}\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz,$$

stellt nach dem fraglichen Satze die Summe der Residuen aller logarithmischen Unstetigkeitspunkte dar. Aber dies Integral, welches ja (vgl. S. 90) über die beiden Ufer des einzelnen Querschnittes im entgegengesetzten Sinne zu erstrecken ist, hat dieserhalb den Wert 0. Es folgt: *Beim einzelnen unserer Integrale ist die Summe der Residuen aller logarithmischen Unstetigkeitspunkte gleich* 0. Hiernach kann es insbesondere *kein Integral mit nur einem logarithmischen Unstetigkeitspunkte* geben.

Was sonstige Glieder mit negativen Exponenten von z' angeht, so prüft man die vier Fälle (1) leicht durch. Man findet: *In der Entwicklung des Integrals treten Glieder mit negativen Exponenten von z' stets und nur dann auf, wenn in der Reihenentwicklung für $R(z, \sqrt{f(z)})$ Anfangsglieder „vor“ der den Logarithmus liefernden Potenz von z' vorkommen.* Wir notieren insbesondere: *Das Integral ist im Punkte z_0 als Funktion von z' analytisch, wenn je nach dem vorliegenden Falle* (1) *in der Entwicklung von $R(z, \sqrt{f(z)})$ das Glied c_0 bzw. $c_2 z'^2$, $c_{-1} z'^{-1}$, $c_3 z'^3$ oder ein noch späteres das Anfangsglied liefert.*

Da unsere unzerschnittene F_2 einen *mehrfach* zusammenhängenden Bereich darstellt, so sind für das Verhalten der elliptischen Integrale gegenüber geschlossenen Umläufen die S. 7 ff. entwickelten allgemeinen Prinzipien maßgeblich. Setzen wir ein Integral über einen geschlossenen Weg auf der F_2, der nicht gerade durch einen singu-

lären Punkt des Integrales läuft, fort, *so kehrt das Integral, abgesehen von einer additiven Konstanten, zu seinen Anfangswerten am Schlusse des Weges zurück.* Ist diese additive Konstante von 0 verschieden, so heißt sie nach S. 7 eine „*Periode*“ des Integrales und der Weg ein „*Periodenweg*“. Auf die hiermit berührten Verhältnisse gehen wir alsbald ausführlich ein. Hier nennen wir nur erst die Umkehrung: *Eine Funktion von z, welche auf der* F_2 *in jeder Stelle, abgesehen von Polen und logarithmischen Unstetigkeitspunkten, analytisch ist*[1]), *und welche bei Fortsetzung über irgendeinen geschlossenen Weg von einer additiven Konstanten abgesehen zu ihren Anfangswerten zurückkehrt, ist ein zur* F_2 *gehörendes elliptisches Integral.* In der Tat ist die Ableitung dieser Funktion nach z auf der F_2 eindeutig und bis auf Pole überall analytisch, stellt also eine Funktion $R(z, \sqrt{f(z)})$ dar.

Da es sich hier vorab nur um die Untersuchung der Integrale in bezug auf ihre möglichen singulären Punkte handeln soll, so ist es erlaubt und im Interesse der *Eindeutigkeit* der zu betrachtenden Größen sogar geboten, *die weiterhin zu benutzenden Integrationswege auf die durch zwei Querschnitte* Q_1, Q_2 *zerschnittene Fläche* F_2 *zu beschränken, d. h. das Überschreiten eines der Querschnitte durch einen Integrationsweg einstweilen zu verbieten.* Diese Vorschrift wird weiterhin noch eine Ergänzung finden müssen, welche sich auf die Integrale mit logarithmischen Unstetigkeitspunkten bezieht.

§ 6. Die drei Gattungen der elliptischen Integrale und die Elementarintegrale.

Die gesamten elliptischen Integrale unserer F_2 teilen wir nun in drei „Gattungen“ ein: *Zur ersten Gattung rechnen wir alle Integrale, welche auf der* F_2 *überall analytisch*[1]) *sind, zur zweiten Gattung gehören die Integrale, welche singuläre Punkte, jedoch nur Pole besitzen, die dritte Gattung bilden alle übrigen Integrale, deren einzelnes also mindestens zwei logarithmische Unstetigkeitspunkte aufweist.* Zur Prüfung des analytischen Charakters hat man sich dabei stets einer Entwicklung nach Potenzen der betreffenden in (1) S. 140 gegebenen Variabelen z' zu bedienen. Ein in diesem Sinne überall analytisches Integral wird bei Fortsetzung über die Fläche hin stets endlich bleiben: *Ein Integral erster Gattung bezeichnet man demgemäß auch als ein „überall endliches Integral“.*

Ist nun $u(z)$ irgendein Integral erster Gattung, so muß, wie wir schon feststellten, in der Umgebung von z_0 die Ableitung von u nach

1) In einem Verzweigungspunkte ist natürlich hier und weiterhin wieder gemeint, daß die Funktion in der zugehörigen normalen Variabelen analytisch sei.

z je nach dem vorliegenden Falle (1) S. 140 eine Entwicklung gestatten:

$$\frac{du}{dz} = c_0 + \cdots, \quad = \frac{c_2}{z^2} + \cdots, \quad = \frac{c_{-1}}{\sqrt{z - z_0}} + \cdots, \quad = \frac{c_3}{(\sqrt{z})^3} + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich, daß das Produkt dieser Ableitung und der Funktion $\sqrt{f(z)}$ eine algebraische, auf der F_2 *überall* analytische Funktion darstellt und also (vgl. S. 91) mit einer Konstanten a identisch ist. Setzen wir noch eine Integrationskonstante b hinzu, so folgt: *Jedes Integral erster Gattung der* F_2 *ist in der Gestalt:*

$$(1) \qquad a\int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}} + b$$

darstellbar; es gibt also im wesentlichen, d. h. abgesehen von einer multiplikativen und einer additiven Konstanten, überhaupt nur ein einziges Integral erster Gattung der F_2:

$$(2) \qquad u = \int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}.$$

Diese einzigartige Stellung des überall endlichen Integrales u begründet den Vorrang, der dieser Größe u in unseren künftigen Entwicklungen zukommen wird, und die Existenz dieser einzigen Größe ist als eine grundlegende Tatsache der ganzen Theorie der elliptischen Funktionen anzusehen.

Um invariante Darstellungen der Integrale, welche wir ja anstreben wollten (vgl. S. 118), vorzubereiten, führen wir an Stelle von z, wie S. 119, homogene Variabele z_1, z_2 ein und schreiben zur Abkürzung:

$$(3) \qquad -z_2^2 dz = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = (z, dz).$$

Hiermit ist ein „homogenes Differential zweiter Dimension“ gewonnen, welches, wie man leicht ausrechnet, sich bei Ausübung der homogenen Substitution (5) S. 119 so verhält:

$$(z, dz) = D \cdot (z', dz'),$$

d. h. die Substitutionsdeterminante D als Faktor annimmt. Das Integral u selbst kleidet sich in die homogene Schreibweise:

$$(4) \qquad u = -\int\frac{(z, dz)}{\sqrt{f_z}},$$

sein Differential schreiben wir:

$$(5) \qquad du_z = -\frac{(z, dz)}{\sqrt{f_z}},$$

es ist wie u selbst in den z_1, z_2 homogen nullter Dimension.

Um die Bedeutung dieses Differentials noch weiter aufzuklären, berechne man im einzelnen Punkte z_0 der F_2 den Wert der Ableitung von u nach der zugehörigen in (1), S. 140 erklärten „normalen Varia-

belen“ z'. Deuten wir diesen Wert durch Anhängung des Index z_0 an, so gilt je nach dem vorliegenden Falle (1), S. 140:

$$(6) \qquad \left(\frac{du}{dz'}\right)_{z_0} = \frac{1}{\sqrt{f(z_0)}}, \quad = -\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \quad = \frac{2}{\sqrt{f'(z_0)}}, \quad = -\frac{1}{\sqrt{a_1}}.$$

Der Wert dieser Ableitung ist stets endlich und von Null verschieden. Im ersten Falle ist nämlich z_0 eine endliche, von einem Verzweigungspunkte verschiedene Stelle; im zweiten Falle ist a_0 (der erste Koeffizient von $f(z)$) von Null verschieden; im dritten Falle ist die Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ im Verzweigungspunkte z_0 von Null verschieden; und im vierten verschwindet zwar a_0, aber nicht a_1. Nun ist die Bedeutung der Funktion z' von z die, daß diese Funktion die „Umgebung“ der Stelle z_0 der F_2 (welche im Falle eines Verzweigungspunktes z_0 zweiblättrig ist) auf eine schlichte Kreisfläche um den Mittelpunkt $z' = 0$ abbildet. Aus bekannten Sätzen über konforme Abbildung (vgl. S. 33) folgt demnach sofort weiter: *Das Integral erster Gattung $u(z)$ bildet ausnahmslos die Umgebung jeder Stelle z_0 der Fläche F_2 auf einen „schlichten“ Bereich um den Bildpunkt der u-Ebene ab.*

Für die Umgebung der einzelnen Flächenstelle z_0 hatten wir z' als die „normale Variabele“ bezeichnet (vgl. S. 140). Man sagt dabei von einer Funktion der Fläche F_2, daß sie an der Stelle z_0 ein endliches und von 0 verschiedenes Differential besitze, wenn ihre Ableitung nach z' daselbst endlich und von 0 verschieden ist. Das Differential dz würde bei Weiterbildung dieses Sprachgebrauches in einem der vier Verzweigungspunkte, die wir der Kürze halber hier einmal alle im Endlichen gelegen annehmen wollen, einen Nullpunkt erster Ordnung, an der einzelnen Stelle ∞ einen Pol zweiter Ordnung bekommen. Beim homogenen Differential (z, dz) würden zwar diese beiden Pole in Fortfall kommen, aber die Nullpunkte in den Verzweigungspunkten bestehen bleiben. *Auch hier hebt sich nun das hinfort als „Differential erster Gattung“ zu bezeichnende du ganz besonders hervor, insofern es auf der ganzen Fläche F_2 ausnahmslos endlich und nicht-verschwindend ist.*

Indem wir uns den Existenzbeweis der folgenden Integrale durch wirkliche Herstellung derselben vorbehalten, stellen wir jetzt für die zweite und dritte Gattung folgende Erklärung auf: *Als ein zur Stelle $z = t$ gehöriges „Elementarintegral“ zweiter Gattung Z_t bezeichnen wir ein Integral, welches nur an dieser Stelle der F_2 einen Pol erster Ordnung hat und in der zugehörigen normalen Variabelen die Entwicklung gestattet:*

$$(7) \qquad Z_t = \frac{1}{z'} + c_0 + c_1 z' + \cdots;$$

als ein zu den beiden Stellen $z = t$ und $z = t_0$ gehöriges „Elementarintegral“ dritter Gattung P_{t,t_0} bezeichnen wir ein Integral, welches als einzige

singuläre Stellen zwei logarithmische Unstetigkeitspunkte der Residuen 1 *und* -1 *bei* $z = t$ *bzw.* $z = t_0$ *aufweist und also in der zu* $z = t$ *gehörenden normalen Variabelen* z' *eine Entwicklung:*

$$(8) \qquad P_{t, t_0} = \log z' + c_0' + c_1' z + \cdots,$$

bei $z = t_0$ *eine entsprechende mit* $-\log z'$ *beginnende Entwicklung besitzt.* Es ist einleuchtend, daß diese Integrale, wenn sie überhaupt existieren, nur erst bis auf ein beliebiges additives Integral erster Gattung $(au + b)$ eindeutig bestimmt sind.

Mit Rücksicht auf das Integral dritter Gattung P_{t, t_0} ist die oben bereits angedeutete Ergänzung der Zerschneidung unserer Riemannschen Fläche F_2 auszuführen. Die bisherigen Querschnitte Q_1, Q_2 denken wir so gewählt, daß keiner von beiden durch t oder t_0 hindurchläuft. Führt das Argument z einen geschlossenen Umlauf um die Stelle t der F_2 im positiven Sinne aus, so wächst dabei der Integralwert um den Betrag $2i\pi$ (vgl. S. 52), desgleichen bei einem Umlauf um t_0 um den Betrag $-2i\pi$. *Wir werden jetzt einfach im Innern der* F_2 *eine sich selbst nicht überkreuzende Linie* L_t *von* t_0 *nach* t *ziehen, diese als Schnitt betrachten und bei den Änderungen von* z *ein Überschreiten auch dieses dritten Schnittes verbieten.* Insbesondere werden wir also, wenn wir P_{t, t_0} als bestimmtes Integral zwischen den Grenzen z_0 und z berechnen, die Integrationsbahn als eine Linie L_z wählen, die L_t nicht überkreuzt. Dann ist in der zerschnittenen Fläche P_{t, t_0} eine eindeutige Funktion der Stelle z.

Für diese zu einer beliebigen Stelle t bzw. einem beliebigen Stellenpaare t, t_0 gehörenden Elementarintegrale entwickeln wir nun einen gegenüber den linearen Substitutionen von z „invarianten“ Aufbau.[1]) Die Ableitung des Elementarintegrales Z_t nach der normalen Variabelen z' hat auf der F_2 nur einen einzigen bei t gelegenen Pol, zweiter Ordnung; daraufhin wird der Differentialquotient:

$$\frac{dZ_t}{du_t}$$

eine zweiwertige algebraische Funktion der F_2 mit einem Pole zweiter Ordnung an der Stelle t. Nach S. 138 ist eine solche Funktion durch Angabe der Stelle t, abgesehen von einer multiplikativen und einer additiven Konstanten, eindeutig bestimmt. Ist t zunächst endlich und kein Verzweigungspunkt, so gilt, falls im Punkte t der mit dem rich-

---

1) Die Darstellung der Integrale rührt von Klein her; siehe dessen Abhandlung „Über hyperelliptische Sigmafunktionen“, Math. Ann., Bd. 27 (1886), S. 431.

tigen Vorzeichen genommene Wert von $\sqrt{f(z)}$ durch $\sqrt{f(t)}$ bezeichnet wird, für die Umgebung dieser Stelle die Entwicklung:

$$\sqrt{f(z)} = \sqrt{f(t)} + \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}(z-t) + \cdots,$$

während im anderen Blatte $\sqrt{f(z)}$ die entgegengesetzten Werte hat. Hiernach wird:

$$\frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t)} + \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}(z-t)}{(z-t)^2}$$

eine erste zweiwertige Funktion gewünschter Art; denn sie wird außer bei $z = t$ (in einem Blatte) nirgends auf der F_2 unendlich, auch nicht bei $z = \infty$. Die Hinzufügung einer multiplikativen und einer additiven Konstanten ändert Z_t um einen von z unabhängigen Faktor bzw. um ein additives Integral erster Gattung. Wir wollen den von 0 verschiedenen Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{f(t)}$ und das additive Glied $\frac{1}{24}f''(t)$ hinzufügen und erhalten auf diese Weise die durch $\Phi(z,t)$ zu bezeichnende Funktion

$$\Phi(z,t) = \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + f(t) + \frac{1}{2}f'(t)(z-t) + \frac{1}{12}f''(t)(z-t)^2}{2(z-t)^2}. \tag{9}$$

Der besondere Vorteil dieser Funktion besteht darin, daß sie in z und t symmetrisch ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$f(t) + \tfrac{1}{2}f'(t)(z-t) + \tfrac{1}{12}f''(t)(z-t)^2 = h(z,t),$$

so berechnet man leicht:

$$h(z,t) = a_0 z^2 t^2 + 2a_1(z^2 t + z t^2) + a_2(z^2 + 4zt + t^2) + 2a_3(z+t) + a_4$$

und hat dann an Stelle von (9) die Darstellung:

$$\Phi(z,t) = \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + h(z,t)}{2(z-t)^2}, \tag{10}$$

wodurch mit Rücksicht auf die Gestalt von $h(z,t)$ die Symmetrie von $\Phi(z,t)$ in beiden Argumenten ersichtlich wird.

Um den *invarianten* Charakter der Funktion (10) darzulegen, führen wir für z die homogenen Variabelen z_1, z_2 ein und spalten gleich auch t in den Quotienten der homogenen Größen t_1, t_2, für welche wir bei Beweglichkeit der Stelle t auf F_2 dieselben Vorschriften geben, wie für die z_1, z_2 (vgl. S. 119). Erweitern wir den in (10) rechts stehenden Quotienten mit $z_2^2 t_2^2$, so benutzen wir die Abkürzung:

$$z_2 t_2(z-t) = z_1 t_2 - z_2 t_1 = (z,t)$$

und nehmen die Bezeichnungen $z_2^4 \cdot f(z) = f_z$, $t_2^4 \cdot f(t) = f_t$ für die Formen wieder auf. Auf der anderen Seite bemerken wir, *daß die doppelt quadratische Form:*

$$z_2^2 t_2^2 \cdot h(z,t) = h_{z,t}$$

einfach die zweite Polare von f_z *nach* t *oder, was auf dasselbe hinauskommt, die zweite Polare von* f_t *nach* z *darstellt:*

$$12h_{z,t} = t_1^2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial z_1^2} + 2t_1 t_2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial z_1 \partial z_2} + t_2^2 \frac{\partial^2 f_z}{\partial z_2^2}$$
$$= z_1^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial t_1^2} + 2z_1 z_2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial t_1 \partial t_2} + z_2^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial t_2^2}.$$

Die Funktion $\Phi(z, t)$ als homogen von *nullter* Dimension in jedem der beiden Variabelenpaare wird von der Einführung der homogenen Variabelen nicht weiter getroffen; immerhin könnten wir, wenn Zähler und Nenner in (10) rechts homogen geschrieben sind, an Stelle von $\Phi(z, t)$ uns der Bezeichnung $\Phi_{z,t}$ bedienen:

(11) $$\Phi_{z,t} = \frac{\sqrt{f_z}\sqrt{f_t} + h_{z,t}}{2(z,t)^2}.$$

Es ist nun vor allem wichtig, daß $\Phi(z, t)$ auch dann eine zweiwertige Funktion mit einem Pole zweiter Ordnung in t bleibt, wenn t in einen endlichen Verzweigungspunkt (wir wollen einen solchen wieder mit e bezeichnen) oder in einen Punkt ∞ der F_2 hineinrückt. Aus (9) folgt nämlich sofort:

$$\Phi(z, e) = \tfrac{1}{4} f'(e)(z-e)^{-1} + \tfrac{1}{24} f''(e);$$

nach S. 138 müssen wir hier in der Tat zu einer linearen Funktion von z gelangen. Andererseits folgt aus der homogenen Darstellung (11) von $\Phi(z, t)$, daß $t = \infty$, d. h. also $t_2 = 0$, keine Ausnahmerolle spielen kann. In der Tat findet man denn auch aus (11), falls bei ∞ kein Verzweigungspunkt liegt:

$$\Phi(z, \infty) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_0}\sqrt{f(z)} + a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2\right),$$

eine Funktion von z, die bei ∞ in dem Blatte, in welchem

$$\lim_{z=\infty}\left(\frac{\sqrt{f(z)}}{\sqrt{a_0 z^2}}\right) = +1$$

zutrifft, einen Pol zweiter Ordnung hat, im anderen aber endlich bleibt. Ist aber bei ∞ ein Verzweigungspunkt gelegen, d. h. ist $a_0 = 0$, so gilt:

$$\Phi(z, \infty) = a_1 z + \tfrac{1}{2} a_2$$

in Übereinstimmung mit dem Umstande, daß jetzt wieder eine lineare Funktion von z vorliegen muß: $\Phi(z, t)$ *ist eine symmetrische Funktion zweier auf der* F_2 *frei beweglichen Stellen, die bei Festhaltung der einen Stelle eine zweiwertige algebraische Funktion der anderen Stelle mit einem Pol zweiter Ordnung an der festgehaltenen Stelle wird.*

Man multipliziere nun $\Phi(z, t)$ mit dem Differential erster Gattung du_z und integriere längs einer von z_0 bis z laufenden, die Schnitte Q_1

und Q_2 nicht überschreitenden Kurve, die zunächst den Pol t meiden soll. Das Integral:

$$\int_{z_0}^{z} \Phi(z, t)\, du_z \tag{12}$$

ist, etwa bei variabel gedachter oberer Grenze z, eine analytische Funktion von z, die die Stelle t als einzigen singulären Punkt hat; und zwar muß, falls wir auf dem eingeschlagenen Wege wirklich zum Elementarintegrale zweiter Gattung gelangen wollen, bei t eine Entwicklung (7) S. 144 vorliegen. Um das Verhalten des Integrales (12) bei t festzustellen, sei wieder zunächst t endlich und kein Verzweigungspunkt. Dann gilt für die Umgebung von t (vgl. (9) und die oben (S. 146) angegebene Entwicklung von $\sqrt{f(z)}$):

$$\Phi(z, t) = f(t)(z - t)^{-2} + \tfrac{1}{2} f'(t)(z - t)^{-1} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(z)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\left(1 - \frac{f'(t)}{2 f(t)}(z - t) + \cdots\right),$$

und damit folgt:

$$\Phi(z, t)\, du_z = \sqrt{f(t)}\left((z - t)^{-2} + * + \cdots\right) dz,$$

wo durch den Stern angedeutet sein soll, daß ein Glied mit $(z - t)^{-1}$ nicht auftritt. Hiernach ist:

$$-\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \int_{z_0}^{z} \Phi(z, t)\, du_z = Z_t^{z, z_0}$$

für die vorliegende Stelle t unser zu konstruierendes Elementarintegral zweiter Gattung (7); die Integralgrenzen z_0 und z haben wir am Symbol Z als obere Indizes angefügt.

Liegt zweitens t in einem endlichen Verzweigungspunkte, so gilt:

$$\int_{z_0}^{z} \Phi(z, e)\, du_z = \tfrac{1}{4} f'(e) \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z - e)\sqrt{f(z)}} + \tfrac{1}{24} f''(e) \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}.$$

Die Entwicklung der rechten Seite in der Umgebung von e ist leicht durchgeführt und ergibt nunmehr in:

$$-\frac{2}{\sqrt{f'(e)}} \int_{z_0}^{z} \Phi(z, e)\, du_z = Z_e^{z, z_0}$$

das Elementarintegral. Ebenso leicht beweist man die Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}} \int_{z_0}^{z} \Phi(z, \infty)\, du_z = Z_\infty^{z, z_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int_{z_0}^{z} \Phi(z, \infty)\, du_z = Z_\infty^{z, z_0},$$

von denen die zweite oder erste gilt, je nachdem ∞ ein Verzweigungspunkt ist oder nicht.

Aus der an Gleichung (6) angeschlossenen Betrachtung geht nun hervor, daß die vier in den Darstellungen des Elementarintegrales vor dem Integral auftretenden Faktoren die Werte des Differentialquotienten $-\frac{du_t}{dt'}$ je für die Stellen t sind, wenn wir nach Vorschrift von (1), S. 140, mit t' die jeweilige „normale Variabele" bezeichnen. Wir gelangen also zu dem Ergebnis: *Das Elementarintegral zweiter Gattung stellt sich in der oben konstruierten algebraischen Funktion $\Phi(z, t)$ durch die ausnahmslos gültige Formel dar:*

$$Z_t^{z, z_0} = -\left(\frac{du_t}{dt'}\right) \cdot \int_{z_0}^{z} \Phi(z, t)\, du_z. \tag{13}$$

Das Integral dritter Gattung P_{t, t_0} ist nun sehr leicht erledigt. Es besteht nämlich der Satz, daß das in (13) rechts stehende Integral eine algebraische Funktion von t oder, wenn wir z und t austauschen, eine algebraische Funktion von z ist, und zwar eben diejenige Funktion, deren Integral P_{t, t_0} liefert. Aus (9) folgt nämlich sofort:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(z, t)\, du_t = \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t)}}{2(z - t)} - \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t_0)}}{2(z - t_0)} + \frac{1}{24} \int_{t_0}^{t} \frac{f''(t)\, dt}{\sqrt{f(t)}},$$

wo wir der Bequemlichkeit halber t und t_0 vorerst endlich denken.[1])

Wir benutzen hierbei als Integrationsbahn die bereits oben (S. 145) eingeführte Linie L_t, welche dann von einer sogleich weiter für z zu wählenden Integrationsbahn L_z ebensowenig wie die Querschnitte Q_1, Q_2 überschritten werden darf.

In z stellt nun die rechte Seite der letzten Gleichung eine zweiwertige algebraische Funktion mit den beiden Polen erster Ordnung bei t und t_0 dar, insofern sich die Pole, welche die beiden ersten Glieder, einzeln genommen, bei $z = \infty$ haben, in ihrer Differenz aufheben. Multiplizieren wir jetzt mit du_z und integrieren zwischen den Grenzen z_0 und z längs einer vorschriftsmäßig gewählten Linie L_z, so ist:

$$\int_{z_0}^{z} \left(\int_{t_0}^{t} \Phi(z, t)\, du_t \right) du_z \tag{14}$$

in der Tat unser Elementarintegral dritter Gattung. Dasselbe ist nämlich als Funktion von z bis auf die Stellen t und t_0 analytisch. In der Umgebung von t, falls dies eine gewöhnliche Stelle, d. h. kein Verzwei-

1) Man beachte, daß im letzten Gliede rechts ein Integral zweiter Gattung mit dem Pole bei $t = \infty$ steht. Dieser hebt sich aber gegen den Pol des ersten Gliedes bei $t = \infty$ fort, da ja die Gleichung des Textes ein Integral zweiter Gattung in t mit einem bei z gelegenen Pole darstellt.

gungspunkt, ist, wird das Integral (14) abgesehen von dem Gliede $\log(z-t)$ der Entwicklung analytisch. Dieselbe Aussage gilt für die Umgebung eines Verzweigungspunktes $t = e$, abgesehen von dem Gliede $\log\sqrt{z-e}$. Auch die Umgebung von t_0 wird man entsprechend leicht erledigen. Auf den Fall, daß $t = \infty$ (oder $t_0 = \infty$) zutrifft, brauchen wir nicht besonders einzugehen, da die Stelle ∞ infolge des invarianten Aufbaus des Integrales (14) keine Sonderrolle spielt: *Das unter Angabe der Grenzen durch* P_{t,t_0}^{z,z_0} *zu bezeichnende Elementarintegral dritter Gattung stellt sich mittelst der oben konstruierten Funktion* $\Phi(z,t)$ *in der Gestalt* (14) *dar, d. h. ausführlich geschrieben:*

$$P_{t,t_0}^{z,z_0} = \int\limits_{z_0}^{z}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)}+h(z,t)}{2(z-t)^2}\,du_t\right)du_z$$

oder in homogener Gestalt:

$$P_{t,t_0}^{z,z_0} = \int\limits_{z_0}^{z}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{f_z}\sqrt{f_t}+h_{z,t}}{2(z,t)^2\sqrt{f_z}\sqrt{f_t}}(t,dt)\right)(z,dz).$$

Man bezeichnet z und z_0 als die „*Argumente*", t und t_0 als die „*Parameter*" dieses Integrals und überträgt diese Bezeichnung auch auf das Integral zweiter Gattung (13). Das Doppelintegral (14) gestattet übrigens Umänderung der Reihenfolge der beiden Integrationen[1]); es gilt also, wenn wir gleich noch die Symmetrie von Φ in z und t benutzen:

$$P_{t,t_0}^{z,z_0} = \int\limits_{z_0}^{z}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(z,t)\,du_t\right)du_z = \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{z_0}^{z}\Phi(t,z)\,du_z\right)du_t.$$

Das rechts stehende Integral ist nach (14) aber P_{z,z_0}^{t,t_0}. *Das Elementarintegral dritter Gattung bleibt unverändert beim Austausch der Argumente und Parameter*[2]):

$$(15)\qquad P_{z,z_0}^{t,t_0} = P_{t,t_0}^{z,z_0}.$$

Differenziert man die vorletzte Gleichung nach t, indem man sich etwa gleich des Differentials dt' der normalen Variabelen t' der einzelnen Stelle bedient, so folgt:

$$\frac{d}{dt'}\left(P_{t,t_0}^{z,z_0}\right) = \frac{du_t}{dt'}\cdot\int\limits_{z_0}^{z}\Phi(z,t)\,du_z.$$

Aus (13) folgt also: *Die Differentiation des Elementarintegrals dritter*

---

1) Man vgl. etwa Osgood, S. 307, 7. Satz. Die Vorbedingungen dieses Satzes sind im Texte erfüllt, da für zwei auf L_t bzw. L_z bewegliche Argumente t und z die Funktion $\Phi(z,t)$ stetig ist und bei festgehaltenem einen Argument eine algebraische Funktion der anderen liefert.

2) Wir kommen auf diesen Satz in § 8 nochmals zurück.

Gattung P_{t,t_0}^{z,z_0} *nach dem Parameter t liefert das Elementarintegral zweiter Gattung* Z_t^{z,z_0} *des Parameters t in der Gestalt:*

(16) $$Z_t^{z,z_0} = -\frac{d}{dt}(P_{t,t_0}^{z,z_0}).$$

Wir kommen jetzt noch einmal auf ein beliebiges Integral:

(17) $$\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz$$

unserer F_2 zurück und wollen einen additiven Aufbau desselben aus einer algebraischen Funktion, dem Integral erster Gattung und den betrachteten Elementarintegralen der zweiten und dritten Gattung durchführen. Mögen beim Integral (17) zunächst n logarithmische Unstetigkeitspunkte der Residuen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ an den Stellen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vorliegen. Wir nehmen dann irgendeine von den bisherigen verschiedene Stelle t_0 hinzu und bilden das Aggregat:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k P_{t_k, t_0},$$

das übrigens an der Stelle t_0 infolge des Verschwindens der Residuensumme (vgl. S. 141) keinen neuen logarithmischen Unstetigkeitspunkt bekommt. Die Differenz:

(18) $$\int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz - \sum_{k=1}^{n} C_k P_{t_k, t_0}$$

liefert ein Integral, das an singulären Punkten höchstens noch Pole aufweist. Findet sich an der Stelle s ein Pol ν^{ter} Ordnung, so beachte man, daß in:

$$Z_s, \quad \frac{dZ_s}{du_s}, \quad \frac{d^2 Z_s}{du_s^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{\nu-1} Z_s}{du_s^{\nu-1}}$$

eine Funktionenreihe vorliegt, in der das erste Glied ein Integral, die übrigen Glieder algebraische Funktionen sind; dabei weisen diese Funktionen allein an der Stelle s der F_2 Pole auf, und zwar der Ordnungen $1, 2, 3, \ldots, \nu$. Man kann daraufhin ein Aggregat:

$$BZ_s + B'\frac{dZ_s}{du_s} + B''\frac{d^2 Z_s}{du_s^2} + \cdots + B^{(\nu-1)}\frac{d^{\nu-1} Z_s}{du_s^{\nu-1}}$$

mittelst konstanter Koeffizienten B derart aufbauen, daß der Abzug dieses Aggregates vom Integral (18) den Pol bei s gerade weghebt. Verfahren wir in dieser Weise mit allen Polen von (18) (die endliche Anzahl derselben sei gleich m), so restiert schließlich ein überall endliches Integral $(Au + A')$. Die Konstante A' und alle algebraischen Bestandteile ziehen wir in $R_1(z, \sqrt{f(z)})$ zusammen und gelangen so zu dem Ergebnis: *Jedes Integral* (17) *unserer* F_2 *läßt sich aus einer alge-*

braischen Funktion, dem Integral erster Gattung und den Elementarintegralen zweiter und dritter Gattung in der nachfolgenden Gestalt aufbauen:

$$(19)\quad \int R(z, \sqrt{f(z)})\,dz = R_1(z, \sqrt{f(z)}) + Au + \sum_{i=1}^{m} B_i Z_{t_i} + \sum_{k=1}^{n} C_k P_{t_k, t_0}.$$

§ 7. Die zur ersten Stufe gehörenden Normalgestalten der Integrale der drei Gattungen.

Während bei den Entwicklungen von § 6 auf Wahrung des allgemeinen invarianten Charakters der Formeln Gewicht lag, soll jetzt die Verzweigungsform in ihrer zur *ersten Stufe* gehörenden Gestalt bevorzugt werden. Wir gelangen so zu den *Normalgestalten erster Stufe* für die Integrale; man nennt sie auch die „*Weierstraßschen Normalintegrale*", da Weierstraß diese Integralgestalten in seinen Vorlesungen zugrunde legte (vgl. S. 117).

Als „*Normalintegral erster Gattung erster Stufe*" benutzen wir hinfort:

$$(1)\qquad u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

d. h. wir legen die untere Grenze im Verzweigungspunkte bei $z = \infty$ fest.

Als „*Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe*" bezeichnen wir das folgende:

$$(2)\qquad Z = Z^{z, z_0} = -\int_{z_0}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

wobei die untere Grenze einstweilen unbestimmt bleibe. Das Besondere ist also, *daß wir jetzt nur das eine Integral mit dem Pole im Punkte* ∞ *zulassen*. Nach den Formeln von S. 147 u. f. ist die Beziehung zum Elementarintegral Z_∞ einfach durch:

$$(3)\qquad Z^{z, z_0} = -Z_{\infty}^{z, z_0}$$

festgelegt. Übrigens liefert die auf (13) S. 149 folgende Formel bei Austausch der Bezeichnungen z und t für die erste Stufe:

$$\int_{z_0}^{z} \Phi(z, t)\,du_z = -\frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t)}}{2(z - t)} + \frac{\sqrt{f(z_0)} + \sqrt{f(t)}}{2(z_0 - t)} + \int_{z_0}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (13) S. 149 *eine Darstellung des Elementarintegrales zweiter Gattung* Z_t^{z, z_0} *mit beliebigem „Parameter"* t *durch das Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe* (2) *in der Gestalt:*

$$(4)\qquad \left(\frac{dt'}{du_t}\right) \cdot Z_t^{z, z_0} = \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t)}}{2(z - t)} - \frac{\sqrt{f(z_0)} + \sqrt{f(t)}}{2(z_0 - t)} + Z^{z, z_0}.$$

unter Hinzunahme einer zweiwertigen algebraischen Funktion. Diese Reduktion des Integrales zweiter Gattung mit beliebigem „Parameter" t auf das Integral mit $t = \infty$ rechtfertigt die Beschränkung auf dieses Normalintegral (2).

Als *„Normalintegral dritter Gattung erster Stufe"* benutzt man gelegentlich das folgende:

$$(5)\qquad \Pi_t = \Pi_t^{z, z_0} = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-t)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

mit der Bedingung, daß t kein Verzweigungspunkt sein soll; die untere Grenze soll wieder unbestimmt bleiben. Hier liegt also die Besonderheit vor, *daß das Integral in zwei übereinander liegenden Stellen der Fläche F_2 logarithmische Unstetigkeitspunkte hat, und zwar solche der Residua* $\pm \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$.

Um die Beziehung des Integrales (5) zu dem Elementarintegrale P_{t, t_0}^{z, z_0} des vorigen Paragraphen klarzulegen, entnehmen wir von S. 149 die Gleichung:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(z, t)\, du_t = \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t)}}{2(z-t)} - \frac{\sqrt{f(z)} + \sqrt{f(t_0)}}{2(z-t_0)} - Z^{t, t_0},$$

multiplizieren mit du_z und integrieren zwischen den Grenzen z_0 und z, wodurch wir erhalten:

$$(6)\qquad P_{t, t_0}^{z, z_0} = \tfrac{1}{2} \log \frac{(z-t)(z_0 - t_0)}{(z_0 - t)(z - t_0)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{f(t)}\, \Pi_t^{z, z_0} - \tfrac{1}{2}\sqrt{f(t_0)}\, \Pi_{t_0}^{z, z_0} - u^{z, z_0} Z^{t, t_0}.$$

Hierdurch ist also das links stehende Elementarintegral, abgesehen von einem logarithmischen Gliede und einem Integral erster Gattung, mittelst der beiden zu t und t_0 gehörenden Integrale (5) *dargestellt.* Diese Gleichung bleibt auch in dem Falle brauchbar, daß t_0 oder t oder beide Stellen zugleich in endliche Verzweigungspunkte rücken; so gilt z. B. für $t_0 = e_i$ und $t = e_k$ die nachfolgende einfache Darstellung des Elementarintegrals:

$$(7)\qquad P_{e_k, e_i}^{z, z_0} = \tfrac{1}{2} \log \frac{(z - e_k)(z_0 - e_i)}{(z_0 - e_k)(z - e_i)} - u^{z, z_0} Z^{e_k, e_i}.$$

Dagegen wird die Gleichung (6), welche ja nicht mehr den Charakter der Invarianz hat, unbrauchbar, falls einer der logarithmischen Unstetigkeitspunkte des darzustellenden Elementarintegrals in den Verzweigungspunkt ∞ fällt. Wird z. B. $t_0 = \infty$ gesetzt, so werden die beiden letzten Glieder der rechten Seite von (6) unendlich. Allerdings

kann man hier sofort (mittelst funktionentheoretischer Betrachtung) den Ansatz:

$$P_{t,\infty}^{z,z_0} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{z-t}{z_0-t}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{f(t)}\,\Pi_t^{z,z_0} + A u^{z,z_0}$$

bilden, wo A eine von z und z_0 unabhängige Größe ist. Man kann A etwa in der Weise bestimmen, daß man die letzte Gleichung für $z_0 = e_i$, $z = e_k$ spezialisiert (wobei A unberührt bleibt), die Gleichung (7) aber für $z_0 = \infty$, $z = t$. Dann werden die linken Seiten zufolge des Satzes von der Vertauschbarkeit der Argumente und Parameter (S. 150) bei den in § 6 konstruierten Elementarintegralen dritter Gattung einander gleich, und die Gleichsetzung der rechten Seiten liefert für A die freilich nicht ganz einfache Bestimmungsgleichung:

$$2u^{e_k, e_i}\cdot A = -u^{t,\infty}\cdot 2Z^{e_k, e_i} - \tfrac{1}{2}\sqrt{f(t)}\cdot 2\Pi_t^{e_k, e_i}.$$

Die hier auftretenden, doppelt genommenen Integrale zwischen Verzweigungspunkten als Grenzen:

$$2u^{e_k, e_i},\quad 2Z^{e_k, e_i},\quad 2\Pi_t^{e_k, e_i}$$

haben die Bedeutung von „*Perioden*“ dieser Integrale, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden.[1])

§ 8. Die Perioden der elliptischen Integrale und die zwischen ihnen bestehenden Relationen.

Die Riemannsche Fläche F_2 wurde S. 85 unter Verzicht auf Konformität der Beziehung durch stetige Umformung in die Oberfläche eines Kreisringes verwandelt. Letztere wurde durch die beiden in Fig. 21, S. 88 gewählten Querschnitte Q_1 und Q_2 in einen *einfach* zusammenhängenden Bereich zerschnitten und konnte durch eine weitere stetige Umwandlung in das Viereck der Fig. 22, S. 89 umgeformt werden. Hier sind je die beiden Ufer des einzelnen Querschnittes zu zwei gegenüberliegenden Viereckseiten geworden; je zwei homologe Punkte des einzelnen Seitenpaares liefern also ein und denselben Punkt der F_2.

Wir müssen zunächst darauf hinweisen, daß die hier vorgenommene Zerschneidung eine spezielle ist. Es ist wünschenswert, sich ein Bild

1) An die Darstellung (19) S. 152 eines beliebigen elliptischen Integrales der F_2 könnten wir jetzt eine Darstellung durch die beiden Normalintegrale u und Z und ein Aggregat von Integralen Π_t anreihen, zu denen dann noch ein algebraisches Glied und ein Aggregat logarithmischer Glieder der im Texte hervorgetretenen Bauart hinzukämen. Doch hat diese Darstellung eines beliebigen Integrales der F_2 wesentlich infolge der hinzutretenden logarithmischen Glieder nicht die Einfachheit der Darstellung (19) S. 152.

von der möglichen Verallgemeinerung zu machen. Zu diesem Zwecke sei jetzt Q_1 eine ganz beliebige geschlossene reguläre Kurve auf der F_2, die sich selbst nicht überkreuzt und (um ein rechtes und linkes Ufer unterscheiden zu können) mit einem gewissen Richtungssinne zu durchlaufen ist. Von dem Verlauf einer solchen Kurve Q_1 kann man sich auf der F_2 selbst keine recht anschauliche Vorstellung bilden, und auch die Ringfläche bietet hier noch keine recht befriedigende Grundlage. Dagegen ist das Bild der Kurve Q_1 im Viereck der Fig. 22 ein sehr anschauliches; Q_1 liefert hier irgendeine Anzahl getrennt verlaufender, das Viereck durchsetzender Linienstücke, die einen Richtungssinn haben und in der Art zusammenhängen, daß beim Erreichen einer Seite des Vierecks das nächstfolgende Kurvenstück im homologen Punkte der Gegenseite beginnt. Die Kurvenstücke liefern hierbei eine ringförmig geschlossene Kette. Umgekehrt liefert jede Kette von Kurvenstücken dieser Art, die unser Viereck, ohne sich zu überkreuzen, durchsetzt, eine brauchbare geschlossene Kurve Q_1 auf der F_2. Zur Erläuterung ist in Fig. 26 eine solche aus drei Kurvenstücken bestehende Kette gezeichnet; die das Viereck durchziehenden punktierten Geraden sollen die Zuordnung der Randpunkte veranschaulichen.

Um nun Q_1 als Querschnitt zu benutzen, zerschneiden wir das Viereck längs der von Q_1 gelieferten Kurvenstücke in eine gewisse Anzahl von Flächenstücken und legen sodann diese in der Art aneinander, daß je zwei homologe Stücke von Gegenseiten des Vierecks zur Deckung kommen. Es bleibt dann freilich (wie man sich am Beispiele der Fig. 26 und 27 klar machen wolle[1])) ein Paar homologer Seitenstücke noch offen (in Fig. 27 die beiden geraden Stücke oben und unten). Doch können wir diese beiden Stücke durch Zusammenbiegen des gewonnenen Gebildes zu einem im Raume gelegenen Ringe auch noch zur Deckung bringen. Dieser Ring hat dann, wie die Mantelfläche eines Zylinders zwei Ränder, welche den Ufern unseres Querschnitts Q_1 entsprechen. Dabei sind die Punkte dieser beiden Ränder eindeutig und stetig einander zugeordnet, nämlich

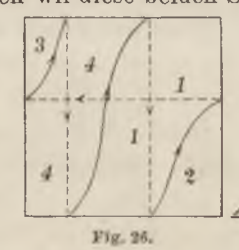


Fig. 26.

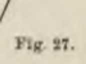


Fig. 27.

1) Von den beiden das Innere der Fig. 27 durchsetzenden gekrümmten Schnitten Q_2 und Q_2' sehe man zunächst ab. Die beiden sich senkrecht kreuzenden punktierten Geraden der Fig. 27 rühren vom Rande des Vierecks der Fig. 26 her; die eingetragenen Nummern der Flächenstücke entsprechen den in Fig. 26 angegebenen Nummern.

als gegenüber liegende Uferpunkte von Q_1 auf der F_2 oder auch als je zwei Randpunkte, die einen und denselben Punkt der unzerschnittenen F_2 liefern.

Wir gewinnen nun leicht ein anschauliches Bild über die jetzt noch möglichen zu Q_1 „konjugierten" Schnitte Q_2. In Fig. 27 ist ein erster Querschnitt Q_2 dieser Art von einem rechtsseitigen Uferpunkte des Schnittes Q_1 nach dem entsprechenden linksseitigen Punkte durch den Ring hindurchgelegt. Würden wir jetzt Fig. 27 längs Q_2 zerschneiden und die beiden Stücke so aneinanderlegen, daß die beiden Fig. 27 oben und unten begrenzenden Geradenstücke zur Deckung kommen, so hätten wir damit die F_2 in dasjenige ebene Viereck stetig deformiert, welches den beiden neuen Querschnitten Q_1 und Q_2 entspricht. Homologe Punkte der Gegenseiten sind dabei natürlich wieder einander zugeordnet.

Jetzt ist es nur noch ein Schritt, um das allgemeinste Querschnittsystem der F_2 anschaulich zu erfassen. Wir können nämlich noch an Stelle von Q_2 einen Schnitt Q_2' treten lassen, indem wir aus Q_2 ein inneres Stück herausnehmen und statt dessen eine Anzahl von Umläufen um den vorhin aus Fig. 27 hergestellten Ring in der einen oder anderen Richtung einhängen. So entsteht der in Fig. 27 punktiert angedeutete Querschnitt Q_2', indem wir *einen* solchen Umlauf einhängen. Man mache sich an der Figur deutlich, daß es sich dabei um einen Umlauf handelt, der auf der F_2 aus der geschlossenen Kurve Q_1 durch stetige Verschiebung hervorgeht. *Solche durch stetige Verschiebung ineinander überführbare geschlossene Wege sind für unsere Zwecke äquivalent.* Somit geht jeder beliebige Schnitt Q_2 aus dem zuerst gewählten Q_2 einfach dadurch hervor, daß wir diesem Wege Q_2 eine Anzahl mit $+Q_1$ oder $-Q_1$[1]) äquivalenter Wege einhängen.

Wir können nun, genau wie dies vorhin in Fig. 26 geschah, den Bereich der Fig. 27 durch jeden beliebigen Schnitt Q_2 in eine Anzahl von Streifen zerschneiden und diese dann (Übergang von Fig. 26 zu Fig. 27) durch Aneinanderfügen homologer Stücke der beiden Fig. 26 oben und unten berandenden Gegenseiten wieder zusammenfügen. *So gelangen wir endlich zu einem Viereck, dessen Gegenseiten von den Schnittufern des jetzt ganz beliebig gewählten Schnittsystems Q_1, Q_2 herrühren.* Es braucht übrigens kaum noch hinzugesetzt zu werden, daß wir auch dieses Schnittsystem auf F_2 noch irgendeiner ohne Zerreißen vor sich gehenden stetigen Verschiebung unterwerfen dürfen, ohne daß dasselbe an seiner Brauchbarkeit einbüßt.

1) Wir sprechen von einem Wege $+Q_1$ oder $-Q_1$, je nachdem wir Q_1 im ursprünglichen Richtungssinne oder diesem entgegengesetzt durchlaufen.

Wollen wir uns ein die gegenseitige Anordnung und den Richtungssinn der beiden Querschnitte Q_1, Q_2 betreffendes schematisches Bild machen, so bedienen wir uns der Fig. 28, welcher die ursprüngliche zweiblättrige Fläche $\mathbf{F}_2$ zugrunde liegt. Soll jedoch für ein auf die zerschnittene Fläche beschränktes z eine Integrationsbahn L_z von z_0 nach z veranschaulicht werden oder bei den Integralen dritter Gattung ein von t_0 nach t ziehender Schnitt L_t neben den bisherigen Q_1, Q_2 zugefügt werden, so bedienen wir uns besser der schematischen Fig. 29, in welcher die in ein Viereck deformierte $\mathbf{F}_2$ zugrunde gelegt ist.

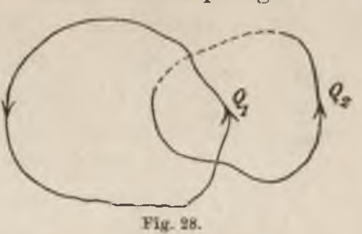


Fig. 28.

Für die Untersuchung der Vieldeutigkeit der elliptischen Integrale auf der dreifach zusammenhängenden Riemannschen Fläche $\mathbf{F}_2$ sind nun die allgemeinen S. 4 ff. entwickelten Prinzipien maßgeblich. Ist Q_i einer der beiden geschlossenen Wege Q_1, Q_2 auf der $\mathbf{F}_2$, so wird sich ein vorgelegtes Integral bei Fortsetzung über Q_i bis auf eine additive Konstante Ω_i, die wir eine „Periode" des Integrals nennen, reproduzieren. Nehmen wir für die über gegebene Kurven erstreckten bestimmten Integrale eine oben (S. 7 ff.) gebrauchte Bezeichnungsweise wieder auf, so wird hiernach die Periode Ω_i durch:



Fig. 29.

$$(1) \qquad \Omega_i = \int_{(+Q_i)} R(z, \sqrt{f(z)})\, dz$$

erklärt werden können, wobei wir durch das Vorzeichen bei $+Q_i$ noch ausdrücklich hervorheben wollen, daß die Integration den Richtungssinn des Weges Q_i befolgen soll. Der bequemen Ausdrucksweise halber nennen wir Ω_1 die „erste" und Ω_2 die „zweite" Periode des fraglichen Integrales.

Beschränken wir die obere Grenze des Integrales auf die durch Q_1 und Q_2 zerschnittene Fläche, so ist in dem damit gegebenen einfach zusammenhängenden Bereiche das Integral, falls es der ersten oder zweiten Gattung angehört, als eindeutige Funktion seiner oberen Grenze erklärt. Die Integrale dritter Gattung betreffend haben wir Fig. 29 gleich so vorbereitet, daß sie für die Untersuchung der Elementarintegrale paßt. Kommen mehr als zwei, etwa ν logarithmische Unstetigkeitspunkte t der Residuen $C_0, C_1, \ldots, C_{\nu-1}$ vor, so wolle man in der durch Q_1, Q_2 zerschnittenen Fläche das Integral über einen geschlossenen Umlauf um alle ν Punkte t führen. Ohne Änderung des Integralwertes können wir diesen Umlauf, wie Fig. 30 darlegt, auf ν kleine Kreise

Fig. 30.

und eine Reihe dazwischen liegender Integrationswege zusammenziehen, welche letztere je zweimal in entgegengesetzten Richtungen zu durchlaufen sind. Die Integralwerte, welche von diesen letzteren Wegen herrühren, heben sich also auf, während die ν Kreise einzeln die Integralwerte $2i\pi C_0$, $2i\pi C_1, \ldots,$ $2i\pi C_{\nu-1}$ liefern. Das Gesamtintegral ist zufolge des Satzes vom Verschwinden der Residuensumme (vgl. S. 150) gleich Null. Wenn wir demnach (entsprechend dem Schnitte L_t in Fig. 29) jetzt wieder einen Schnitt L_t von t_0 über $t_1, t_2 \ldots$ bis $t_{\nu-1}$ ziehen und solcherart unsere bereits längs Q_1 und Q_2 zerschnittene Fläche nun freilich wieder in einen „zweifach" zusammenhängenden Bereich verwandeln, so ist doch gleichwohl im letzteren unser betrachtetes Integral dritter Gattung wieder eine eindeutige Funktion seiner oberen Grenze.

Für die so aus dem einzelnen elliptischen Integrale gewonnene, im beschränkten Bereiche eindeutige Funktion besteht nun nach S. 7 der Satz, daß dieselbe in gegenüberliegenden Uferpunkten des einzelnen Schnittes eine Wertdifferenz hat, die längs dieses Schnittes konstant bleibt. Als „Wertdifferenz längs eines Querschnittes" wollen wir immer den Überschuß des „rechtsseitigen" über den „linksseitigen" Integralwert bezeichnen. Bei dem Schnitte L_t müssen wir die durch die Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-2}$ abgeteilten Stücke $L_t^{(1)}, L_t^{(2)}, \ldots, L_t^{(\nu-1)}$ unterscheiden. Mittelst der Fig. 28 ff. zeigt man alsdann für das in (1) betrachtete Integral leicht den Satz: *Die Wertdifferenz längs Q_1 ist $-\Omega_2$, die längs Q_2 aber $+\Omega_1$; und falls die dritte Gattung vorliegt, ist die Wertdifferenz längs $L_t^{(k)}$ gleich*

$$2i\pi(C_0 + C_1 + \cdots + C_{k-1}).$$

Wir wollen jetzt sogleich die Verzweigungsform erster Stufe zugrunde legen, übrigens aber (was wir doch hervorheben wollen) vorerst noch an einem beliebigen Querschnittsystem festhalten. Für die Normalintegrale u und Z benutzen wir fortan die besondere Schreibweise der Perioden:

(2) $$\omega_i = \int_{(+Q_i)} du, \quad \eta_i = \int_{(+Q_i)} dZ,$$

woraus sich übrigens zufolge (4) S. 152 für das besondere durch (13) S. 149 gegebene Elementarintegral Z_t die beiden Perioden $\left(\frac{du_t}{dt}\right) \cdot \eta_i$ ergeben. Für das Elementarintegral dritter Gattung schreiben wir:

(3) $$\Omega_i^{(t_1, t_0)} = \int_{(+Q_i)} dP_{t_1, t_0}$$

als Bezeichnung der Perioden und merken übrigens an, daß die Wertdifferenz längs L_t für dieses Integral $-2i\pi$ ist.

Ein erster wichtiger Satz ist nun der folgende: *Von den Perioden ω_1, ω_2 des Integrals erster Gattung kann keine gleich Null sein.* Wären nämlich beide gleich Null, so wäre u auf der unzerschnittenen F_2 eindeutig und *überall* analytisch, also mit einer Konstanten identisch. Wäre aber nur ω_2 von Null verschieden, so würde man in $e^{\frac{2i\pi u}{\omega_2}}$ auf dieselbe Art eine Konstante erkennen.

Zur Gewinnung von Beziehungen zwischen den Perioden zweier Integrale kann man so gelangen. Der geschlossene Rand C des aus F_2 durch Zerschneidung längs Q_1 und Q_2 entstehenden einfach zusammenhängenden Bereiches setzt sich (vgl. Fig. 28 u. 29) zusammen aus dem linken Ufer von $+Q_2$ (wir wollen für dieses in der Richtung von Q_2 zu durchlaufende Ufer $+Q_2^l$ schreiben) und den entsprechend zu bezeichnenden Wegen $+Q_1^l$, $-Q_2^r$, $-Q_1^r$; die Schnittufer sind dabei in der Richtung beschrieben, daß der Umlauf längs des Randes C des Bereiches im „positiven" Sinne vorliegt. Ein in dieser Richtung über den Rand C erstrecktes Integral läßt sich demnach so zerlegen:

$$\int_{(C)} = \int_{(+Q_2^l)} + \int_{(-Q_2^r)} + \int_{(+Q_1^l)} + \int_{(-Q_1^r)},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(4)\qquad \int_{(C)} = \int_{(+Q_2^l)} - \int_{(+Q_2^r)} + \int_{(+Q_1^l)} - \int_{(+Q_1^r)}.$$

Sind nun $F_1(z)$ und $F_2(z)$ irgend zwei auf der nötigenfalls auch noch mit einem oder zwei weiteren Schnitten L_t versehenen Fläche eindeutig erklärte Integrale[1]), deren durch (1) erklärte Perioden Ω_i' und Ω_i'' seien, so läßt sich das Integral:

$$\int_{(C)} F_2(z)\, dF_1(z)$$

auf Grund der Regel (4) leicht berechnen. Da nämlich $dF_1(z)$ algebraisch und also längs beider Ufer von Q_i gleich ist, so kann man in (4) rechts die beiden ersten Integrale zusammenziehen in ein längs $+Q_2$ zu erstreckendes Integral des Produktes von $dF_1(z)$ und dem Überschuß $-\Omega_1''$ der linksseitigen Werte $F_2(z)$ über die rechtsseitigen. Es folgt damit:

$$\int_{(+Q_2^l)} F_2(z)\, dF_1(z) - \int_{(+Q_2^r)} F_2(z)\, dF_1(z) = -\Omega_1'' \int_{(+Q_2)} dF_1(z) = -\Omega_2' \Omega_1''.$$

1) Einen zu $F_1(z)$ gehörenden Schnitt L würden wir übrigens entbehren können, da von $F_1(z)$ sogleich nur das Differential $dF_1(z)$ verwendet wird.

Indem man das dritte und vierte Integral in (4) rechts genau so behandelt, gewinnt man als Ergebnis:

$$\int_{(C)} F_2(z)\,dF_1(z) = \Omega_1'\Omega_2'' - \Omega_2'\Omega_1''. \tag{5}$$

Der links stehende Integralwert bleibt nun unverändert, falls wir die Integrationskurve C stetig und ohne Zerreißen innerhalb der zerschnittenen Fläche zusammenziehen; nur dürfen wir sie dabei nicht über eine singuläre Stelle von $F_2(z)$ oder $\frac{dF_1(z)}{dz'}$ hinwegschieben, unter z' die „normale" Variabele (vgl. S. 140 ff.) verstanden. Es eröffnet sich damit eine zweite Berechnungsart des Integrales (5), welche wir sogleich in den verschiedenen wichtigen Spezialfällen darlegen.

Als erstes Beispiel wählen wir $F_1(z) = u$, $F_2(z) = Z_t$; die Gleichung (5) nimmt die besondere Gestalt an:

$$\int_{(C)} Z_t\,du_z = \frac{du_t}{dt'}(\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1).$$

Hier können wir C auf einen unendlich kleinen, im positiven Umlaufsinne um den Pol von Z_t zu beschreibenden Kreis zusammenziehen, längs dessen Peripherie:

$$Z_t = \frac{1}{z'} + c_0 + c_1 z' + \cdots, \quad du_z = \frac{du_t}{dt'}\cdot dz'$$

gilt. Das Integral hat demnach einfach den Wert $\frac{du_t}{dt'}\cdot 2i\pi$, und es ergibt sich der Satz: *Zwischen den Perioden* (2) *der Normalintegrale erster und zweiter Gattung von der ersten Stufe besteht die Gleichung:*

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2i\pi, \tag{6}$$

welche man als die „Legendresche Relation" bezeichnet.[1])

Setzen wir zweitens $F_1(z) = u$ und wählen als $F_2(z)$ ein Elementarintegral P_{t,t_0} (vgl. (8), S. 145), also nicht notwendig das besondere in (14) S. 149 gegebene P_{t,t_0}, so ist:

$$\int_{(C)} P_{t,t_0}\,du_z = \omega_1\Omega_2^{(t,t_0)} - \omega_2\Omega_1^{(t,t_0)}.$$

Hier können wir C auf den in Fig. 31 skizzierten Weg zusammenziehen, der sich aus zwei unendlich kleinen Kreisen um t_0 und t_1 sowie zwei längs der Ufer von L_t verlaufenden Wegen zusammensetzt. Die Kreisintegrale verschwinden mit verschwindenden Radien. Es gilt nämlich zufolge (8) S. 145 z. B. für den Kreis um t:

Fig. 31.

$$\int P_{t,t_0}\,du_z = \frac{du_t}{dt'}\int(\log z' + c_0' + c_1'z' + \ldots)\,dz',$$

1) In Legendres „Traité des fonctions elliptiques" Bd. 1, S. 62 ff. hat die Relation eine wesentlich andere, im zweiten Abschnitte zu besprechende Gestalt.

wo nur das erste Glied der Klammer eine Bemerkung erfordert. Setzt man $z' = re^{\vartheta i}$, so ist das über den Kreis genommene Integral:

$$\int \log z' \cdot dz' = ir \int_0^{2\pi} (\log r + \vartheta i) e^{\vartheta i} d\vartheta,$$

dessen Verschwinden für $\lim r = 0$ man sofort erkennt. Es bleiben somit nur die beiden Integrale längs der Ufer von L_t. Da aber die Wertdifferenz von P_{t, t_0} längs L_t gleich $-2i\pi$ ist, so folgt als Integralwert:

$$-2i\pi \int_{t_0}^{t} du_z = -2i\pi \cdot u^{t, t_0},$$

wenn wir wie oben die Integralgrenzen als obere Indizes anschreiben. *Für die Perioden* ω_1, ω_2 *und diejenigen des Elementarintegrales* P_{t, t_0} *dritter Gattung besteht die Relation:*

(7) $$\omega_1 \Omega_2^{(t, t_0)} - \omega_2 \Omega_1^{(t, t_0)} = -2i\pi \cdot u^{t, t_0},$$

wo für das rechts stehende Integral erster Gattung L_t *als Integrationsbahn gilt.*

Wir bilden weiter aus (5) den Ansatz:

$$\int_{(C)} P_{t, t_0} dP_{s, s_0} = \Omega_1^{(s, s_0)} \Omega_2^{(t, t_0)} - \Omega_2^{(s, s_0)} \Omega_1^{(t, t_0)};$$

hierbei wollen wir unter den P irgendwelche Elementarintegrale dritter Gattung verstehen, d. h. es können entweder direkt die durch (14) S. 149 gegebenen Integrale sein, oder sie können von diesen auch durch irgendwelche additiven Integrale erster Gattung abweichen. Hier darf man C zusammenziehen auf eine nach Art von Fig. 31 um L_t herumlaufende Kurve und zwei unendlich kleine Kreise um die Pole erster Ordnung von $\frac{dP_{s, s_0}}{dz'}$. Die erste Bahn liefert, was man wie im vorigen Beispiele leicht feststellt:

$$-2i\pi \int_{t_0}^{t} dP_{s, s_0} = -2i\pi P_{s, s_0}^{t, t_0}.$$

Für die beiden Kreise um s und s_0 findet man (vgl. (8) S. 145), falls z_0 die untere Grenze von P_{t, t_0} ist:

$$\int P_{t, t_0} \frac{dP_{s, s_0}}{dz'} dz' = P_{t, t_0}^{s, z_0} \cdot 2i\pi - P_{t, t_0}^{s_0, z_0} \cdot 2i\pi = 2i\pi P_{t, t_0}^{s, s_0}.$$

Es ergibt sich somit: *Für irgend zwei Elementarintegrale dritter Gattung* P_{s, s_0}, P_{t, t_0} *und ihre Perioden besteht die Relation:*

(8) $$P_{t, t_0}^{s, s_0} - P_{s, s_0}^{t, t_0} = \frac{1}{2i\pi} \left(\Omega_1^{(s, s_0)} \Omega_2^{(t, t_0)} - \Omega_2^{(s, s_0)} \Omega_1^{(t, t_0)} \right).$$

Letzten Endes betrachten wir noch den Ansatz:

$$\int\limits_{(C)} Z_s\, dP_{t,t_0} = -\frac{du_s}{ds'}\left(\eta_1 \Omega_2^{(t,t_0)} - \eta_2 \Omega_1^{(t,t_0)}\right).$$

Hier dürfen wir die Kurve C auf drei unendlich kleine Kreise um die Stellen s, t und t_0 zusammenziehen. Die Auswertung der drei Integrale ist durch die bisherigen Methoden zu leisten und ergibt:

$$\int\limits_{(C)} Z_s\, dP_{t,t_0} = \left(\frac{dP_{t,t_0}}{ds'}\right)_{s=s} 2i\pi + Z_s^{t,t_0}\cdot 2i\pi,$$

wo im ersten Gliede rechter Hand der Wert der Ableitung von P_{t,t_0} im Punkte s gemeint ist. Das Resultat können wir in die Gestalt kleiden:

$$\left(\frac{dP_{t,t_0}}{du_s}\right)_{s=s} + \frac{ds'}{du_s} Z_s^{t,t_0} = -\frac{1}{2i\pi}\left(\eta_1 \Omega_2^{(t,t_0)} - \eta_2 \Omega_1^{(t,t_0)}\right).$$

Während nun hier Z_s immer das besondere Integral (13) S. 149 ist, verstehen wir bisher unter P_{t,t_0} irgendein Elementarintegral dritter Gattung (vgl. (8) S. 145). Wählen wir jetzt das besondere Integral (14) S. 149, so wird die linke Seite der letzten Gleichung:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s,t)\, du_t + \frac{ds'}{du_s} Z_s^{(t,t_0)};$$

dieser Ausdruck ist aber wegen (13) S. 149 mit Rücksicht auf die Symmetrie von $\Phi(s,t)$ in beiden Argumenten gleich 0, so daß für die Perioden des Integrals (14) S. 145:

$$\eta_1 \Omega_2^{(t,t_0)} - \eta_2 \Omega_1^{(t,t_0)} = 0$$

gilt. Ziehen wir noch die Relation (7) heran, so sind die Ω_1, Ω_2 berechenbar. Mit Benutzung der Legendreschen Relation (6) findet man: *Die Perioden des besonderen durch die Gleichung* (14) *S. 145 gegebenen Elementarintegrals dritter Gattung lassen sich durch die Perioden des Normalintegrals zweiter Gattung und das Integral erster Gattung so darstellen:*

(9) $$\Omega_1^{(t,t_0)} = -\eta_1 u^{t,t_0}, \qquad \Omega_2^{(t,t_0)} = -\eta_2 u^{t,t_0},$$

wo das rechts stehende Integral längs der Linie L_t zu erstrecken ist.

§ 9. Die transzendent normierten Integrale zweiter und dritter Gattung.

Ein Elementarintegral zweiter oder dritter Gattung ist durch seinen bzw. seine beiden singulären Punkte nur erst bis auf ein additives Integral erster Gattung bestimmt. Wir können dieses letztere Integral in

einer und nur einer Weise so wählen, daß die *zweite* Periode des in dieser Art abgeänderten Integrales verschwindet. Das so zu gewinnende Integral soll als ein „*transzendent normiertes Elementarintegral*“ bezeichnet werden, im Gegensatz zu den „algebraisch normierten“ Integralen von § 7.

Bei der zweiten Gattung halten wir an dem besonderen Integrale (13) S. 149 als dem zuerst gegebenen Z_t^{z,z_0} fest. *Das transzendent normierte, durch Angabe von t eindeutig bestimmte Elementarintegral* $\bar{Z}_t^{z,z_0}$ *unserer zerschnittenen Fläche* F_2[1]) *ist dann einfach durch:*

(1) $$\bar{Z}_t^{z,z_0} = Z_t^{z,z_0} - \frac{du_t}{dt'} \cdot \frac{\eta_2}{\omega_2} u^{z,z_0}$$

gegeben, und seine Perioden sind:

(2) $$\frac{du_t}{dt'} \cdot \bar{\eta}_1 = -\frac{du_t}{dt'} \cdot \frac{2i\pi}{\omega_2}, \qquad \frac{du_t}{dt'} \cdot \bar{\eta}_2 = 0,$$

wie man mit Hilfe von (6) S. 160 leicht feststellt.

Bei der dritten Gattung knüpfen wir wieder an ein beliebiges Integral P_{t,t_0}^{z,z_0} an. *Das transzendent normierte, durch Angabe von t und* t_0 *eindeutig bestimmte Elementarintegral* $\bar{P}_{t,t_0}^{z,z_0}$ *unserer zerschnittenen* F_2 *ist dann:*

(3) $$\bar{P}_{t,t_0}^{z,z_0} = P_{t,t_0}^{z,z_0} - \frac{\Omega_2^{(t,t_0)}}{\omega_2} u^{z,z_0}$$

und seine Perioden sind:

(4) $$\bar{\Omega}_1^{(t,t_0)} = \frac{2i\pi}{\omega_2} u^{t,t_0}, \quad \bar{\Omega}_2^{(t,t_0)} = 0,$$

wie unter Benutzung von (7) S. 161 leicht folgt.

Man bilde nun die Gleichung (8) S. 161 für die beiden transzendent normierten Integrale $\bar{P}_{t,t_0}$ und $\bar{P}_{s,s_0}$. Dann sind die beiden Perioden $\bar{\Omega}_2^{(t,t_0)}$ und $\bar{\Omega}_2^{(s,s_0)}$ gleich 0, so daß aus (8) S. 161:

(5) $$\bar{P}_{t,t_0}^{s,s_0} = \bar{P}_{s,s_0}^{t,t_0}$$

folgt: *Für das transzendent normierte Integral dritter Gattung gilt der „Satz von der Vertauschbarkeit der Argumente und Parameter“* (s. S. 150).

Dieser Satz bleibt erhalten für alle Integrale:

(6) $$P_{t,t_0}^{z,z_0} = \bar{P}_{t,t_0}^{z,z_0} + C \cdot u^{t,t_0} u^{z,z_0},$$

unter C eine von z und t unabhängige Konstante verstanden, und, wie man leicht zeigt, auch nur für diese. Für das besondere Integral (14) S. 149 galt der fragliche Satz der Vertauschbarkeit, so daß sich dieses

1) Man beachte wohl, daß die transzendente Normierung sich auf die Auswahl des Querschnittsystems Q_1, Q_2 stützt.

Integral unter den in (6) dargestellten finden muß. Es sind aber die Perioden des Integrales (6):

$$\left(\frac{2i\pi}{\omega_2} + C\omega_1\right) u^{t, t_0}, \quad C\omega_2 u^{t, t_0}.$$

Dieselben werden zufolge (6) S. 160 in der Tat mit den Größen (9) S. 162 identisch, wenn man $C = -\frac{\eta_2}{\omega_2}$ setzt: *Das besondere Integral* (14) S. 149 *hängt mit dem transzendent normierten Elementarintegral dritter Gattung* $\overline{P}_{t, t_0}^{z, z_0}$ *unserer zerschnittenen* F_2 *in folgender Weise zusammen:*

(7) $$P_{t, t_0}^{z, z_0} = \overline{P}_{t, t_0}^{z, z_0} - \frac{\eta_2}{\omega_2} u^{t, t_0} u^{z, z_0}.$$

Zweites Kapitel.

Das elliptische Integral erster Gattung erster Stufe und die durch dasselbe vermittelten Abbildungen.

Unter den elliptischen Integralen der vorgelegten Riemannschen Fläche F_2 nahm das Integral erster Gattung u insofern eine besondere Stellung ein, als es bis auf eine multiplikative und eine additive Konstante *eindeutig* bestimmt war. Die dieserhalb einzigartige Funktion u der F_2 wird nun alsbald in den Mittelpunkt unserer Beobachtungen treten; ihr hervorragender Wert beruht auf der Einfachheit und Übersichtlichkeit der konformen Abbildung, welche sie von der F_2 vermittelt. Mit dieser besonderen Funktion u werden wir uns demnach zunächst ausführlicher zu beschäftigen haben.

§ 1. Das Feld F_∞ der Funktion $u(z)$ und seine Abbildung auf die u-Ebene bei Gebrauch spezieller Querschnitte.

Die Funktion $u(z) = u^{z, \infty}$ setzen wir in der Gestalt (1) S. 152 als Normalintegral erster Gattung erster Stufe gegeben voraus. Diese Funktion hat die beiden grundlegenden Eigenschaften, bei Fortsetzung über die F_2 hin überall endlich zu bleiben und eine überall endliche und von Null verschiedene Ableitung $\frac{du}{dz}$ zu besitzen. Aus letzterer Tatsache zogen wir bereits S. 144 die Folgerung, daß die Abbildung der Umgebung irgendeiner Stelle der F_2 (auch diejenige der zweiblättrigen Umgebung eines Verzweigungspunktes) stets einen schlichten, den Bildpunkt der u-Ebene rings umgebenden Bereich liefert.

Demgegenüber hat z. B. das Integral zweiter Gattung Z_t erstlich einen Pol, nämlich an der Stelle t; und anderseits hat $\frac{dZ_t}{dz}$ zwei Nullpunkte auf der F_2, deren Umgebungen demnach bei Abbildung der F_2

auf die Z_t-Ebene zweiblättrige Verzweigungspunkte liefern (vgl. S. 35). Das Integral $u(z)$ erster Gattung verdient infolge seiner genannten einfachen Eigenschaften in der Tat den Vorrang vor den sonst noch auf der F_2 betrachteten Funktionen.

Wir stellen nunmehr genauer die Vieldeutigkeit der Funktion $u(z)$ und damit das Feld F derselben über der z-Ebene fest; hierbei werden die allgemeinen Entwicklungen von S. 7ff. und, was die Definition des Feldes F angeht, die Festsetzungen von S. 24 ff. maßgeblich sein. Das Querschnittsystem Q_1, Q_2 sei vorerst beliebig gewählt. Beschränken wir z auf die zerschnittene F_2, so erhalten wir Integralwerte $u(z)$, welche den ersten „Zweig" unserer Funktion aufbauen.

Wir gestatten jetzt dem z freie Beweglichkeit auf der F_2 über die Quersschnitte hinweg und beschreiben von einer Stelle z mit dem Werte u des ersten Zweiges eine auf der F_2 geschlossene Bahn C nach dieser Stelle zurück. Unsere Funktion setzt sich längs C stetig und eindeutig fort und möge am Schlusse den Zweig $u'(z)$ liefern, der bis auf eine additive Konstante gleich dem Anfangszweige $u(z)$ ist. Diese Konstante läßt sich aber nach unseren Festsetzungen über die Wertdifferenzen des Anfangszweiges $u(z)$ längs der Ufer der Querschnitte Q_1, Q_2 (vgl. S. 158) leicht angeben. Man erkennt sofort: Durch eine erste Überschreitung von Q_2 von rechts nach links gelangt man bei stetiger Fortsetzung des u vom Anfangszweige aus zum Zweige $u' = u + \omega_1$, usw. Allgemein gilt: *Überschreitet der Weg C den Schnitt Q_2 m_1 Male öfter von rechts nach links als umgekehrt*[1]), *den Querschnitt Q_1 aber m_2 Male öfter von links nach rechts als in entgegengesetzter Richtung, so ist die Beziehung zwischen dem Schlußzweige $u'(z)$ und dem anfänglichen:*

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \tag{1}$$

Umgekehrt können wir, wenn ein beliebiges Paar ganzer Zahlen m_1, m_2 vorgelegt ist, sofort einen Weg C angeben, welcher vom Anfangszweige u zum zugehörigen Zweige (1) hinführt. Die Vieldeutigkeit der Funktion $u(z)$ ist also einfach die, *daß ihre unendlich vielen Zweige eindeutig allen unendlich vielen Paaren m_1, m_2 ganzer Zahlen zugeordnet sind,* wobei der symbolisch etwa durch (m_1, m_2) zu bezeichnende Zweig der Funktion mit dem Anfangszweige durch die Relation (1) zusammenhängt.

Wollen wir daraufhin das Feld F_∞ der analytischen Funktion $u(z)$ herstellen, d. h. nach S. 24ff. diejenige Riemannsche Fläche F_∞ konstruieren, in welcher $u(z)$ eine eindeutige Funktion der Stelle ist, so

1) Hierbei darf natürlich die ganze Zahl m_1 (sowie die gleich zu nennende Zahl m_2) auch gleich 0 oder negativ sein.

müssen wir für jeden Zweig (m_1, m_2) ein etwa durch $F_2^{(m_1, m_2)}$ zu bezeichnendes besonderes Exemplar der „zerschnittenen“ F_2 zur Verfügung stellen und diese unendlich vielen Exemplare sodann nach folgender einfachen Regel längs der Querschnittufer zusammenheften: An das linke Ufer Q_1 des Exemplars $F_2^{(m_1, m_2)}$ ist allemal das rechte Ufer Q_1 von $F_2^{(m_1, m_2+1)}$ zu heften; desgleichen ist an das linke Ufer Q_2 von $F_2^{(m_1, m_2)}$ stets das rechte Ufer Q_2 vom Exemplar $F_2^{(m_1-1, m_2)}$ zu heften.

Das so zu gewinnende *Feld* F_∞ *der analytischen Funktion* $u(z)$ stellt *eine* ∞*-blättrige Riemannsche Fläche über der z-Ebene dar, welche nirgends einen Rand besitzt und keine anderen Verzweigungspunkte aufweist, als je die vier, welche dem einzelnen Exemplar* $F_2^{(m_1, m_2)}$ *eigen sind.* Die vier Randkurven (Querschnittufer) des einzelnen Exemplars bilden ja die Übergangslinien zu den vier benachbarten Exemplaren $F_2^{(m_1, m_2 \pm 1)}$, $F_2^{(m_1 \pm 1, m_2)}$. Auch die Kreuzungsstellen der Q_1, Q_2 liefern keine neuen Verzweigungspunkte. Führt man in der F_∞, etwa beginnend vom linken Ufer Q_2 des Exemplars $F_2^{(m_1, m_2)}$, einen Umlauf um diese Stelle aus, so gelangt man nach Durchschreiten der vier hier zusammenstoßenden Ecken der Exemplare $F_2^{(m_1, m_2)}$, $F_2^{(m_1, m_2-1)}$, $F_2^{(m_1-1, m_2-1)}$, $F_2^{(m_1-1, m_2)}$ und also nach *einmaligem* Umlauf zum Ausgangspunkte zurück.

Die wichtigste Eigenschaft des Feldes F_∞ ist nun aber die, *daß dasselbe einen Bereich von einfachem Zusammenhange darstellt.* Dies ist allerdings nicht ohne weiteres einleuchtend. Nun haben wir bei früheren Gelegenheiten (vgl. S. 49 und 65) den Blätterzusammenhang eines mehrblättrigen Feldes F einer analytischen Funktion $w = f(z)$ in höchst anschaulicher Weise dadurch klarlegen können, daß wir das konforme Abbild von F in der w-Ebene betrachteten. In den genannten Fällen reihten sich die *über* einander liegenden Blätter des Feldes F in der w-Ebene *neben* einander, wobei jener Blätterzusammenhang in einem übersichtlichen Bilde zutage trat. Wir wollen auch im vorliegenden Falle einen Versuch mit dieser Methode machen und also *das konforme Abbild des Feldes* F_∞ *auf die u-Ebene* untersuchen.

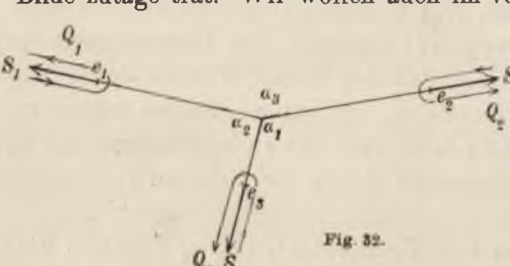


Fig. 32.

Um hierbei mit einer bestimmten Aufgabe zu tun zu haben, ist es nötig, besondere Querschnitte einzuführen. Die drei endlichen Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3 mögen zunächst nicht auf einer Geraden liegen; sie bilden dann ein nicht verschwindendes Dreieck, dessen Schwerpunkt der Nullpunkt $z = 0$ ist. Ziehen wir demnach die drei von $z = 0$ durch die Punkte e_i nach $z = \infty$ laufen-

den geradlinigen Strahlen, so werden diese (vgl. Fig. 32) drei Winkel α_i bilden, die einzeln im Intervall $0 < \alpha_i < \pi$ liegen. Die drei von e_i bis $z = \infty$ laufenden Teile dieser Strahlen benutzen wir als „Verzweigungsschnitte“ S_i beim Aufbau der F_2 und unterscheiden wieder bei S_i gemäß der gewählten Richtung (vgl. Fig. 32) ein rechtes und ein linkes Ufer.

Die Querschnitte Q_1, Q_2 mögen die in Fig. 32 angegebene Lage haben; der Verlauf in der Umgebung der Stelle $z = \infty$ ist in Fig. 33 dargestellt, wo zugleich der Kreuzungspunkt von Q_1 und Q_2 zu sehen ist. Soweit die Querschnitte im oberen Blatt verlaufen, sind sie in den Figuren ausgezogen; der Verlauf im unteren Blatte ist punktiert.

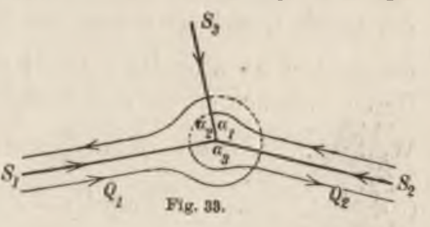


Fig. 33.

Man kann Q_i beiderseits unmittelbar an S_i heranziehen; dann setzt sich Q_i aus dem linken Ufer von S_i, von ∞ bis e_i zu durchlaufen, und dem rechten, von e_i bis ∞ zu beschreiben, zusammen. Da $\sqrt{f(z)}$ in gegenüberliegenden Uferpunkten von S_i entgegengesetzte Werte hat, so finden wir unter Gebrauch einer bereits S. 159 benutzten Bezeichnungsweise:

$$\text{(2)} \qquad \tfrac{1}{2}\omega_i = \int\limits_{(-S_i)} du_z = \int\limits_{(+S_i)} du_z;$$

denn diese beiden Integrale sind einander gleich, und ihre Summe ist gleich ω_i.

Der Symmetrie halber führen wir noch den dritten, bereits in Fig. 32 angedeuteten geschlossenen Weg Q_3 ein, welcher den Integralwert ω_3 liefere; Gleichung (2) ist dann auch für $i = 3$ gültig. Ziehen wir die drei Wege Q_i nur erst bei $z = \infty$ unmittelbar an den hier liegenden Verzweigungspunkt heran, so können wir sie, wie Fig. 34 andeutet, zu einem geschlossenen Wege C aneinanderhängen, welcher (vgl. Fig. 34) im oberen Blatte der F_2 stetig und ohne Zerreißen auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Es gilt demnach:

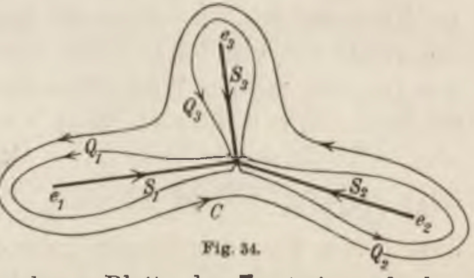


Fig. 34.

$$\text{(3)} \qquad 0 = \int\limits_{(C)} du_z = \int\limits_{(Q_1)} du_z + \int\limits_{(Q_2)} du_z + \int\limits_{(Q_3)} du_z = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

so daß $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$ zutrifft.

Das obere Blatt der F_2, welches wir zunächst auf die u-Ebene abbilden wollen, wird durch die drei von $z = 0$ durch die Punkte e_i nach

$z = \infty$ gezogenen Strahlen in drei Zweiecke (z-Kugel!) zerlegt, die wir ihren Winkeln entsprechend mit (α_i) benennen. In Fig. 32 ist α_3 weder $< \alpha_1$, noch $< \alpha_2$; wir beginnen unter dieser Voraussetzung mit (α_3) und wählen die untere Grenze des Integrals $u^{z, \infty}$ in der Ecke ∞ von (α_3). Wir schreiben:

$$(4) \qquad du = \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

und verstehen unter Amp (z) die Amplitude der komplexen Zahl z. Längs der durch e_2 ziehenden Seite des Zweiecks (α_3) ist Amp (dz) konstant; desgleichen ist Amp $\left((z-e_2)^{-\frac{1}{2}}\right)$ längs S_2^l konstant, ebenfalls längs des Restes zwischen e_2 und dem Nullpunkt, jedoch ist der letztere konstante Wert Amp $\left((z-e_2)^{-\frac{1}{2}}\right)$ um $\frac{\pi}{2}$ kleiner als der erste. Endlich ändert sich

$$(5) \qquad \text{Amp}\left((z-e_1)^{-\frac{1}{2}}(z-e_3)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

falls z die fragliche Seite von (α_3) stetig von ∞ bis 0 beschreibt, gleichfalls stetig und beständig in demselben Sinne, wobei man den Gesamtzuwachs von (5) leicht zu $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)$ berechnet. Ist also $\alpha_1 = \alpha_3$, so ist auch die Amplitude (5) konstant; ist $\alpha_3 > \alpha_1$, so findet eine Abnahme statt, und zwar um den Gesamtbetrag $\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$, den man in Fig. 32 leicht konstruieren kann und der jedenfalls $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Nun folgt aus (4):

$$\text{Amp}(du) = \text{Amp}(dz) + \text{Amp}\left((z-e_2)^{-\frac{1}{2}}\right) + \text{Amp}\left((z-e_1)^{-\frac{1}{2}}(z-e_3)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das Abbild der Seite von (α_3) besteht sonach aus zwei stetig gekrümmten Kurvenstücken, von denen das erste von $u = 0$ nach $u = \frac{1}{2}\omega_2$ zieht, das zweite von hier bis zu einem bestimmten Punkte $u(0)$, und die bei $u = \frac{1}{2}\omega_2$ unter rechtem Winkel zusammenstoßen. Insbesondere sind beide Stücke für $\alpha_3 = \alpha_1$ gerade; für $\alpha_3 > \alpha_1$ sind sie gegen das zu konstruierende Abbild des Zweiecks (α_3) konkav, und ihre „Gesamtbiegung" beträgt $\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ und ist jedenfalls $< \frac{\pi}{2}$. Es ist einleuchtend, daß sich diese beiden Stücke in keinem Falle überkreuzen können.

Genau so behandle man die zweite Seite des Zweiecks (α_3), wobei zu benutzen ist, daß α_3 nicht $< \alpha_2$ sein sollte. Das rechte Ufer von S_1 liefert ein stetig gekrümmtes Kurvenstück, das sich bei $u = 0$ unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha_3 < \frac{\pi}{2}$ an das Bild der ersten Seite von (α_3) ansetzt und bis $u = -\frac{1}{2}\omega_1$ reicht. Hier setzt sich unter einem rechten Winkel ein zweites stetig gekrümmtes Kurvenstück an, welches bis zu dem schon gewonnenen Punkte $u(0)$ reichen muß und dort mit dem Abbilde der ersten Seite von (α_3) den Winkel α_3 bildet. Die Stücke sind für

$\alpha_3 = \alpha_2$ gerade; für $\alpha_3 > \alpha_2$ sind sie gegen das zu konstruierende Abbild konkav und haben eine Gesamtbiegung vom Betrage $\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2) < \frac{\pi}{2}$. Auch diese beiden Stücke können sich somit keinesfalls kreuzen.

Es tritt nun die Frage auf, ob das als Abbild des Randes von (α_3) gewonnene Kurvenviereck ein gewöhnliches ist oder vielleicht ein überschlagenes Viereck mit Seitenkreuzungen sein könnte. Um hierüber zu entscheiden, lassen wir eine Tangente vollständig um das Viereck herumlaufen, deren Richtungsänderungen dann die Biegungen messen. Die plötzlichen Richtungsänderungen in den vier Ecken sind alsdann als unstetige Zuwüchse der Biegung um endliche Beträge mitzurechnen. Die gesamte Richtungsänderung beim vollen Umlauf der Tangente ist:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1) + \tfrac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \tfrac{1}{2}\alpha_3) = 2\pi.$$

Es handelt sich also um ein gewöhnliches Kurvenviereck ohne Seitenkreuzungen.

Während nun die in Rede stehende Abbildung von (α_3) auf die u-Ebene in den Punkten $z = \infty$, e_1, e_2 in bekannter Weise aufhört konform zu sein, ist sie an allen übrigen Stellen, insbesondere also in allen Innenpunkten z von (α_3) konform mit dem Abbildungsmodulus (Vergrößerungsverhältnis):

$$\left|\frac{du}{dz}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}\right|. \tag{6}$$

Die Umgebung jedes Innenpunktes liefert also (wie wir ja schon früher feststellten) ein schlichtes und vollbedecktes Abbild um den Bildpunkt u. Der einfach zusammenhängende Bereich (α_3) ergibt somit als stetiges eindeutiges Abbild wieder einen einfach zusammenhängenden Bereich der u-Ebene, der in unser Kurvenviereck nach innen hin eingespannt ist und jeden seiner Innenpunkte in dessen nächster Umgebung schlicht und vollständig umgibt.

Aus diesen Voraussetzungen läßt sich leicht mit voller Strenge der Schluß ziehen, *daß die schlichte und vollständige Innenfläche des gewonnenen Kurvenvierecks das Abbild des Zweiecks* (α_3) *ist.* Die Umgebungen der drei Punkte $z = \infty$, e_1, e_2 des Zweiecks (α_3) sind jedenfalls schlicht auf drei Sektoren an den Ecken $u = 0, -\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2$ der Vierecksfläche abgebildet. Wir schneiden jene Umgebungen aus und nennen den Restbereich (in Fig. 35 schraffiert) B_z; entsprechend schneiden wir von der Vierecksfläche die drei Sektoren

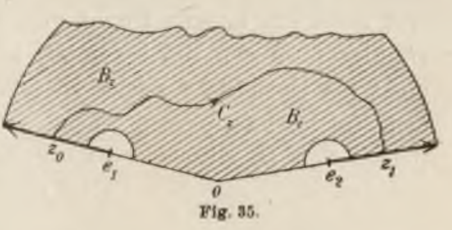


Fig. 35.

ab, worauf von dieser Fläche der Bereich B_u (in Fig. 36 schraffiert) übrig bleibt. Das konforme Abbild von B_z ist dann jedenfalls in den Rand von B_u nach innen hin eingespannt. Im übrigen besteht der Vorteil, daß wir im ganzen Bereiche B_z für den Abbildungsmodul (6) zwei von 0 verschiedene positive endliche Schranken m und M angeben können:

Fig. 36

$$m < \left|\frac{du}{dz}\right| < M. \tag{7}$$

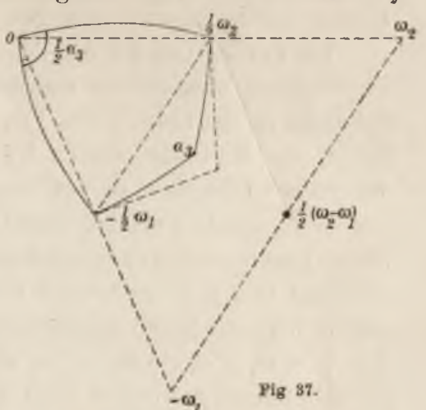
Man wolle nun, wie Fig. 36 näher darlegt, von einem Randpunkte u_0 des Bereiches B_u eine reguläre, sich selbst nicht kreuzende Kurve C_u durch B_u hindurch nach einem zweiten Randpunkte u_1 ziehen und versuche C_u rückwärts auf B_z zu übertragen. Jedenfalls beginnt das Abbild C_z in dem u_0 korrespondierenden Randpunkte z_0 (vgl. Fig. 35) und führt zunächst in das Innere von B_z. Solange wir bei der Übertragung einem inneren Punkte u von C_u einen Innenpunkt z von B_z entsprechend finden, ist die Fortsetzung der Abbildung stets eindeutig bestimmt; denn die Umgebungen dieser beiden Punkte z und u sind eindeutig und konform aufeinander bezogen. Auch liefert die Zurücklegung eines Bogenstücks endlicher Länge s_u von C_u, solange sich das Abbild in B_z und also das Stück der Kurve C_u im konformen Abbilde des Bereiches B_z auf der u-Ebene befindet, stets wieder einen Bogen endlicher Länge s_z, für welche man ja aus (7) sofort die Ungleichungen gewinnt:

$$M^{-1}s_u < s_z < m^{-1}s_u.$$

Nun ist aber folgendes einleuchtend. Erstlich kann bei Weiterführung der Abbildung von C_u kein *innerer* Punkt dieser Kurve einen Randpunkt von B_z liefern; denn u ist in B_z eindeutig, und die Bilder der Randpunkte von B_z liegen bereits auf dem Rande von B_u fest. Wir können demnach die Abbildung eindeutig bis zum Endpunkte u_1 von C_u fortführen. Sodann muß aber dieser Endpunkt notwendig den entsprechenden Randpunkt z_1 liefern. Würde nämlich der u_1 entsprechende Punkt z_1 erst noch ein innerer Punkt von B_z sein, so würde das Abbild von B_z hier über den Rand von B_u hinausreichen.[1]) Da aber das Abbild nicht ins Unendliche reicht, so müßten wir draußen noch einen Rand, dem Rande von B_z entsprechend, treffen; jedoch bildeten wir alle Randpunkte von B_z mittels der eindeutigen Funktion u bereits ab, nämlich auf den Rand von B_u. Es ist somit z_1 sicher ein Randpunkt von B_z;

1) Dann würde natürlich das Abbild hier mehrblättrig sein. Einfach zusammenhängende Bereiche können auch ohne inneren Verzweigungspunkt an sich sehr wohl Teile der Ebene mehrfach bedecken.

und daß er der dem Randpunkt u_1 entsprechende Randpunkt sein muß, ist wieder eine leichte Folge der Eindeutigkeit von u im Bereiche B_z.


Fig. 37.

Wir stellen weiter fest, daß sich die Kurve C_z nicht selbst überkreuzen kann; denn dem Kreuzungspunkte entsprächen zwei verschiedene u. Aus demselben Grunde werden zwei Kurven C_u und C'_u unserer Art (vgl. Fig. 36), die keinen Punkt gemeinsam haben, Abbilder der C_z und C'_z liefern, die gleichfalls keinen Punkt gemein haben.

Man überspanne nun B_u mit einer geeigneten Kurvenschar, etwa mit einer Schar paralleler Geraden oder auch mit einer Schar konzentrischer Kreise des Mittelpunktes $u = 0$, und diskutiere auf Grund der bisherigen Ergebnisse deren Abbilder auf B_z. Es ist jetzt einleuchtend, daß diese Abbilder B_z schlicht und vollständig bedecken müssen. Damit aber ist unsere Behauptung, das Abbild des Zweiecks (α_3) sei die schlichte Innenfläche unseres Kurvenvierecks, vollständig bewiesen.

Die in Fig. 37 punktierten Verbindungsgeraden der Eckpunkte $-\frac{1}{2}\omega_1$, 0 und $\frac{1}{2}\omega_2$ des Abbildes von (α_3) haben (vgl. (3) S. 167) die Längen $\frac{1}{2}|\omega_1|$, $\frac{1}{2}|\omega_2|$, $\frac{1}{2}|\omega_3|$. Die dritte Seite durchzieht sicher das Innere des Abbildes; dasselbe gilt von den beiden ersten Seiten, sofern sie nicht (für $\alpha_3 = \alpha_1$ bzw. $\alpha_3 = \alpha_2$) einen Bestandteil vom Rande des Abbildes liefern sollten. Es folgt, *daß das punktierte Dreieck der Eckpunkte* $-\frac{1}{2}\omega_1$, 0, $\frac{1}{2}\omega_2$ *notwendig spitzwinklig ist,* was wir unten weiter verfolgen.

Zuvörderst wollen wir eine kleine Veränderung der Verzweigungsschnitte S_1 und S_2 vornehmen, indem wir nämlich, sofern die beiden von $u = 0$ ausziehenden Seiten unseres eben besprochenen Dreiecks nicht am Rande des Abbildes von (α_3) liegen, diese Seiten auf die z-Ebene zurück abbilden und diese Abbilder fortan als Verzweigungsschnitte S_1, S_2 gebrauchen wollen. Fig. 38 veranschauliche die Lage dieser neuen Schnitte. Die Querschnitte Q_i ziehen wir wieder an diese neuen Schnitte dicht heran; das rechte Ufer von Q_i setzt sich dann aus den beiden Ufern von S_i im oberen Blatte, das linke aus den Ufern von S_i im unteren Blatte

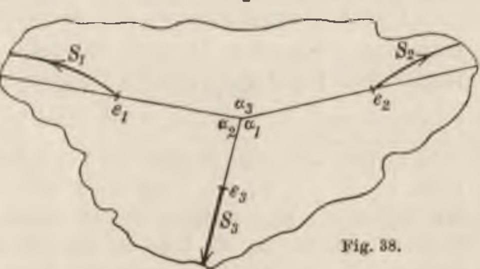


Fig. 38.

der F_2 zusammen. Diese Angaben beziehen sich nur auf $i = 1$ und 2; S_3 behalten wir in der bisherigen Gestalt bei und denken längs S_3 beide Blätter der F_2 zusammenhängend.

Bei Fortsetzung der Abbildung der zerschnittenen F_2 auf die u-Ebene ist zunächst unmittelbar einleuchtend, daß das rechte Ufer des neuen Schnittes S_2 die *Gerade* von $\frac{1}{2}\omega_2$ bis ω_2 liefert, so daß die Gerade von 0 bis ω_2 das Bild des rechten Ufers von Q_2 ist. Ebenso überträgt sich das rechte Ufer von Q_1 auf die der Querschnittrichtung entsprechend von $-\omega_1$ bis 0 ziehende Gerade. Um sogleich auch die im unteren Blatte liegenden linken Querschnittsufer, die mit den schon abgebildeten rechten Ufern den Gesamtrand der zerschnittenen F_2 bilden, zu erledigen, ziehen wir auch noch die Gerade von $-\omega_1$ nach ω_2, deren Mittelpunkt $u = \frac{1}{2}(-\omega_1 + \omega_2) = \omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3$ als Bildpunkt von e_3 bei der Fortsetzung der Abbildung gewonnen wird.[1]) Vom Verzweigunspunkte e_3 mit dem Integralwerte $\frac{1}{2}(-\omega_1 + \omega_2)$ beschreibe man nun in beiden Blättern genau übereinanderliegende Integrationswege, zunächst vielleicht geradlinig bis $z = 0$, dann (um beide Querschnitte zu erreichen) einmal geradlinig nach e_2, andererseits ebenso nach e_1. Die einander entsprechenden in beiden Blättern hinzukommenden Integralwerte sind dabei stets einander entgegengesetzt. Wir erkennen sofort, daß die Bilder der linken Querschnittufer den schon gewonnenen Bildern der rechten Ufer bezüglich des Punktes $u = \frac{1}{2}(-\omega_1 + \omega_2)$ diametral sind: *Der Rand der zerschnittenen* F_2 *wird durch den in dieser* F_2 *eindeutig erklärten „ersten Zweig“* $u(z)$ *auf die vier Seiten des geradlinigen Parallelogramms der Ecken* $u = 0, -\omega_1, -\omega_1 + \omega_2, \omega_2$ *abgebildet.* Je zwei homologe Punkte u und $u \pm \omega_i$ zweier Gegenseiten des Parallelogramms entsprechen dabei einem Paare gegenüberliegender Uferpunkte am zugehörigen Querschnitt, ein Ergebnis, das in Übereinstimmung ist mit dem, was wir bereits oben (S. 165) über die Wertdifferenzen des „einzelnen Zweiges“ u längs jedes Querschnittes feststellten.

Das konforme Abbild der zerschnittenen F_2, welche einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt, auf die u-Ebene ist nun in den Rand des Parallelogrammes eingespannt, umgibt jede innere Stelle schlicht und vollständig und reicht nirgends ins Unendliche. Dabei

1) Wie auch im übrigen die Lagenverhältnisse sein mögen, sicher ist, daß dieser Punkt $\frac{1}{2}(-\omega_1 + \omega_2)$ *außerhalb* des schon konstruierten Abbildes vom Zweieck (α_3) liegt. Man errichte in den Seitenmitten $-\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$ des geradlinigen Dreiecks $0, -\omega_1, \omega_2$ die Lote zu den Seiten (vgl. Fig. 37), so werden diese Lote außerhalb jenes Abbildes liegen oder doch nur auf dem Rande, nämlich wenn $\alpha_1 = \alpha_3$ bzw. $\alpha_2 = \alpha_3$ zutrifft. Erinnert man sich jetzt noch, daß jenes geradlinige Dreieck „spitzwinklig“ ist, so ist die Behauptung über die Lage des Bildpunktes von e_3 evident.

entspricht selbstverständlich dem einzelnen Punkte des Bereiches F_2 stets nur wieder ein Punkt u. Die vorhin für den Bereich (α_3) und sein Abbild durchgeführte Überlegung ist hier ohne Schwierigkeit zu wiederholen, wobei man sich sehr wohl, wenn es die Anschauung erleichtert, F_2 als zerschnittene Ringfläche (vgl. S. 88), ja selbst als Viereck der Fig. 22, S. 89 vorstellen mag. Wir erhalten das grundlegende Resultat: *Unsere längs der Schnitte S_1, S_2 der Fig. 38 durchschnittene F_2 wird durch den „Anfangszweig" $u(z)$ konform auf die schlichte und vollständig bedeckte Innenfläche des geradlinigen Parallelogrammes der Ecken $u = 0, -\omega_1, -\omega_1 + \omega_2, \omega_2$ abgebildet, welches in dem hier zunächst vorausgesetzten Falle dreier nicht in einer Geraden liegenden Punkte e_i durch die von $-\omega_1$ nach ω_2 reichende Diagonale in zwei spitzwinklige Dreiecke zerlegt wird.*

Ehe wir zum Felde F_∞ zurückkehren, bleibt der besonders einfache Fall dreier in einer Geraden liegenden Punkte e_2 zu erledigen. Es handelt sich hierbei nicht um einen Ausnahmefall, sondern um einen Grenzfall der bisherigen Betrachtung, was leicht figurlich näher erläutert werden kann. Im Grenzfalle verschwindet einer der drei Winkel α_i, während die beiden anderen gleich π werden. Es liegt den Maßverhältnissen der Fig. 32, S. 166 am nächsten, wenn wir $\alpha_2 = 0$ setzen, wobei sich dann die Verzweigungsschnitte S_1 und S_3, soweit sie zur Deckung kommen, aufheben. Die eintretenden Verhältnisse

Fig. 39.

erläutert Fig. 39, in der wir jedoch, ehe wir zur Abbildung schreiten, die Querschnitte wieder unmittelbar an die Verzweigungspunkte und an die Gerade durch die Punkte e_i heranziehen. Diese Gerade zerlegt jedes der Blätter in zwei Halbblätter; der bequemen Ausdrucksweise halber wollen wir, wie Fig. 39 zeigt, zwei untereinanderliegende Halbblätter mit einer Schraffierung versehen.

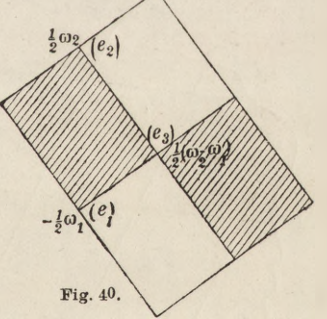


Fig. 40.

Der Rand des schraffierten oberen Halbblattes wird nun durch u auf vier Gerade abgebildet, die unter rechten Winkeln zusammenstoßen und also ein Rechteck bilden; die Ecken $u = 0, \frac{1}{2}\omega_2, -\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2, -\frac{1}{2}\omega_1$ entsprechen in dieser Reihenfolge den Randpunkten $z = \infty, e_2, e_3, e_1$ des Halbblattes (vgl. Fig. 40).[1]) Die Fläche des Halbblattes bildet sich dann wieder konform auf die schlichte und vollständige

1) Übrigens haben wir weder hier noch im allgemeinen Falle auf eine richtige Orientierung des Abbildes gegen das Original in den Figuren Gewicht gelegt.

Innenfläche des Rechtecks ab. Längs der Strecke e_2, e_3 fügt sich das nicht schraffierte obere Halbblatt an, das man leicht auf das in Fig. 40 freigelassene Rechteck der Ecken $\frac{1}{2}\omega_2$, ω_2, $-\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2$, $-\frac{1}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2$ überträgt. Endlich gelangen wir über den Verzweigungsschnitt e_1, e_3 in die beiden unteren Halbblätter, denen die beiden weiteren Teilrechtecke der Fig. 40 entsprechen. *Der obige Abbildungssatz über die zerschnittene* F_2 *gilt also auch hier, nur mit der Besonderheit, daß das Parallelogramm der Ecken* $u=0$, ω_2, $-\omega_1+\omega_2$, $-\omega_1$ *jetzt ein Rechteck ist.*

Das gewonnene Parallelogramm, das wir fortan als „*Periodenparallelogramm*" der u-Ebene bezeichnen, ist das Abbild der F_2 durch den Anfangszweig der unendlich vieldeutigen Funktion $u(z)$; wir können auch sagen, es sei das durch $u(z)$ gelieferte Abbild des ersten Exemplars $\mathsf{F}_2^{(0,0)}$ vom Felde F_∞ dieser Funktion. Gehen wir jetzt über Q_1 in das benachbarte Exemplar $\mathsf{F}_2^{(0,+1)}$, so gehört diesem der Zweig $u'=u+\omega_2$ an; und also ist das Abbild dieses Exemplars $\mathsf{F}_2^{(0,+1)}$ durch die zugehörigen Werte der Funktion u das mit dem ersten kongruenten Parallelogramm der Ecken ω_2, $2\omega_2$, $-\omega_1+2\omega_2$, $-\omega_1+\omega_2$, welches sich längs der von ω_2 nach $-\omega_1+\omega_2$ ziehenden Seite, dem überschnittenen Querschnitt Q_1 entsprechend, glatt an das erste Parallelogramm anfügt. Bei Fortsetzung des Verfahrens findet man allgemein als Abbild des Exemplars $\mathsf{F}_2^{(m_1,m_2)}$ das geradlinige Parallelogramm der Ecken:

$$u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2,\quad m_1\omega_1 + (m_2+1)\,\omega_2,$$
$$(m_1-1)\,\omega_1 + (m_2+1)\,\omega_2,\quad (m_1-1)\,\omega_1 + m_2\,\omega_2.$$

Alle diese Parallelogramme fügen sich glatt aneinander an (vgl. Fig. 41) und überspannen die ganze endliche u-Ebene schlicht und lückenlos mit einem „*Parallelogrammnetze*". Die Eckpunkte $u = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2$ heißen die „*Gitterpunkte*" des Netzes; sie entsprechen den Kreuzungspunkten der „Übergangslinien" Q_1, Q_2 im Felde F_∞ und bringen das oben schon festgestellte Ergebnis, daß je-

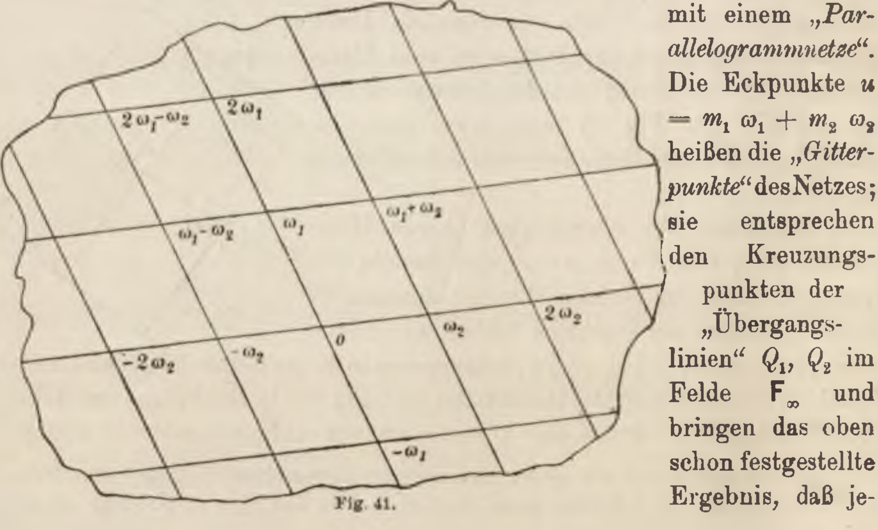


Fig. 41.

der solcher Kreuzungspunkt von vier Exemplaren F_2 umgeben ist, zur Anschauung. Wir gelangen zu dem fundamentalen Ergebnis: *Das Feld* F_∞ *der Funktion $u(z)$ wird durch ebendiese Funktion konform auf die schlicht und vollständig bedeckte u-Ebene, abgesehen vom einzigen Punkte $u = \infty$, abgebildet, wobei die unendlich vielen „übereinander" gelagerten Exemplare* F_2 *die „nebeneinander" geordneten Parallelogramme des beschriebenen Netzes liefern.*

Die Rolle des Punktes $u = \infty$ wolle man sich noch besonders veranschaulichen, und zwar entweder auf der „u-Kugel" oder mittelst der bekannten Transformation $u' = u^{-1}$. *Der Punkt $u = \infty$ ist bei analytischer Fortsetzung von $u(z)$ nie erreichbar; gleichwohl finden sich in „jeder" Umgebung des Punktes $u = \infty$ unendlich viele Parallelogramme des Netzes.*[1])

Es bedarf jetzt weiter keiner Erläuterung, *daß das Feld* F_∞ *in der Tat einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt;* am gewonnenen Abbilde des Feldes F_∞ ist diese Tatsache einleuchtend.

§ 2. Die Perioden ω_1, ω_2 und der Periodenquotient ω des reduzierten Querschnittsystems.

Wir hatten die Bezeichnungen so verteilt, daß der Winkel α_3 in Fig. 32 weder kleiner als α_1 noch kleiner als α_2 sein solle. Lassen wir diese Annahme zunächst fallen, so bleibt gleichwohl der Satz bestehen, daß das Dreieck der Ecken $0, -\omega_1, \omega_2$ und der Seitenlängen $|\omega_3|$, $|\omega_2|$, $|\omega_1|$ „spitzwinklig" und im Grenzfalle „rechtwinklig" ist. Es gelten also für alle Anordnungen i, k, l der drei Indizes 1, 2, 3 die Ungleichungen:

$$|\omega_i|^2 + |\omega_k|^2 \geqq |\omega_l|^2,$$

wobei natürlich das Gleichheitszeichen im Einzelfalle nur in einer dieser drei verschiedenen Bedingungen gelten kann.

Wir können diese drei Ungleichungen einer sehr wichtigen geometrischen Interpretation unterziehen, indem wir den Quotienten der Perioden ω_1, ω_2 einführen. *Dieser weiterhin durch ω zu bezeichnende „Periodenquotient" ist, wie aus den Figuren des vorigen Paragraphen hervorgeht, eine endliche, nicht reelle Größe; und zwar ist, wenn wir:*

$$(1) \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega = \xi + i\eta$$

setzen, bei der in den Figuren 32ff. bevorzugten Anordnung der Bezeichnungen e_1, e_2, e_3 für die Verzweigungspunkte, wie ein Blick auf die Figuren

1) In der u-Ebene selbst ist eine Umgebung von $u = \infty$ das Äußere eines Kreises mit irgendeinem endlichen Radius um $u = 0$.

lehrt, der von i befreite imaginäre Bestandteil von ω positiv: $\eta > 0$. Unter Benutzung der Relation $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$ schreiben sich nun die drei obigen Ungleichungen so um:

$$|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 \geqq |\omega_1 + \omega_2|^2,$$
$$|\omega_2|^2 + |\omega_1 + \omega_2|^2 \geqq |\omega_1|^2,$$
$$|\omega_1 + \omega_2|^2 + |\omega_1|^2 \geqq |\omega_2|^2;$$

sie liefern also in ξ, η die Bedingungen:

(2) $$0 \geqq \xi \geqq -1, \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi \geqq 0.$$

Zur geometrischen Interpretation führen wir jetzt die „ω-Ebene“ ein und lesen aus (2) den Satz ab: *Das auf der F_2 eingeführte Querschnittsystem liefert als Periodenquotienten ω eine bestimmte endliche komplexe Zahl, deren Bildpunkt dem in Fig. 42 stark umrandeten von zwei Halbgeraden und einem Halbkreise eingegrenzten Bereiche angehört.* Auf der „ω-Kugel“ stellt dieser Bereich ein „*Kreisbogendreieck*“ mit verschwindenden Winkeln in den Ecken $\omega = 0, -1, \infty$ dar; wir nennen demnach auch in der ω-Ebene den fraglichen Bereich ein „*Kreisbogendreieck*“, das mit seinen drei Spitzen die reelle ω-Achse in den Punkten $\omega = 0, -1, \infty$ erreicht. Wollen wir die Anlagerung des Dreiecks an die imaginäre ω-Achse zum Ausdruck bringen, so sagen wir auch wohl, die dritte Spitze reiche an den Punkt $\omega = i\infty$ heran.

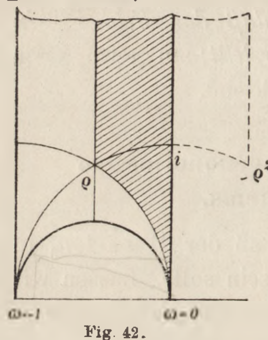


Fig. 42.

Da wir vorhin die oben gelegentlich benutzte Annahme $\alpha_3 \geqq \alpha_1$, $\alpha_3 \geqq \alpha_2$ zunächst fallen ließen, so ist unser Querschnittsystem Q_1, Q_2 *noch in drei Weisen wählbar*, insofern wir ja die Bezeichnungen e_1, e_2, e_3 der Verzweigungspunkte zyklisch permutieren können.[1]) Es läuft dies darauf hinaus, daß wir statt der Perioden ω_1, ω_2 entweder:

$$\omega_1' = \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1$$

oder aber:

$$\omega_1'' = \omega_2, \quad \omega_2'' = \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$$

als Perioden zu gebrauchen haben. Die drei zugehörigen, hiernach noch zulässigen Periodenquotienten:

(3) $$\omega, \quad \omega' = \frac{-\omega - 1}{\omega}, \quad \omega'' = \frac{1}{-\omega - 1}$$

1) An der Reihenfolge der Bezeichnungen der Punkte e_i bei einem Umlauf um $z = 0$ soll jedenfalls festgehalten werden. Würden wir die Bezeichnungen e_1 und e_2 austauschen und infolgedessen die Perioden $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$ gebrauchen, so würde, was sich in der Folge als unzweckmäßig erweisen würde, der Periodenquotient $\omega' = \omega_1' : \omega_2'$ eine komplexe Zahl mit *negativem* imaginären Bestandteil sein.

müssen natürlich alle drei ihre Bildpunkte in dem Kreisbogendreieck der Fig. 42 finden. In (3) haben wir aber zwei einander inverse lineare Substitutionen von ω vor uns, welche nach S. 128 als elliptisch von der Periode 3 zu bezeichnen sind. Sie bilden mit der identischen Substitution eine zyklische Gruppe dritter Ordnung und haben die beiden zur reellen ω-Achse symmetrisch liegenden Punkte:

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

für welche wir die schon S. 136 eingeführten Bezeichnungen ϱ und ϱ^2 wieder aufnehmen, zu Fixpunkten. Der eine dieser Punkte, nämlich ϱ, liegt im Innern des Kreisbogendreiecks der Fig. 42, und zwar gewissermaßen als „Höhenschnittpunkt" dieses Dreiecks, wenn wir nämlich als „Höhen" des Dreiecks die drei in Fig. 42 gezeichneten, gegen die reelle ω-Achse orthogonal gerichteten Kreise bezeichnen, welche von den Ecken des Dreiecks senkrecht zu den Gegenseiten laufen. Man mache sich deutlich, daß durch die Substitutionen (3) unser Kreisbogendreieck in der Tat in sich transformiert wird; es erscheint dabei um den Punkt $\omega = \varrho$ als Mittelpunkt gedreht, und zwar kommt der ersten Substitution (3) der Drehungswinkel $\frac{2\pi}{3}$, der zweiten aber der Drehungswinkel $\frac{4\pi}{3}$ zu.

Einer von den drei noch zur Auswahl stehenden Werten ω, ω', ω'' gehört hiernach immer dem in Fig. 42 schraffierten Drittel unseres Kreisbogendreiecks an. Zugleich findet sich in diesem Drittel auch nur einer der Punkte ω, ω', ω'', es sei denn, daß wir gerade mit drei Punkten zu tun haben, welche auf den drei von ϱ nach den Spitzen des Kreisbogendreiecks ziehenden Teilen der „Höhen" gelegen sind. Zwei von den drei Punkten ω, ω', ω'' liegen dann auf dem Rande des schraffierten Drittels, nämlich einer auf dem Kreisbogen von ϱ nach 0, ein zweiter auf der Geraden von ϱ nach $i\infty$. Um eine eindeutige Auswahl der Perioden vollziehen zu können, wollen wir unter den beiden hier in Frage kommenden Randkurven des schraffierten Bereiches zum Zwecke einer bequemen Sprechweise nur die Gerade von ϱ nach $i\infty$ als dem schraffierten Bereiche angehörig ansehen, die auf dem Kreissextanten zwischen ϱ und 0 gelegenen Randpunkte jenem Bereiche aber nicht als angehörige betrachten.

Die Grenzfälle mit Periodenrechtecken liefern Punkte ω auf der imaginären Achse. Indem wir uns vorbehalten, auf diese unten noch zurückzukommen, geben wir nun folgende Erklärung ab: *Um ein eindeutig bestimmtes Querschnittsystem Q_1, Q_2 zu gewinnen — wir wollen dasselbe als das „reduzierte Querschnittsystem" der* F_2 *und die zugehörigen*

ω_1, ω_2 *als das „reduzierte Periodenpaar“ bezeichnen —, verteilen wir die Bezeichnung so, daß:*

$$(4) \qquad |\omega_3| \geqq |\omega_1|, \quad |\omega_3| > |\omega_2|$$

zutrifft, sofern nicht der spezielle Fall $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3|$ *vorliegt.* Daraus folgt dann sofort:

$$\xi \geqq -\tfrac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + 2\xi > 0,$$

d. h. ω gehört, wie wir es wünschten, dem schraffierten Bereiche der Fig. 42, unter Einrechnung des von ϱ nach $i\infty$ ziehenden Randes an.

Diese Festsetzung kommt, wie man durch Abschätzung der Integralwerte ω_i zeigen kann, und wie wir später noch auf anderem Wege einsehen werden, einfach darauf hinaus, in Fig. 32, S. 166, den Winkel α_3 als größten Winkel α zu wählen oder, falls zwei größte Winkel α vorliegen, diese α_3 und α_1 zu nennen. Hinzu kommt nur noch der besondere Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$, d. h. nach S. 136 der *„äquianharmonische“* Fall. Dann aber gilt einfach:

$$\omega_2 = \varrho^2\omega_1, \quad \omega_3 = \varrho\omega_1, \quad \omega = \varrho;$$

die F_2 läßt sich mittelst einer Drehung um den Punkt $z = 0$ durch den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ in sich überführen. Die drei noch zur Auswahl stehenden Querschnittsysteme gehen bei dieser Drehung ineinander über; sie erscheinen somit gleichwertig, und es liegt kein Anlaß vor, eines unter ihnen vorzuziehen.

An dem gewählten Periodenpaare wollen wir mit Rücksicht auf Vereinfachungen im späteren Gebrauch noch ein paar unwesentliche Abänderungen vornehmen. Wir bemerken zu diesem Zwecke, daß der schraffierte Bereich der Fig. 42 durch das von ϱ nach i ziehende Segment des „Einheitskreises“ (Kreises mit dem Radius 1 um $\omega = 0$) in zwei Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$ zerlegt wird. Jenes Segment des Einheitskreises möge dabei dem oberen Dreieck (dem mit der dritten Ecke bei $i\infty$) zugehören. Dann liefern die Periodenparallelogramme mit $|\omega_1| \geqq |\omega_2|$ jeweils Punkte ω des oberen Dreiecks, diejenigen mit $|\omega_1| < |\omega_2|$ solche des unteren; die „Periodenrhomben“, $|\omega_1| = |\omega_2|$, gehören gemäß der getroffenen Festsetzung zum oberen Dreieck.

Gilt nun für das zunächst ausgewählte Periodenpaar $|\omega_1| < |\omega_2|$, d. h. haben wir ein ω des Kreisbogendreiecks mit den Ecken $i, \varrho, 0$, so wollen wir, ohne das Querschnittsystem als ganzes zu ändern, doch die in sofort verständlicher Weise durch:

$$Q_1' = Q_2, \quad Q_2' = -Q_1$$

festgelegte Umformung vornehmen, d. h. wir wählen den bisherigen

zweiten Querschnitt zum ersten und den umgekehrt zu durchlaufenden bisherigen ersten Querschnitt zum zweiten. Es läuft dies darauf hinaus, daß wir an Stelle der bisherigen ω_1, ω_2 die folgenden Perioden:

$$\omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = -\omega_1$$

gebrauchen wollen, wobei an die Stelle von ω der Periodenquotient:

(5) $$\omega' = \frac{-1}{\omega}$$

tritt. Hier haben wir eine elliptische Substitution der Periode 2 vor uns, welche das Kreisbogendreieck der Ecken i, ϱ, 0 in das zum oberen bezüglich der imaginären Achse symmetrischen Dreieck der Ecken i, $-\varrho^2$, $i\infty$ überführt, wie es in Fig. 42 durch Punktierung angedeutet ist.

Das S. 172 vom „ersten Zweige" $u(z)$ gelieferte Periodenparallelogramm hat nach dieser Abänderung bei positivem Umlauf die Eckenfolge 0, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, ω_1. Der Gleichmäßigkeit wegen wollen wir für $|\omega_1| \geqq |\omega_2|$ an Stelle des bisherigen „ersten Zweiges" $u(z)$ fortan lieber $u' = u + \omega_1$ als ersten Zweig benutzen. Dies läuft einfach darauf hinaus, bei der Abbildung der zerschnittenen F_2 (vgl. S. 167ff.) die untere Grenze des Integrales u im Scheitelpunkte ∞ des Zweiecks (α_2) anzunehmen. Wir erzielen so den Vorteil, daß nun vom ersten Zweige u gerade wieder das Parallelogramm mit der Eckenfolge 0, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 (bei positivem Umlauf) geliefert wird.

Die Periodenrechtecke sind durch die vorstehende Betrachtung bereits mit erledigt. Wir können in der zugehörigen Fig. 39, S. 173 an Stelle des dort eingeführten Systems Q_1, Q_2 auch $Q_1' = Q_2$, $Q_2' = -Q_1$ gebrauchen und erhalten dann wieder ein Rechteck. Liegt nicht gerade der Spezialfall eines Quadrates vor, so werden wir dasjenige Schnittsystem bevorzugen, für welches $|\omega_1| > |\omega_2|$ wird. Im *„harmonischen"* Falle (vgl. S. 135), wo $e_3 = 0$, $e_2 = -e_1$ und $\omega_1 = i\omega_2$ zutrifft, sind beide Schnittsysteme gleichwertig, und es liegt kein Anlaß vor, eines unter ihnen zu bevorzugen.[1])

Fig. 43.

Der Bereich, dem der Bildpunkt von ω nunmehr in jedem Falle angehört, ist in Fig. 43 nochmals besonders dargestellt. Er setzt sich aus zwei bezüglich der imaginären ω-Achse symmetrischen Kreisbogendreiecken der

1) Die F_2 gestattet dann (vgl. S. 135) acht eine Diedergruppe G_8 bildende lineare Transformationen in sich. Eine derselben ist, wenn wir entsprechend der Form (20) S. 125 uns der Funktion $w = 2\sqrt{z(z^2-1)}$ bedienen, durch $z' = -z$, $w' = iw$ gegeben; diese Transformation tauscht die beiden gleichwertigen Schnittsysteme aus.

Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, 0 und der Ecken i, ϱ, $i\infty$ bzw. i, $-\varrho^2$, $i\infty$ zusammen und soll dieserhalb als „*Doppeldreieck*“ bezeichnet werden. Gemäß der getroffenen Verabredung gelten von den Randpunkten des Doppeldreiecks nur die als demselben zugehörig, welche den in Fig. 43 stärker markierten Teil des Randes bilden. Unter Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse merken wir als Satz an: *Das auf der* F_2 *im allgemeinen eindeutig erklärte reduzierte Querschnittsystem liefert ein gleichfalls eindeutig bestimmtes reduziertes Periodenpaar* ω_1, ω_2 *mit einem Quotienten* ω, *dessen Bildpunkt dem Doppeldreieck der Fig. 43 angehört. Allein im harmonischen Falle haben wir „zwei“ reduzierte Schnittsysteme, die aber dasselbe* ω, *nämlich* $\omega = i$, *liefern; und im äquianharmonischen Falle liegen „drei“ reduzierte Schnittsysteme vor, die jedoch übereinstimmend* $\omega = \varrho$ *ergeben.*

Die vorstehende Betrachtung hat uns zu einem komplexen Zahlwerte ω geführt, welcher der F_2 in jedem Falle eindeutig zugeordnet ist und demnach als ein Charakteristikum, eine Art „Maß“ oder, wie man sagt, ein „*Modul*“ der F_2 zu gelten hat. Es ist nun leicht zu sehen, daß dieser Wert ω gegenüber den eindeutigen Transformationen der F_2 in eine andere zweiblättrige Fläche des Geschlechtes $p = 1$ (vgl. S. 137) invariant ist. Der „Modul“ ω wird demnach als solcher des ganzen durch die F_2 erklärten Funktionenkörpers anzusehen sein. Ehe wir indessen hierauf eingehen, ist unsere Betrachtung nach anderer Seite hin zu ergänzen.

§ 3. Übergang zu einem beliebigen Querschnittsysteme und lineare Transformation der Perioden.

Die Beziehung zwischen der endlichen u-Ebene und der *unzerschnittenen* Fläche F_2 ist 1-∞-deutig: Jedem endlichen Punkte u entspricht eindeutig eine Stelle der F_2, jeder Stelle der F_2 sind umgekehrt unendlich viele Punkte u zugeordnet, die homolog in den Parallelogrammen unseres Netzes (Fig. 41, S. 174) liegen und weiterhin als „*äquivalente*“ Punkte der u-Ebene bezeichnet werden sollen. Ist u ein erster einer Stelle z der F_2 zugeordneter Punkt, so sind sämtliche mit u äquivalente Stellen durch:

$$(1) \qquad u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

gegeben, wenn wir hier m_1, m_2 alle Paare ganzer Zahlen durchlaufen lassen.

Ist u_0 ein der Stelle z_0 entsprechender Punkt, so überträgt sich ein auf der F_2 geschlossener Weg von z_0 nach dieser Stelle zurück auf

einen Weg von u_0 nach einem äquivalenten Punkte und umgekehrt. Ist der Weg insbesondere auch in der u-Ebene geschlossen, so läßt er sich stetig und ohne Zerreißen in dieser Ebene auf einen Punkt zusammenziehen; dann und nur dann wird der entsprechende geschlossene Weg auf der F_2 gleichfalls stetig und ohne Zerreißen auf einen Punkt zusammenziehbar sein. Es geht dies aus der Beziehung beider Wege auf einander leicht hervor.

Wir wollen nun an Stelle des bisherigen reduzierten Querschnittsystems Q_1, Q_2 nach S. 156 irgendein Querschnittsystem Q_1', Q_2' auf der F_2 einführen. Nachdem die Richtung von Q_1' willkürlich festgesetzt ist, wollen wir diejenige von Q_2' so wählen, daß bei der Kreuzungsstelle der Schnitte die in Fig. 44 skizzierte gegenseitige Lage der Schnittrichtungen zutrifft. Umlaufen wir, von der in der Figur durch ein kleines Kreissegment bezeichneten Ecke beginnend, den Rand der durch Q_1', Q_2' zerschnittenen F_2 in der positiven Richtung, so haben wir zunächst das linke Ufer von Q_2', dann das linke Ufer von Q_1' usw. zu beschreiben. Wir erzielen durch unsere Vorschrift, *daß die Querschnittufer hier in derselben Anordnung aufeinanderfolgen, wie beim Umlauf der durch die reduzierten Querschnitte Q_1, Q_2 zerschnittenen* F_2.

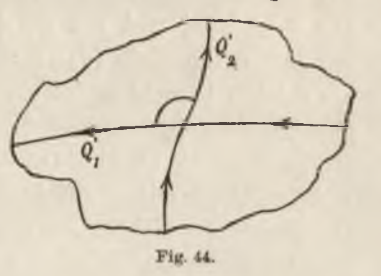


Fig. 44.

Die zu unseren neuen Querschnitten gehörenden Perioden:

$$\omega_i' = \int_{(Q_i')} du, \tag{2}$$

bleiben ungeändert, wenn wir das Schnittsystem irgendwie stetig und ohne Zerreißen über die F_2 hinschieben. Natürlich sollen dabei die Schnitte außer an ihrer Kreuzungsstelle stets voneinander entfernt gehalten werden, damit das Querschnittsystem als solches beständig brauchbar bleibt.[1]) Insbesondere wollen wir von dieser Erlaubnis in der Weise Gebrauch machen, *daß wir die Kreuzungsstelle der Q_1', Q_2' nach $z = \infty$, und damit nach derjenigen der reduzierten Schnitte Q_1, Q_2 hinschieben.*

Das Abbild der durch Q_1', Q_2' zerschnittenen F_2 auf die u-Ebene ist ein einfach zusammenhängender Bereich, der, wie auch die Schnitte Q_i' verlaufen mögen, niemals eine Stelle der u-Ebene mehrfach bedecken kann. Da nämlich die Umgebung jeder Stelle der F_2 auf die schlichte und vollständige Umgebung des Bildpunktes u bezogen ist, so müßten, wenn gleichwohl noch eine Stelle u_0 vom Abbild mehrfach bedeckt

1) Man stelle sich diese Verschiebungen der Anschaulichkeit halber etwa auf der Ringfläche der Fig. 18, S. 86, vor.

wäre, dieser Stelle u_0 mehrere Stellen z der F_2 entsprechen; das aber widerspricht der Beziehung zwischen der u-Ebene und der F_2. Das Abbild stellt uns ein die u-Ebene schlicht bedeckendes Kurvenviereck mit den Ecken $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$ dar, dessen Seiten den vier Querschnittufern korrespondieren. Dabei wird von zwei homologen Punkten der Gegenseiten der eine immer durch eine Substitution $u' = u \pm \omega_i'$ in den anderen übergeführt.

Wir wollen nun unter Festhaltung der Kreuzungsstelle der Schnitte Q_i' und also unter Festhaltung der Ecken $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$ des Abbildes eine stetige Deformation der Q_i' vornehmen, welche eine Geraderichtung der Seiten unseres Kurvenvierecks zum Ziele hat. Beginnen wir mit der Deformation von Q_2' und also mit der Geraderichtung der von 0 nach ω_2' und von $\omega_1' + \omega_2'$ nach ω_1' laufenden Seiten, so müssen wir nur nötigenfalls (damit das Querschnittsystem in jedem Augenblick als solches brauchbar bleibt) mit dem Querschnitte Q_1' dem vorrückenden Schnitte Q_2' ausweichen. Sind jene beiden Gegenseiten gerade geworden, so bleibt nun Q_2' liegen, und es sind dann noch die beiden anderen Gegenseiten durch die erforderliche stetige Verschiebung von Q_1' gerade zu richten: *Wie auch das Schnittsystem Q_1', Q_2' auf der F_2 gewählt sein mag, es wird nötigenfalls nach einer stetigen Verschiebung des Schnittsystems das Abbild der zerschnittenen F_2 auf die u-Ebene das „geradlinige Parallelogramm“ der Ecken $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$ sein, die in dieser Anordnung bei einem positiven Umlauf um das Parallelogramm aufeinanderfolgen, wenn man nur die Schnittrichtungen entsprechend der in Fig. 44 gegebenen Vorschrift wählt.*

Sehen wir homologe Punkte der Gegenseiten des neuen Parallelogramms als nicht verschieden an, so ist die Fläche dieses Parallelogramms eindeutig auf die unzerschnittene F_2 und damit auch eindeutig auf das von den reduzierten Q_i gelieferte Periodenparallelogramm bezogen, wenn wir in ihm gleichfalls äquivalente Randpunkte als nicht verschieden ansehen. Diese Beziehung beider Parallelogramme aufeinander ist dabei eine solche, daß die Umgebungen zweier korrespondierender Stellen mittelst einer Gleichung (1) mit bestimmten m_1, m_2 aufeinander bezogen sind. Die einander entsprechenden Umgebungen sind also inhaltsgleich, und wir gewinnen den Satz: *Das vom Querschnittsystem Q_1', Q_2' gelieferte geradlinige Parallelogramm der Ecken $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$ hat denselben Flächeninhalt wie das von den reduzierten Q_1, Q_2 gelieferte Periodenparallelogramm der Ecken $0, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1$.*

Da nun Q_1', Q_2' geschlossene Wege der F_2 sind und also die Punkte ω_1', ω_2' mit $u = 0$ äquivalent sein müssen, so gibt es zufolge (1) vier besondere ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ derart, daß:

$$(3) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

zutrifft. Rechnet man sich nach elementaren Regeln die Inhalte der beiden Parallelogramme aus und setzt dieselben gleich, so liefern die Gleichungen (3) das Ergebnis:

(4) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Damit haben wir den Satz gewonnen: *Ein beliebiges nach Vorschrift gerichtetes Querschnittsystem* Q_1', Q_2' *der* F_2 *liefert ein neues Periodenpaar* ω_1', ω_2', *welches mit dem reduzierten Paar* ω_1, ω_2 *durch zwei Gleichungen* (3) *mit ganzzahligen Koeffizienten der Determinante 1 zusammenhängt.*

Dieses Ergebnis ist der Umkehrung fähig. Mit irgend vier ganzen Zahlen α, β, γ, δ der Determinante 1 bilden wir uns aus den reduzierten Perioden ω_1, ω_2 nach (3) die beiden Größen ω_1', ω_2', konstruieren das mit dem ursprünglichen Periodenparallelogramm zufolge (4) inhaltsgleiche Parallelogramm der Ecken $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$ und wollen gleich auch von diesem Parallelogramm aus genau wie in Fig. 41 ein Parallelogrammnetz herstellen, welches die ganze endliche u-Ebene schlicht und lückenlos überspannt.

Irgend zwei homologe Punkte u, u' in zwei Parallelogrammen dieses neuen Netzes hängen mittelst ganzer Zahlen m_1', m_2' durch die Gleichung:

$$u' = u + m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'$$

zusammen. Dieselbe rechnet sich auf Grund von (3) in:

$$u' = u + (m_1'\alpha + m_2'\gamma)\,\omega_1 + (m_1'\beta + m_2'\delta)\,\omega_2$$

um, so daß u und u' im obigen Sinne (1) äquivalent sind. Die Auflösung der Gleichungen (3) nach ω_1, ω_2 liefert zufolge (4):

$$\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_2', \qquad \omega_2 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'.$$

Hieraus folgt leicht, daß auch umgekehrt irgend zwei äquivalente, d. h. durch eine Gleichung (1) zusammenhängende Punkte u, u' im neuen Parallelogrammnetze wieder homologe Punkte zweier Parallelogramme sind. Das einzelne Parallelogramm des neuen Netzes weist demnach keine zwei im Sinne von (1) äquivalenten Punkte auf, natürlich abgesehen davon, daß homologe Punkte der Gegenseiten stets äquivalent sind. Sehen wir je zwei solche Punkte als nicht verschieden an, so wird, wie jetzt feststeht, jenes Parallelogramm für jeden endlichen Punkt u einen und nur einen als „äquivalent" aufweisen.

Bilden wir nunmehr die u-Ebene rückwärts auf die F_2 ab, so folgt aus dem eben ausgesprochenen Satze, daß das einzelne Parallelogramm des neuen Netzes dabei gerade eine einfache und vollständige Bedeckung der F_2 liefert, wobei sich die Gegenseiten des Parallelogramms zu zwei Querschnitten Q_1', Q_2' zusammenfügen. Hiermit ist die Umkehrung der obigen Betrachtung, welche an irgend ein neues Querschnittsystem Q_1', Q_2' anknünfte, beendet. Bezeichnen wir den Übergang von ω_1, ω_2

zu ω_1', ω_2' vermöge zweier Gleichungen (3) *mit ganzzahligen Koeffizienten der Determinante* 1 als *„lineare Transformation“* oder *„Transformation ersten Grades der Perioden“*[1]), so gilt der Satz: *Der Übergang vom reduzierten Querschnittsystem Q_1, Q_2 zu irgendeinem System Q_1', Q_2' stellt sich als lineare Transformation* (3) *der zugehörigen Perioden dar, wie auch umgekehrt irgendeine solche lineare Transformation der ω_1, ω_2 einen Übergang von Q_1, Q_2 zu einem den transformierten Perioden entsprechenden Querschnittsystem Q_1', Q_2' liefert.* Natürlich ist immer an den vorgeschriebenen Schnittrichtungen (vgl. Fig. 44) festzuhalten.[2])

Ist neben Q_1, Q_2 und Q_1', Q_2' in Q_1'', Q_2'' ein drittes vorschriftsmäßig gerichtetes System vorgelegt, so sei:

$$\omega_1'' = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2, \quad \omega_1'' = \gamma'\omega_1 + \delta'\omega_2$$

das ihnen entsprechende Periodenpaar. Setzt man hier rechter Hand für ω_1, ω_2 die vorhin angegebenen Ausdrücke dieser reduzierten Perioden in ω_1', ω_2' ein, so ergibt sich:

$$\omega_1'' = (\alpha'\delta - \beta'\gamma)\,\omega_1' + (-\alpha'\beta + \beta'\alpha)\,\omega_2',$$
$$\omega_2'' = (\gamma'\delta - \delta'\gamma)\,\omega_1' + (-\gamma'\beta + \delta'\alpha)\,\omega_2'.$$

Hier stehen rechts als Koeffizienten der ω_1', ω_2' wieder vier ganze Zahlen der Determinante 1. *Der Übergang von irgendeinem unserer Querschnittsysteme zu irgendeinem anderen ist also immer eine lineare Transformation der zugehörigen Perioden.*

Man wolle sich übrigens noch die Beziehungen des Parallelogrammnetzes der ω_1', ω_2' etwa zum ursprünglichen Netze der ω_1, ω_2 veranschaulichen. Die Gitterpunkte des einen Netzes $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ stimmen in ihrer Gesamtheit mit denen des anderen Netzes $(m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2')$ genau überein. In Fig. 45 ist als Beispiel dasjenige der linearen Transformation

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1 + 2\omega_2$$

ausgeführt. Das neue Netz ist punktiert angedeutet, nur ist das erste Parallelogramm (dasjenige der Ecken 0, ω_2', $\omega_1' + \omega_2'$, ω_1') stark umrandet, um es besser hervorzuheben; aus dem gleichen Grunde ist das erste Parallelogramm des ursprünglichen Netzes in Fig. 45 schraffiert.

Die besondere lineare Transformation $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$, welche einfach auf einer gleichzeitigen Änderung beider Schnittrichtungen unter

1) Man wolle hierbei die Bezeichnung *„linear“* oder *„ersten Grades“* auf den Umstand beziehen, daß die Determinante (4) der vier ganzzahligen Koeffizienten α, β, γ, δ gleich *„eins“* ist. Wir gehen späterhin in der Transformationstheorie genauer auf die hier in Betracht kommende Terminologie ein.

2) Würden wir diese Bedingung aufgeben, so müßten wir auch Determinanten $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ zulassen, was für spätere Entwicklungen unzweckmäßig sein würde.

Beibehaltung der Schnitte selbst beruht, ändert das Parallelogrammnetz nicht und läßt insbesondere den Periodenquotienten ω unverändert; die fragliche Transformation soll demnach als von der „identischen Trans-

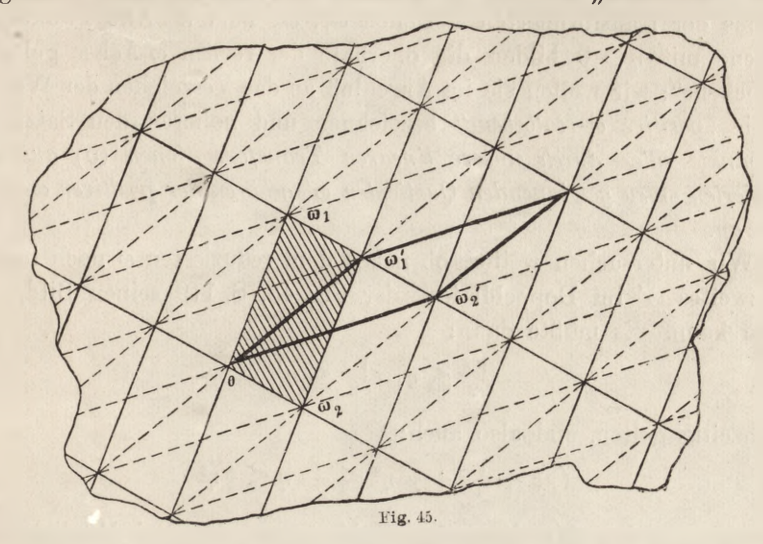


Fig. 45.

formation“ $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_2' = \omega_2$ nicht wesentlich verschieden angesehen werden. Aus dem gleichen Grunde werden dann überhaupt je zwei Transformationen (3), die durch gleichzeitigen Zwischenwechsel der vier ganzzahligen Koeffizienten α, β, γ, δ ineinander übergehen, als nicht wesentlich verschieden zu gelten haben. Solche zwei Transformationen liefern insbesondere den gleichen Periodenquotienten:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \tag{5}$$

da gleichzeitiger Zeichenwechsel von α, β, γ, δ den Wert ω' nicht ändert.

Wir werden uns unten ausführlich mit der Lage der Bildpunkte aller dieser Werte ω' in der ω-Ebene zu beschäftigen haben, welche aus dem Punkte ω des Doppeldreiecks der Fig. 43, S. 179, durch alle möglichen linearen Transformationen (5) gewonnen werden können. Ein paar Angaben über die Lage aller dieser Bildpunkte ω' sollen indes gleich hier Platz finden.

Setzen wir wieder unter Trennung der reellen und imaginären Bestandteile $\omega = \xi + i\eta$, $\omega' = \xi' + i\eta'$, so folgt aus (5) unter Rücksicht auf (4):

$$\xi' = \frac{(\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta) + \alpha\gamma\eta^2}{(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2},$$

$$\eta' = \frac{\eta}{(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2}.$$

Da nun $\eta > 0$ und endlich war, und da andrerseits die ganzen Zahlen γ und δ nicht zugleich $= 0$ sein können, so ist auch $\eta' > 0$ und endlich. Dieses Resultat geht auch unmittelbar aus der Gestalt des Parallelogramms der transformierten Perioden ω_1', ω_2' hervor. Alle Punkte der ω-Ebene mit $\eta > 0$ bilden die oberhalb der reellen ω-Achse gelegene „Halbebene"; wir wollen sie im Anschluß an das Vorzeichen der Werte η als die *„positive ω-Halbebene"* bezeichnen und notieren den Satz: *Die Bildpunkte aller durch unsere linearen Transformationen* (5) *aus dem reduzierten ω zu gewinnenden Quotienten ω' gehören der positiven ω-Halbebene an.*

Wir untersuchen weiter, ob neben dem reduzierten ω noch irgendein zweites ω' im Doppeldreieck der Fig. 43, S. 179 seinen Bildpunkt finden kann. Es müßte dann:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \eta, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \eta'$$

gleichzeitig gelten, und also auch:

$$(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2 < \frac{2}{\sqrt{3}}\,\eta \leq \tfrac{4}{3}\eta^2$$

zutreffen, so daß für die ganze Zahl γ nur die drei Möglichkeiten 0 und ± 1 bleiben. Da für $\gamma = 0$ notwendig $\alpha = \delta = \pm 1$ ist und (aus oben angegebenem Grunde) $\alpha = \delta = 1$ gesetzt werden darf, so würde in diesem Falle $\omega' = \omega + \beta$ gelten, unter β eine ganze Zahl verstanden. Nun hat unser Doppeldreieck der Fig. 43 die Breite 1, und von den Randpunkten sollten nur die zur Linken der imaginären ω-Achse dem Doppeldreieck angehören. Somit kann, falls nicht $\beta = 0$ ist und also nicht die „identische Transformation" $\omega' = \omega$ vorliegt, ω' nicht auch noch dem Doppeldreieck angehören.

Somit bleibt nur $\gamma = \pm 1$ zu diskutieren, und wir dürfen uns (da gleichzeitiger Zeichenwechsel der Koeffizienten α, β, γ, δ statthaft ist) auf $\gamma = +1$ beschränken. Dann aber findet man aus den letzten Ungleichungen leicht:

$$(\xi + \delta)^2 \leq \tfrac{1}{3} - \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nur für $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und also für $\omega = \varrho$, d. h. im äquianharmonischen Falle gelten kann (vgl. Fig. 43, S. 179). In diesem Falle ist $\xi = -\frac{1}{2}$, und also sind die Werte $\delta = 0$ und $\delta = 1$ zulässig; ist jedoch ω nicht gleich ϱ, so folgt aus $|\xi + \delta| < \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} \leq \xi < \frac{1}{2}$ notwendig $\delta = 0$. Prüfen wir zunächst $\omega = \varrho$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$ weiter, so folgt $\eta' = \eta$, so daß auch $\eta' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und also $\omega' = \varrho$ gilt, da kein anderer Punkt des Doppeldreiecks der Fig. 43 die Ordinate

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ hat. Es muß also ξ', wofür sich aus der vorletzten Gleichung von S. 185 der Wert $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ergibt, gleich $-\frac{1}{2}$, und also $\alpha + \beta = -1$ sein. Gleichung (4) liefert aber für $\gamma = \delta = 1$ weiter $\alpha - \beta = 1$; es ist somit $\alpha = 0$, $\beta = -1$, und wir gewinnen die Substitution:

$$\omega' = \frac{-1}{\omega + 1}, \tag{6}$$

die, wie wir schon von S. 177 her wissen, ϱ zum Fixpunkte hat. Prüfen wir endlich die letzte Möglichkeit, daß ω und ω' zugleich dem öfter genannten Doppeldreieck angehören, nämlich $\gamma = 1$, $\delta = 0$, so folgt aus (4) sofort $\beta = -1$ und damit:

$$\xi' = \alpha - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Forderung $-\frac{1}{2} \leqq \xi' < \frac{1}{2}$ liefert:

$$\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{1}{2} \leqq \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

und da $-\frac{1}{2} \leqq \xi < \frac{1}{2}$ und $\xi^2 + \eta^2 \geqq 1$ gilt, so sieht man sofort, daß nur $\alpha = 0$ und außerdem, jedoch nur im Falle $\omega = \varrho$, die Zahl $\alpha = -1$ zulässig ist. Der Wert $\alpha = -1$ liefert uns die zu (6) inverse Substitution:

$$\omega' = \frac{-\omega - 1}{\omega}, \tag{7}$$

die wir auch bereits von S. 176 kennen. Ist ω von ϱ verschieden, so bleibt nur noch die Möglichkeit $\alpha = 0$ und damit die Transformation:

$$\omega' = \frac{-1}{\omega}. \tag{8}$$

Aus ihr ergibt sich $|\omega'| \cdot |\omega| = 1$, und da, wie wir ja fordern, $|\omega| \geqq 1$ und $|\omega'| \geqq 1$ gelten soll, so ist $|\omega'| = |\omega| = 1$. Von den Punkten ω mit $|\omega| = 1$ gehören aber nur die dem Doppeldreieck an, welche ein ξ im Intervalle $-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq 0$ haben. Da auch:

$$\xi' = \frac{-\xi}{\xi^2 + \eta^2}$$

diesem Intervall angehören soll, so folgt $\xi = 0$ und also $\omega = i$. Dann aber liegt der harmonische Fall vor, und wir haben, worauf wir schon S. 179 hinwiesen, in $\omega = i$ den einen Fixpunkt der Substitution (8) vor uns.

Hiermit haben wir folgendes Resultat gewonnnen: *Nicht nur liegen alle reduzierten ω im Doppeldreieck der Fig. 43, sondern umgekehrt ist dieser Bereich für die reduzierten Periodenquotienten charakteristisch, insofern jede von der identischen Transformation verschiedene lineare Transformation* (5) *aus dem reduzierten ω ein ω' liefert, das eben nicht jenem Doppeldreieck angehört; Ausnahmen bilden nur der harmonische Fall mit $\omega = i$, wo wieder $\omega' = i$ durch die Transformation* (8) *geliefert wird, sowie*

der äquianharmonische Fall mit $\omega = \varrho$, *wo die Transformationen* (6) *und* (7) *wieder* $\omega' = \varrho$ *ergeben.* Es handelt sich in diesen beiden letzten Fällen einfach um jene Transformationen, welche den Übergang zwischen den oben (S. 178 ff.) ausdrücklich als gleichwertig bezeichneten reduzierten Querschnittsystemen vermitteln.

§ 4. Verhalten des Integrals erster Gattung bei eindeutigen Transformationen der Fläche F_2.

Ist $w = R(z, \sqrt{f(z)})$ irgendeine zweiwertige Funktion der F_2, so können wir die F_2 umkehrbar rational auf eine zweiblättrige Fläche F_2' über der w-Ebene beziehen, deren vier Verzweigungspunkte durch die in (1) S. 137 gegebene Funktion $\varphi(w)$ als deren Nullpunkte festgelegt sind. Wenn wir nun auf dieser Fläche F_2' das Integral erster Gattung, welches ihr zugehört, in der Gestalt:

$$u' = \int \frac{dw}{\sqrt{\varphi(w)}}$$

mit irgendeiner fest gewählten unteren Grenze bilden und übertragen u' auf die ursprüngliche F_2, so hat daselbst diese Funktion u' alle Kennzeichen eines Integrals erster Gattung. *Das Integral u' der F_2' hängt mit unserem bisher auf der F_2 benutzten Integrale u demnach durch eine Relation:*

$$(1) \qquad u' = au + b$$

zusammen.

Hieraus können wir sogleich folgende wichtige Folgerung ziehen. Bilden wir die beiden Wege Q_1, Q_2 des reduzierten Querschnittsystems der F_2 auf die F_2' ab, wo sie die Wege Q_1', Q_2' liefern mögen, und schreiben wir:

$$\omega_i' = \int\limits_{(Q_i')} du_w',$$

so gilt zufolge (1) einfach:

$$\omega_1' = a\omega_1, \quad \omega_2' = a\omega_2,$$

so daß insbesondere der Quotient ω' von ω_1' und ω_2' gleich dem ursprünglichen Periodenquotienten ω ist. Mit Rücksicht auf die letzten Ergebnisse von § 3 folgt: *Die Q_1', Q_2' liefern unmittelbar das reduzierte Querschnittsystem der F_2', und vor allem erweist sich der „Modul" ω als invariant gegenüber beliebiger Transformation der F_2 auf eine andere zum Körper gehörende F_2', so daß der Modul ω als ein Attribut des ganzen Körpers anzusehen ist.* Der Modul ω reiht sich in dieser Weise als gleichberechtigt neben die absolute rationale Invariante J, welcher der gleiche

Grad der Unveränderlichkeit zukam (vgl. S. 137). Diehier zutage tretende Beziehung wird uns unten noch ausführlicher beschäftigen.

Die Verzweigungsform $\varphi(w_1, w_2)$ hatte nun dieselben Invarianten wie $f(z_1, z_2)$. Wir können demnach w noch so *linear* transformieren, daß die Verzweigungspunkte der transformierten F_2' wieder genau nach denselben Stellen ∞, e_1, e_2, e_3 hinfallen, wo sie auch bei der F_2 liegen.

Zu dieser F_2' aber können wir auch noch auf folgende Art gelangen. Nach (2) S. 138 und S. 145 haben wir in:

$$w = A\frac{dZ_s}{du_s} + B, \tag{2}$$

unter A und B Konstante verstanden, die allgemeinste zweiwertige Funktion der F_2, welche an der beliebig vorgeschriebenen Stelle s der F_2 einen Pol zweiter Ordnung hat. Diese Funktion liefert dann unmittelbar eine F_2', die bei $w = \infty$, der Stelle s entsprechend einen Verzweigungspunkt hat. Dabei kann man über die Konstanten A, B in einer und nur einer Art so verfügen, daß die drei endlichen Verzweigungspunkte die bisherigen Lagen e_1, e_2, e_3 gewinnen.[1])

Insofern beide nun vorliegenden Flächen F_2 und F_2' genau dieselbe Lage der Verzweigungspunkte haben, sprechen wir von einer *eindeutigen Transformation der F_2 in sich*. Da die Stelle s, welche nach der Transformation den Verzweigungspunkt ∞ liefert, auf der F_2 willkürlich wählbar ist und demnach auch frei beweglich gedacht werden kann, *so erhalten wir sogleich ein zweifach unendliches Kontinuum von solchen eindeutigen Transformationen der F_2 in sich, die übrigens offenbar in ihrer Gesamtheit eine „Gruppe" bilden* (vgl. S. 108). Stetiger Änderung der Stelle s entsprechend, darf man sich diese „kontinuierliche Gruppe" unter dem Bilde gewisser „stetiger" Verschiebungen der Fläche F_2 in sich vorstellen.[2])

Lassen wir die Querschnitte Q_1, Q_2, wie in Fig. 32, S. 166, um die Verzweigungspunkte herum (nicht durch dieselben hindurch) laufen, so können wir bei den stetigen Verschiebungen der F_2 in sich, an denen die Q_1, Q_2 zunächst teilnehmen werden, diese geschlossenen Kurven doch in der Art stetig verschieben, daß sie den Verzweigungspunkten ausweichen. Sie bleiben dann unmittelbar als Schnitte des reduzierten Systems

---

1) Jedoch gibt es im harmonischen Falle zwei Auswahlen der Konstanten, im äquianharmonischen sogar drei, eine Folge der *linearen* Transformationen von w, welche in diesen Fällen die F_2' bei festbleibendem Verzweigungspunkte ∞ in sich überführen (vgl. S. 133ff.).

2) Die Existenz dieser „kontinuierlichen Gruppe" wird durch die Besonderheiten des harmonischen und des äquianharmonischen Falles nicht berührt. Wir kommen hierauf unten zurück.

für die Flächen F_2' brauchbar, während andrerseits u, auch über die neuen Umläufe ausgedehnt, die Integralwerte ω_1, ω_2 liefert. Wählen wir das Integral u' der F_2' wieder als Normalintegral erster Stufe, so sind wegen der Gleichheit der Flächen F_2 und F_2' und ihrer Schnittsysteme die zugehörigen Perioden ω_1', ω_2' gleich den bisherigen ω_1, ω_2. In der Beziehung (1) zwischen u und u' trifft also einfach $a = 1$ zu. Andrerseits haben wir, da die untere Grenze von u' von der Stelle s der F_2 geliefert wird, das Absolutglied b in (1) gleich $-u^{s,\infty}$ zu setzen. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$v = -u^{s,\infty} \tag{3}$$

und erschöpfen hierbei mit der Stelle s ersichtlich gerade die ganze F_2, wenn wir mit dem Werte $-v$ unser erstes Periodenparallelogramm und also mit dem Werte v das Parallelogramm der Ecken $0, -\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, -\omega_1$ vollständig beschreiben.

Wir haben hiermit den wichtigen Satz gewonnen: *Die kontinuierliche Gruppe aller zweifach unendlich vielen Transformationen der F_2 in sich stellt sich im Integral erster Stufe u einfach durch die Translationen dar:*

$$u' = u + v, \tag{4}$$

wobei v die Fläche des Periodenparallelogramms der Ecken $0, -\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, -\omega_1$ *vollständig zu beschreiben hat.* Verstehen wir unter v einen unbeschränkten endlichen komplexen „Parameter", so bilden die gesamten Transformationen (4) *die kontinuierliche Gruppe aller Translationen der u-Ebene in sich.* Es gilt offenbar der Satz: *Die Gruppe aller Translationen* (4) *der u-Ebene in sich ist 1-∞-deutig auf die kontinuierliche Gruppe der Transformationen der F_2 in sich bezogen.* Es liefern nämlich alle diejenigen Translationen (4), deren Parameter v sich um die ganzzahligen Kombinationen $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ der Perioden voneinander unterscheiden, ein und dieselbe Transformation der F_2 in sich. Die gesamten Transformationen der F_2 in sich können wir also auch dadurch gewinnen, *daß wir v über irgendein Parallelogramm des Netzes der Periodenparallelogramme hinführen, wobei von je zwei homologen Punkten der Gegenseiten immer nur einer zuzulassen ist.* Dies läßt sich in besonders bequemer Weise z. B. so erzielen, daß wir:

$$u' = u + \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 \tag{5}$$

setzen und unter μ_1, μ_2 stetige reelle Größen verstehen, welche unabhängig voneinander im Intervall:

$$0 \leq \mu_i < 1$$

variabel sind.

Auch umgekehrt ist übrigens leicht einleuchtend, *daß jede Translation* (4) *eine eindeutige und damit umkehrbar rationale Transformation der* F_2 *in sich bedeuten muß*. Da nämlich einem einzelnen Werte u ein bestimmter Punkt der F_2 entspricht, so können wir kurz von „einem Punkte u“ der F_2 sprechen. Natürlich geben dabei äquivalente Werte u im Parallelogrammnetz ein und denselben Punkt der F_2. Die einzelne Translation (4) bedeutet nun einfach, daß wir dem Punkte u den Punkt $(u + v)$ der F_2 zuordnen. Diese Zuordnung ist eine umkehrbar eindeutige für die ganze F_2; wenn wir nämlich u über ein Periodenparallelogramm hinführen oder sonst irgenwie ein *volles System „inäquivalenter“ Punkte* beschreiben lassen, so wird $(u + v)$ ein ebensolches System beschreiben und umgekehrt. Entspricht der Stelle z der F_2 die Stelle z', so wird also z' die F_2 gerade einmal einfach und vollständig beschreiben, wenn dies die Stelle z ausführt, und umgekehrt. Somit liefert z', in Abhängigkeit von z gedeutet, eine zweiwertige algebraische Funktion[1]) der F_2, die die F_2 wieder auf eine F_2' abbildet. Diese F_2' ist dann aber einfach jene mit der F_2 kongruente Fläche, auf welche das „Periodenparallelogramm“ der Ecken $v, v + \omega_2$, $v + \omega_1 + \omega_2$, $v_1 = \omega_1$ durch z' abgebildet wird. Wir sind demnach zu unserem obigen Ausgangspunkte zurückgekehrt.

Nach den Rechnungen von S. 138 und 146 ff. wird die in (2) konstruierte zweiwertige Funktion w stets und nur dann in z linear, wenn der Pol s in einen Verzweigungspunkt hineinrückt. Für $s = \infty$ ist natürlich w mit z identisch. Wir haben demnach nur noch die drei Möglichkeiten $s = e_1, e_2, e_3$. Die drei zugehörigen linearen Substitutionen von z bilden mit der identischen Substitution die S. 134 aufgestellte *„Vierergruppe“* G_4 der linearen Transformationen der Verzweigungsform und also der F_2 in sich.

Um diese Vierergruppe G_4 in Gestalt der zugehörigen Transformationen (5) des Integrals u darzustellen, erinnern wir daran, daß die drei in der G_4 enthaltenen elliptischen Substitutionen der Periode 2 die vier Verzweigungspunkte in den drei möglichen Arten zu Paaren permutierten. Nun liefern die Verzweigungspunkte im Periodenparallelogramm die Ecken, die Seitenmitten und den Mittelpunkt, wie dies näher in Fig. 46 zur Darstellung gebracht ist. Die gesuchten Transformationen (5) müssen

Fig. 46.

1) Da u und $u' = u + v$ analytisch (nämlich linear) zusammenhängen, so ist die durch die Zuordnung der Stellen z, z' gelieferte Beziehung der F_2 auf sich selbst konform, natürlich mit den in den Verzweigungspunkten (der F_2 und der F_2') eintretenden Unterbrechungen.

also diese Punkte in richtiger Weise permutieren. Wir erkennen sofort: *Die Vierergruppe G_4 der linearen Transformationen der F_2 in sich stellt sich mittelst des Integrals erster Gattung u durch die vier Transformationen dar:*

$$(6)\qquad u' = u,\ u' = u + \frac{\omega_1}{2},\quad u' = u + \frac{\omega_2}{2},\quad u' = u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Eine bisher noch nicht genannte Transformation der F_2 in sich wird durch die Transformation:

$$u' = -u$$

des Integrals erster Gattung geliefert; *ihre Bedeutung ist einfach die, daß sie die beiden Blätter der F_2 austauscht.* Kombinieren wir diese Transformation mit der bisherigen kontinuierlichen Gruppe der Translationen (4), so ergibt sich ein zweites Kontinuum von Transformationen:

$$u' = -u + v,$$

welche freilich nicht für sich, wohl aber mit den Transformationen (4) zusammen eine erweiterte Gruppe bilden. Um die Transformationen der F_2 in sich sämtlich, und jede nur einmal zu gewinnen, haben wir uns natürlich wieder auf die Transformationen (5) zu beschränken. Wir werden später nochmals auf den vorliegenden Gegenstand zurückkommen; doch merken wir hier schon den Satz an: *Liegt weder der harmonische, noch der äquianharmonische Fall vor, so werden die gesamten umkehrbar rationalen Transformationen der F_2 in sich durch das Integral erster Gattung in der Gestalt:*

$$(7)\qquad u' = \pm u + \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2,$$

μ_1 und μ_2 wie oben gebraucht, geliefert; sie bilden eine aus zwei Kontinuen bestehende Gruppe, in der die bisherige kontinuierliche Gruppe als Untergruppe enthalten ist.

Daß aber in jenen beiden besonderen Fällen nochmalige Gruppenerweiterungen möglich sind, geht schon aus den Entwicklungen von S. 135ff. hervor, wo wir die Vierergruppe G_4 zur *Diedergruppe* G_8 bzw. zur *Tetraedergruppe* G_{12} aller linearen Transformationen der Verzweigungsform in sich erweiterten. Natürlich sind diese Gruppenerweiterungen auch vom Integral erster Gattung u aus unmittelbar verständlich. Im harmonischen Falle ist $\omega = i$ und $\omega_1 = i\omega_2$; das Parallelogramm der reduzierten Perioden ist also ein Quadrat. Hier kommt als wesentlich neue Transformation die durch:

$$u' = iu$$

gegebene hinzu. Liegt aber der äquianharmonische Fall vor, so gilt $\omega = \varrho$, $\omega_1 = \varrho\omega_2$, und das Parallelogramm der reduzierten Perioden ist

ein aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzter Rhombus. In diesem Falle kommt als neu die Transformation:

$$u' = \varrho u$$

zu den bisherigen hinzu. Im übrigen wollen wir die hier eintretenden Verhältnisse an dieser Stelle nicht näher untersuchen, da uns die einfachsten Hilfsmittel für diese Untersuchung hier noch nicht zur Hand sind.

Drittes Kapitel.

Die elliptischen Funktionen erster Stufe.

Das Hauptergebnis des vorigen Kapitels war die Abbildung des Feldes F_∞ der Funktion $u^{z,\infty}$ auf die schlicht und vollständig bedeckte endliche u-Ebene. Wir wollen jetzt im vollen Umfange die Folgerungen ziehen, welche aus dieser Tatsache für den Körper der algebraischen Funktionen und die Integrale der F_2 sich ergeben. Hierbei ist weiter von grundsätzlicher Bedeutung, daß die übereinanderliegenden Exemplare der F_2 im Felde F_∞ beim Übergange zur u-Ebene die nebeneinandergeordneten Parallelogramme im Netze der Periodenparallelogramme werden, wobei die homologen Punkte dieser Parallelogramme oder, wie wir sagten, die „äquivalenten“ Punkte im Parallelogrammnetze ein und dieselbe Stelle z der F_2 lieferten. Wird sich aus der Schlichtheit des fraglichen Abbildes die „Eindeutigkeit“ der elliptischen Funktionen ergeben, so folgt aus der Eigenart des Abbildes als Netz der Periodenparallelogramme als weitere grundlegende Eigenschaft der elliptischen Funktionen diejenige der „doppelten Periodizität“.

Diese Eigenschaft der elliptischen Funktionen ist im Falle der „lemniskatischen Funktionen“ — es sind dies die elliptischen Funktionen des harmonischen Spezialfalles — schon sehr früh durch Gauß[1]) erkannt worden. Bei Abel und Jacobi wird die Eindeutigkeit der elliptischen Funktionen nahezu als eine Selbstverständlichkeit angesehen[2]), während die doppelte Periodizität als Eigenschaft dieser Funktionen speziell hervorgehoben wird, besonders stark bei Jacobi.[3]) Im übrigen brauchen wir hier kaum zu betonen, daß die Frage nach der Gestaltung des „Feldes“ einer Funktion und damit zugleich die Frage nach der Eindeutigkeit oder Mehrdeutigkeit derselben den Vorrang vor der Feststellung etwaiger weiterer Eigenschaften der Funktion besitzt. Diese

1) S. die Nachweise S. 117 über Gauß.

2) Man vgl. Abel, „Recherches sur les fonctions elliptiques“, § 1, Journ. f. Math., Bd. 2 (1827) oder Abels „Werke“, Bd. 1, S. 266 ff. Jacobi betreffend kommen die Artikel 17 ff. der „Fundamenta nova“ (s. die Nachweise S. 117) in Betracht.

3) S. den Schluß von Artikel 19 der „Fundamenta nova“.

Auffassung ist für die Anordnung des Gedankenganges unserer Darstellung bestimmend gewesen.

§ 1. Das Integral erster Gattung u als „uniformisierende" Variabele der Riemannschen Fläche F_2.

Irgendein vorgelegter Körper algebraischer Funktion des Geschlechtes $p = 1$ sei wie bisher durch diejenige zugehörige Riemannsche Fläche F_2 repräsentiert, deren Verzweigungspunkte die Nullpunkte der Verzweigungsform „erster Stufe" f_z sind. Das Feld F_∞ des zugehörigen Integrals erster Gattung erster Stufe $u^{z,\infty}$ wird dann durch diese analytische Funktion u auf die schlichte und abgesehen vom Punkte ∞ vollständige u-Ebene abgebildet und liefert daselbst das im vorigen Kapitel bereits vielfach benutzte Netz der Periodenparallelogramme. Das Querschnittsystem Q_1, Q_2 darf beliebig ausgewählt sein; insbesondere ist es also, wenn man bestimmte Querschnitte vor Augen haben will, gestattet, sich des reduzierten Systems zu bedienen.

Nun sei $R(z, \sqrt{f(z)})$ irgendeine dem Körper angehörende algebraische Funktion; dieselbe ist auf der F_2 eindeutig und sei m-wertig, wo dann (vgl. S. 95) stets $m > 1$ gilt. Diese Funktion ist auch im Felde F_∞ von u selbstverständlich eindeutig und gewinnt bei der Fortsetzung in diesem Felde an homologen Stellen der Flächenexemplare F_2 stets gleiche Werte.

Wenn wir nun diese Funktionswerte bei der Abbildung des Feldes F_∞ mit auf die u-Ebene verpflanzen, so bekommt also jeder endliche Punkt u einen bestimmten Funktionswert, und es setzen diese Funktionswerte eine etwa durch:

$$(1) \qquad R(z, \sqrt{f(z)}) = \psi(u)$$

zu bezeichnende *eindeutige analytische Funktion* $\psi(u)$ zusammen, die wir nunmehr als eine *„elliptische Funktion"* bezeichnen: *Die algebraischen Funktionen des durch die F_2 repräsentierten Körpers werden, in Abhängigkeit vom Integral erster Gattung u aufgefaßt, zu „eindeutigen" elliptischen Funktionen, deren gemeinsames Feld die schlichte und vollständige u-Ebene, abgesehen vom Punkte $u = \infty$, ist.* Durch Einführung des Argumentes u werden also die in z „zweideutigen" Funktionen des Körpers in *„eindeutige"* Funktionen von u umgewandelt; man sagt, sie seien durch u *„uniformisiert"*, und bezeichnet dieserhalb u als eine *„uniformisierende Variabele"* der F_2.

Die homologen Stellen der Flächenexemplare F_2, die gleiche Werte der einzelnen Funktion $R(z, \sqrt{f(z)})$ tragen, ergeben in der u-Ebene „äquivalente" Stellen im Parallelogrammnetz. In solchen Stellen wird demnach die einzelne elliptische Funktion $\psi(u)$ immer gleiche Werte

haben. Man kann diesen Schluß auch dadurch begründen, daß man in der endlichen u-Ebene von irgendeiner Stelle u nach einer äquivalenten Stelle:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

eine Kurve zieht und längs derselben $\psi(u)$ fortsetzt. Diese Kurve liefert dann eben als Abbild auf der F_2 einen geschlossenen Weg, über den fortgesetzt $R(z, \sqrt{f(z)})$ am Schlusse zum Anfangswerte zurückkehrt: *Es gilt demnach allgemein:*

(2) $$\psi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \psi(u)$$

und insbesondere:

(3) $$\psi(u + \omega_1) = \psi(u), \quad \psi(u + \omega_2) = \psi(u),$$

woraus die Gleichung (2) *mit beliebigen ganzen Zahlen* m_1, m_2 *umgekehrt wieder folgt. Die elliptische Funktion* $\psi(u)$ *heißt dieserhalb „doppeltperiodisch“, und man nennt* ω_1, ω_2 *ein „Paar primitiver Perioden“, insofern jede in* (2) *gemeinte Periode sich als eine ganzzahlige Kombination der beiden Perioden* ω_1 *und* ω_2 *aufbauen läßt.*

Wir wollen die von $R(z, \sqrt{f(z)})$ gelieferte elliptische Funktion $\psi(u)$ auch als solche *„m-wertig“* nennen. Hierdurch kommt dann zum Ausdruck, *daß ein beliebig gewählter komplexer Zahlwert von der elliptischen Funktion* $\psi(u)$ *immer gerade genau in* m *Punkten des einzelnen Periodenparallelogramms angenommen wird.* Nur müssen wir dabei, um eine ausnahmslos eindeutige Beziehung des Parallelogramms auf die F_2 zu gewinnen, wieder wie schon früher homologe Punkte der Gegenseiten des Parallelogramms als nicht verschieden ansehen oder etwa von je zwei solchen Punkten immer nur einen als dem Parallelogramm angehörig betrachten. Natürlich dürfen, wie auf der F_2 (vgl. S. 91), die m Stellen des Parallelogramms, in denen $\psi(u)$ einen vorgeschriebenen komplexen Wert annimmt, auch miteinander irgendwie koinzidieren. Solche Koinzidenzen treten dann freilich nur bei einer beschränkten Anzahl von komplexen Werten auf.[1])

An singulären Punkten hat die elliptische Funktion $\psi(u)$ in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene nur Pole; und zwar finden sich im einzelnen Parallelogramm gerade genau m Pole erster Ordnung, die natürlich auch irgendwie zu Polen höherer Ordnung zusammenfallen können. *Jedenfalls ist die elliptische Funktion* $\psi(u)$ *in der ganzen endlichen u-Ebene frei von wesentlich singulären Punkten.* Demgegenüber folgt aus der Struktur des Parallelogrammnetzes sofort: *Der Punkt* $u = \infty$ *ist ein wesentlich*

1) Nach S. 92 handelt es sich hier um jene besonderen Werte der algebraischen Funktion $w = R(z, \sqrt{f(z)})$, welche bei Abbildung der F_2 auf eine F_m über der w-Ebene die Verzweigungspunkte ergeben.

singulärer Punkt der elliptischen Funktion $\psi(u)$. In jeder noch so „klein" gewählten Umgebung des Punktes ∞ fanden wir ja (vgl. S. 175) stets noch unendlich viele Parallelogramme, so daß $\psi(u)$ in jeder Umgebung von ∞ einen vorgeschriebenen komplexen Wert an unendlich vielen verschiedenen Stellen wirklich annimmt.[1])

Wir wenden uns ferner zur Betrachtung der Integrale der F_2, und zwar zunächst zu derjenigen *irgendeines einzelnen Integrales zweiter Gattung.* Ein geschlossener Weg in der endlichen u-Ebene und also im Felde F_∞ von u liefert (vgl. S. 181) auf der Fläche F_2 einen geschlossenen Weg, der sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Das Integral liefert also bei Fortsetzung über einen solchen Weg stets den Wert 0, so daß dasselbe eine eindeutige Funktion im Felde F_∞ ist. Bei Übertragung der Werte dieser Funktion auf die u-Ebene finden wir: *Ein Integral zweiter Gattung, als Funktion von u aufgefaßt, liefert eine in der ganzen endlichen u-Ebene eindeutige, etwa durch* $\zeta(u)$ *zu bezeichnende Funktion, so daß u auch für die Integrale zweiter Gattung den Charakter als „uniformisierende" Variabele behält.*

Aber freilich ist $\zeta(u)$ nicht mehr in äquivalenten Punkten des Parallelogrammnetzes gleich. Liefert das Integral, über die geschlossenen Wege Q_1, Q_2 fortgesetzt, die Perioden η_1, η_2, so ergibt ein geschlossener Weg der F_2, welcher von u zu $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ führt, eine entsprechende Änderung des Integrals zweiter Gattung um $(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)$. *Die eindeutige analytische Funktion* $\zeta(u)$ *erfüllt die Bedingungen:*

$$(4)\qquad \zeta(u+\omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \quad \zeta(u+\omega_2) = \zeta(u) + \eta_2,$$

aus denen dann wieder:

$$(5)\qquad \zeta(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \zeta(u) + m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

eine unmittelbare Folge ist. Wir werden η_1, η_2 als ein *Paar „primitiver Perioden"* des Integrals zweiter Gattung bezeichnen.

An singulären Punkten hat auch $\zeta(u)$ in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene nur Pole, die in äquivalenten Punkten des Parallelogrammnetzes gelegen sind. Handelt es sich insbesondere um ein „Elementarintegral" zweiter Gattung (vgl. S. 144), so findet sich in jedem Periodenparallelogramm ein und nur ein Pol erster Ordnung. *Während demnach* $\zeta(u)$ *in der ganzen endlichen u-Ebene frei von wesentlich singulären Stellen ist, bewahrt natürlich der Punkt* $u = \infty$ *seinen wesentlich singulären Charakter auch für* $\zeta(u)$. Man braucht ja nur zu beachten, daß in „jeder" Umgebung des Punktes ∞ noch unendlich viele verschiedene Pole von $\zeta(u)$ nachweisbar sind.

---

1) Man vgl. hiermit das Verhalten einer ganzen transzendenten Funktion in der Umgebung ihres wesentlich singulären Punktes ∞ (S. 51).

Bei den *Integralen dritter Gattung* reicht nun freilich die „uniformisierende Kraft“ von u nicht mehr aus. Jedes solche Integral hat nämlich auf der F_2 mindestens zwei logarithmische Unstetigkeitspunkte (vgl. S. 141). Die von demselben gelieferte analytische Funktion des Argumentes u hat demnach im einzelnen Parallelogramm mindestens zwei solche Unstetigkeitspunkte; die Funktion ist also bereits in der Umgebung jedes solchen Punktes unendlich vieldeutig.

§ 2. Der Körper der elliptischen Funktionen, die besonderen Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und das Normalintegral $\zeta(u)$.

Indem wir an dem eben benutzten Parallelogrammnetz der u-Ebene festhalten, wollen wir den Gedankengang des vorigen Paragraphen in der Art umkehren, daß wir eine von der F_2 unabhängige Erklärung der elliptischen Funktionen an die Spitze stellen: *Als eine zum Parallelogrammnetz gehörende elliptische Funktion soll jede analytische Funktion $\psi(u)$ bezeichnet werden, welche die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞, zum Felde hat, und welche die durch:*

(1) $$\psi(u + \omega_1) = \psi(u), \quad \psi(u + \omega_2) = \psi(u)$$

zum Ausdruck kommende Eigenschaft der doppelten Periodizität besitzt.

Diese Begriffserklärung führt unmittelbar zu den Funktionen von § 1 zurück. Übertragen wir nämlich die Werte einer einzelnen Funktion $\psi(u)$ auf die F_2, so gewinnen wir daselbst zufolge (1) eine eindeutige Funktion der Stelle. Da aber $\psi(u)$ in einem endlichen Bereiche der u-Ebene, und also insbesondere im einzelnen Parallelogramm an singulären Punkten nur Pole in endlicher Anzahl aufweisen kann, so wird dasselbe von der auf der F_2 erhaltenen Funktion auf dieser Fläche gelten. Die Funktion erweist sich demnach als eine algebraische Funktion der F_2 (vgl. S. 77 unten), so daß wir in der Tat zum Ausgangspunkt von § 1 zurückgekommen sind.

Was die Zusammenhänge der elliptischen Funktionen unseres Parallelogrammnetzes untereinander angeht, so übertragen sich nun unmittelbar alle früher über die algebraischen Funktionen der F_2 aufgestellten Sätze: *Die gesamten elliptischen Funktionen unseres Parallelogrammnetzes bilden einen „Körper“ zusammengehöriger Funktionen* (vgl. S. 81); *irgend zwei dieser Funktionen $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, deren Wertigkeiten m und n sind, hängen durch eine algebraische Relation:*

(2) $$G(\psi_1(u), \psi_2(u)) = 0$$

n^{ten} bzw. m^{ten} Grades in ψ_1 und ψ_2 zusammen; alle Funktionen des Körpers sind in zweien unter ihnen, $\psi_1(u)$ und $\psi_2(u)$ rational darstellbar,

sobald nur die zwischen diesen beiden Funktionen bestehende Relation (2) *irreduzibel ist* (vgl. S. 93).

Für diese rationale Darstellung aller Funktionen des Körpers eignen sich nun vornehmlich jene beiden Funktionen, welche von unserer auf die Verzweigungsform erster Stufe gegründeten Fläche F_2 in z und $\sqrt{f(z)}$ geliefert werden. *Wir sind damit zu jenen beiden wichtigen elliptischen Funktionen erster Stufe hingeführt, welche der Weierstraßschen Theorie* (vgl. S. 117) *zugrunde liegen, und welche wir im Anschluß an Weierstraß durch die besonderen Bezeichnungen:*

$$(3) \qquad z = \wp(u), \quad \sqrt{f(z)} = \wp'(u)$$

auszeichnen. Die Schreibweise der zweiten Funktion begründet sich dadurch, daß aus:

$$du = \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

ja unmittelbar die Beziehung:

$$\wp'(u) = \frac{d\wp(u)}{du}$$

hervorgeht, so daß $\wp'(u)$ die erste Ableitung von $\wp(u)$ nach u ist. Aus der Gestalt der Verzweigungsform erster Stufe ergibt sich weiter: *Die zwischen den Funktionen erster Stufe $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ bestehende algebraische Relation ist:*

$$(4) \qquad \wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3;$$

da nun $\wp(u)$ zweiwertig und $\wp'(u)$ dreiwertig ist, diese Relation aber irreduzibel ist, so ist jede elliptische Funktion des Körpers in der Gestalt:

$$(5) \qquad \psi(u) = R(\wp(u), \wp'(u))$$

als rationale Funktion von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ darstellbar.

Was die Integrale zweiter Gattung[1]) angeht, so wollen wir hinfort die Bezeichnung $\zeta(u)$ nur noch für diejenige eindeutige Funktion gebrauchen, welche von dem in (2) S. 152 aufgestellten Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe geliefert wird:

$$Z^{z, z_0} = \zeta(u).$$

Wir bezeichnen $\zeta(u)$ auch als Funktion von u als das „*Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe*" und werden übrigens im nächsten

1) Betreffs dieser Integrale gilt folgender Satz: Eine Funktion, welche die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞, zum Felde hat und sich bei Vermehrung von u um ω_1 und ω_2 bis auf zwei additive Konstante reproduziert, ist ein Integral zweiter Gattung. Die Ableitung nach u ist nämlich eine elliptische Funktion, und das Integral gehört weder zur ersten Gattung, da der Punkt ∞ nicht zum Felde gehört, noch zur dritten Gattung, da logarithmische Unstetigkeitspunkte nicht auftreten. Siehe übrigens die algebraische Gestalt des Satzes S. 142.

Paragraphen eine Festsetzung über die untere Grenze des Integrals treffen. Der Zusammenhang von $\zeta(u)$ mit $\wp(u)$ geht aus der rechten Seite der Gleichung (2) S. 152 sofort hervor. Entspricht der unteren Grenze z_0 des Integrals der Wert u_0 des Argumentes u, so folgt: *Das Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe $\zeta(u)$ stellt sich in der Funktion $\wp(u)$, wie folgt, dar:*

$$(6) \qquad \zeta(u) = -\int_{u_0}^{u} \wp(u)\,du.$$

Auch das in (5) S. 153 gegebene Integral dritter Gattung erster Stufe Π_t^{z, z_0} können wir sofort als Funktion von u umschreiben. Entspricht der Stelle t der F_2 der Wert v des Integrals erster Gattung, so folgt als Darstellung jenes Integrals dritter Gattung aus (5) S. 153:

$$\Pi_t^{z, z_0} = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

Übrigens werden wir unten wichtigere Darstellungen für die Elementarintegrale dritter Gattung zu besprechen haben.

§ 3. Potenzreihen für die Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$.

Unter den verschiedenartigen analytischen Darstellungen der elliptischen Funktionen $\wp(u), \ldots$, welche man kennt, betrachten wir hier zunächst *Entwicklungen nach Potenzen von u*, welche sich also auf die Umgebung der Stelle $u = 0$ beziehen.

Da die Fläche F_2 bei $z = \infty$ einen ihrer Verzweigungspunkte hat und diese Stelle der F_2 als untere Grenze des Integrals u gewählt wurde, so fallen umgekehrt die beiden Pole, welche die zweiwertige Funktion $\wp(u)$ im ersten Periodenparallelogramm hat, in der Ecke $u = 0$ zu einem Pole zweiter Ordnung zusammen. Beschreibt man in den beiden Blättern der F_2 von der unteren Grenze ∞ zwei genau übereinander liegende Integrationsbahnen für das Integral erster Gattung, so sind die zugehörigen Integralwerte stets einander entgegengesetzt. Zu zwei Werten u und $-u$ gehören demnach dieselben Werte der eindeutigen Funktion $z = \wp(u)$. *Die Funktion $\wp(u)$ ist eine „gerade" Funktion von u, welche in jedem Gitterpunkte $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ des Parallelogrammnetzes einen Pol zweiter Ordnung hat und übrigens in der Umgebung jeder endlichen Stelle u analytisch ist.*

Für die Umgebung der Stelle $z = \infty$ der Riemannschen Fläche gilt die Entwicklung:

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{2z\sqrt{z}}\left(1 - \tfrac{1}{4}g_2 z^{-2} - \tfrac{1}{4}g_3 z^{-3}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{z}} + \cdots;$$

es trifft demnach $\lim\limits_{z=\infty} (u \cdot \sqrt{z}) = -1$ und also:

$$\lim_{u=0} (u^2 \cdot \wp(u)) = 1$$

zu. Nehmen wir diese Angaben mit den allgemeinen Sätzen über die Entwicklung einer analytischen Funktion für die Umgebung eines Poles in eine Potenzreihe zusammen (vgl. S. 27), so ergibt sich für $\wp(u)$ der Ansatz:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \cdots;$$

dabei ist der Konvergenzkreis dieser Reihe der Kreis mit dem Mittelpunkte $u = 0$, *dessen Peripherie durch einen am Nullpunkte nächstgelegenen, von* 0 *verschiedenen Gitterpunkt* $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ *hindurchläuft.*[1])

Zur Bestimmung der Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots$ dient nun ein sehr einfacher Kunstgriff. Aus (4) S. 198 folgt durch Differentiation nach u:

$$2\wp''(u) = 12\wp(u)^2 - g_2.$$

Trägt man hier rechts und links für $\wp(u)$ die in Ansatz gebrachte Reihenentwicklung ein, so ergibt die Koeffizientenvergleichung zunächst:

$$c_0 = 0, \qquad 20c_1 = g_2;$$

für $\nu > 1$ aber folgt als Rekursionsformel zur Bestimmung von c_ν:

$$\tfrac{1}{3}c_\nu\,(\nu(2\nu - 1) - 6) = c_1 c_{\nu-2} + c_2 c_{\nu-3} + c_3 c_{\nu-4} + \cdots + c_{\nu-2} c_1.$$

Diese Formel versagt nur für $\nu = 2$; haben wir aber c_2 auf anderem Wege bestimmt, so können wir alle weiteren c_ν aus ihr berechnen. Zur Bestimmung von c_2 tragen wir die für $\wp(u)$ angesetzte Reihe rechts und links in (4) S. 198 ein; der Vergleich der Absolutglieder rechts und links liefert $28c_2 = g_3$.

Die in den berechneten Ausdrücken der c_ν auftretenden numerischen Nenner wollen wir in die Primfaktoren zerlegen und leiten übrigens aus der Reihe für $\wp(u)$ durch Differentiation gleich auch die für $\wp'(u)$ ab. *Die Potenzreihen der elliptischen Funktion erster Stufe* $\wp(u)$ *und* $\wp'(u)$ *für den schon vorhin festgelegten Konvergenzkreis um* $u = 0$ *haben die Anfangsglieder:*

$$(1)\quad \begin{cases} \wp(u) = \dfrac{1}{u^2} + * + \dfrac{g_2}{2^2\cdot 5}u^2 + \dfrac{g_3}{2^2\cdot 7}u^4 + \dfrac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}u^6 + \dfrac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^8 + \cdots, \\ \wp'(u) = -\dfrac{2}{u^3} + * + \dfrac{g_2}{2\cdot 5}u + \dfrac{g_3}{7}u^3 + \dfrac{g_2^2}{2^3\cdot 5^2}u^5 + \dfrac{3g_2g_3}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^7 + \cdots, \end{cases}$$

1) Benutzen wir das reduzierte Querschnittsystem, so sind in *allen* Fällen $+\omega_2$ und $-\omega_2$ am Nullpunkt nächstgelegene Gitterpunkte. Ist das Periodenparallelogramm ein „Rhombus“, so liegen die Gitterpunkte $\pm\omega_1$ ebenso nahe am Nullpunkte, im äquianharmonischen Falle auch noch $\pm(\omega_1 + \omega_2) = \pm\omega_3$. Wir kommen später ausführlich hierauf zurück.

wobei die rechts eingefügten Sterne darauf aufmerksam machen sollen, daß in der ersten Reihe das Absolutglied und in der zweiten das Glied mit der Potenz u^{-1} *nicht auftritt.*

Wie man sieht, sind die Koeffizienten c_1 und c_2 abgesehen von numerischen Faktoren mit den beiden ganzen rationalen Invarianten zweiter und dritter Dimension g_2 und g_3 der Verzweigungsform identisch. Weiter aber liefert mit Rücksicht auf die Entwicklungen von S. 123 die Rekursionsformel der c_ν unmittelbar das Resultat: *Der Koeffizient* c_ν *der Potenz* $u^{2\nu}$ *in der Entwicklung von* $\wp(u)$ *ist eine ganze rationale Invariante der Verzweigungsform von der Dimension* $(\nu + 1)$ *und läßt sich demnach auf Grund des Ansatzes* (14) S. 123 *als ganze rationale Funktion der* g_2, g_3 *bis auf numerische Faktoren sofort anschreiben.*

Die Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ zeigen hier ihren Charakter als elliptische Funktionen *erster* Stufe insofern aufs neue, als die „rationalen" Invarianten die Entwicklungskoeffizienten in (1) zusammensetzen. Wollen wir übrigens die Abhängigkeit von g_2 und g_3 in den Symbolen unserer Funktionen mit zum Ausdruck bringen, so schreiben wir ausführlicher:

$$\wp(u; g_2, g_3), \quad \wp'(u; g_2, g_3).$$

Auf Grund von (6) S. 199 gewinnen wir aus (1) nun auch eine Potenzreihe für die eindeutige Funktion $\zeta(u)$ in der Umgebung von $u = 0$. Hierbei ist es besonders zweckmäßig, über die untere Grenze des Normalintegrales zweiter Gattung nunmehr so zu verfügen, *daß in der sich ergebenden Potenzreihe für* $\zeta(u)$ *kein Absolutglied auftritt;* $\zeta(u)$ wird auf diese Weise eine *ungerade* Funktion von u. *Das nunmehr eindeutig bestimmte Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe* $\zeta(u)$ *gestattet in der Umgebung von* $u = 0$ *die Darstellung:*

$$(2)\quad \zeta(u) = \frac{1}{u} + * - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^9 - \cdots,$$

deren Konvergenzkreis natürlich wieder der bisherige ist. Der Stern soll darauf aufmerksam machen, daß in der Entwicklung dieser ungeraden Funktion das Glied mit u^1 fehlt. Soll die Abhängigkeit von g_2 und g_3 besonders hervorgehoben werden, so bedienen wir uns der Bezeichnung $\zeta(u; g_2, g_3)$ für das Integral zweiter Gattung erster Stufe.

§ 4. Darstellung der Elementarintegrale in u. Vorläufiges über die Additionstheoreme.

Die Beziehung des Elementarintegrales Z_t zum Normalintegral zweiter Gattung ist in (4) S. 152 aufgestellt. Die Entwicklung von Z_t in der Umgebung der Stelle t hatte das Anfangsglied z'^{-1}, unter z' die „normale" Entwicklungsgröße (s. S. 140) verstanden. Der Faktor $\frac{dt'}{du_t}$ auf

der linken Seite der genannten Gleichung wird hier in neuer Weise verständlich. Entspricht nämlich der Stelle t der F_2 der Punkt v des Periodenparallelogramms, so bewirkt jener Faktor, daß $\frac{dt'}{du_t} \cdot Z_t$ als Funktion von u in der Umgebung jener Stelle v einfach das Anfangsglied $(u-v)^{-1}$ der Potenzreihenentwicklung gewinnt.

Man erkennt nun nach den S. 197 auf die elliptischen Funktionen angewandten Überlegungen in $\zeta(u-v)$ ein Integral zweiter Gattung mit *einem* bei v gelegenen Pole[1]) und zufolge (2) S. 201 mit dem Anfangsgliede $(u-v)^{-1}$ der Entwicklung nach Potenzen von $(u-v)$. Somit ist $\frac{dt'}{du_t} \cdot Z_t$ bis auf eine additive Konstante gleich $\zeta(u-v)$; und die Gleichung (4) S. 152 ergibt in unseren jetzigen Bezeichnungen, wenn u_0 der Stelle z_0 entspricht:

$$\zeta(u-v) - \zeta(u_0-v) = \frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{2(\wp(u)-\wp(v))} - \frac{\wp'(u_0)+\wp'(v)}{2(\wp(u_0)-\wp(v))} + \zeta(u) - \zeta(u_0).$$

Wir erkennen hieraus, daß:

$$\zeta(u-v) - \zeta(u) + \zeta(v) - \frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{2(\wp(u)-\wp(v))}$$

einen von u unabhängigen Wert hat, der sich, da das Quadrat dieses Ausdrucks in u und v symmetrisch ist, auch als von v unabhängig erweist. Zur Berechnung dieses Wertes entwickeln wir den Ausdruck etwa nach Potenzen von u, wobei also nur ein einziges Glied, nämlich das Absolutglied auftreten darf, das dann eben jenen zu berechnenden Wert ergibt. Die Rechnung, welche die Reihen (1) und (2) des vorigen Paragraphen zu benutzen hat, liefert auf diese Weise den Wert 0 für die gesuchte von u und v unabhängige Größe. *Für das Elementarintegral zweiter Gattung $\zeta(u-v)$ mit dem Pole v gewinnen wir somit die Darstellung:*

(1) $$\zeta(u-v) = \zeta(u) - \zeta(v) + \frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{2(\wp(u)-\wp(v))}.$$

Nehmen wir einen Zeichenwechsel von v in dieser Gleichung vor, so nimmt dieselbe, da $\wp$ eine gerade Funktion und $\wp'$ sowie ζ ungerade Funktionen sind, die Gestalt an:

(2) $$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{2(\wp(u)-\wp(v))}$$

und lehrt somit, *daß sich ζ, gebildet für die Summe $(u+v)$, in einfacher Weise rational durch die Funktionen $\zeta, \wp, \wp'$, gebildet für die einzelnen Summanden u, v, ausdrücken läßt.* Wir haben damit das sogenannte *„Additionstheorem"* für das Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe

1) Siehe auch die Note S. 198.

gewonnen, einen ersten Spezialfall einer Reihe wichtiger Theoreme, die wir später in einem besonderen Kapitel behandeln werden.

Im Mittelpunkte der algebraischen Entwicklungen zum invarianten Aufbau der Elementarintegrale stand die in (10) S. 146 gegebene algebraische Funktion zweier Flächenpunkte $\Phi(z, t)$, die symmetrisch in z und t war und etwa bei festgehaltenem t eine zweiwertige Funktion von z mit einem Pole zweiter Ordnung an der Stelle t lieferte. Zufolge der vorhin angegebenen Beziehung des Elementarintegrals Z_t zum Normalintegral $\zeta(u)$ rechnet sich die Gleichung (13) S. 149 in die folgende Gestalt um:

$$\zeta(u - v) - \zeta(u_0 - v) = -\int_{u_0}^{u} \Phi(z, t)\, du.$$

Durch Differentiation nach u finden wir mit Rücksicht auf (6) S. 199 sofort den Satz: *Unsere Funktion $\Phi(z, t)$ ist in der neuen Bezeichnung einfach identisch mit $\wp(u - v)$:*

$$\Phi(z, t) = \wp(u - v). \tag{3}$$

Tragen wir den ausführlichen Ausdruck von $\Phi(z, t)$ unter Benutzung der Verzweigungsform erster Stufe ein (vgl. S. 146) und nehmen noch einen Zeichenwechsel von v vor, so folgt:

$$\wp(u + v) = \frac{(2\wp(u)\wp(v) - \frac{1}{2}g_2)(\wp(u) + \wp(v)) - g_3 - \wp'(u)\wp'(v)}{2(\wp(u) - \wp(v))^2}. \tag{4}$$

Hier haben wir das *„Additionstheorem“* für die Funktion $\wp$ vor uns und erkennen, *daß sich auch $\wp(u + v)$ in einfacher Art rational durch die Funktionen $\wp$ und $\wp'$ der Summanden u, v darstellt.* Eine etwas einfachere Gestalt des Theorems (4) ergibt sich aus (2), indem man diese Formel einmal nach u und sodann nach v differenziert:

$$-\wp(u + v) = -\wp(u) + \frac{\wp''(u)}{2(\wp(u) - \wp(v))} - \frac{(\wp'(u) - \wp'(v))\wp'(u)}{2(\wp(u) - \wp(v))^2},$$

$$-\wp(u + v) = -\wp(v) - \frac{\wp''(v)}{2(\wp(u) - \wp(v))} + \frac{(\wp'(u) - \wp'(v))\wp'(v)}{2(\wp(u) - \wp(v))^2}.$$

Addiert man diese Gleichungen und benutzt die Relation:

$$\wp''(u) - \wp''(v) = 6(\wp(u)^2 - \wp(v)^2),$$

so ergibt sich leicht als neue Gestalt des Additionstheorems:

$$\wp(u + v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v). \tag{5}$$

Behandelt man diese Gleichung genau wie soeben die Gleichung (2), so gelangt man leicht auch zu einem Ausdrucke für das Additionstheorem der Funktion $\wp'$.

Die gewonnenen Formeln haben übrigens für unsere Entwicklungen von S. 189 ff. noch eine sehr bemerkenswerte Bedeutung. Wir lernten

damals eine *kontinuierliche Gruppe von zweifach unendlich vielen Transformationen der Riemannschen Fläche* F_2 *in sich* kennen, welche wir mittelst des Integrals erster Gattung in der Gestalt:

$$u' = u + v$$

dargestellt fanden, unter v einen Parameter verstanden, der die Fläche des Periodenparallelogramms zu beschreiben hatte. *Hier ist es nun offenbar die Bedeutung der Additionstheoreme;*

$$\wp(u+v) = R_1(\wp(u),\ \wp'(u),\ \wp(v),\ \wp'(v)),$$
$$\wp'(u+v) = R_2(\wp(u),\ \wp'(u),\ \wp(v),\ \wp'(v)),$$

daß sie unmittelbar den algebraischen Ausdruck jener Transformationen der F_2 *in sich darstellen.*

Um schließlich auch noch die *Elementarintegrale dritter Gattung* zu erledigen, haben wir einfach auf den Ausdruck (14) S. 149 dieser Integrale zurückzugehen und denken die damaligen Integrationswege auf das Periodenparallelogramm übertragen. Behalten wir für das Integral, auch wenn wir nunmehr u als Argument einführen, die Bezeichnung P bei, so ergibt sich: *Das Elementarintegral dritter Gattung* P_{v,v_0}^{u,u_0} *mit den Grenzen* u_0 *und* u *und den „Parametern"* v_0 *und* v *stellt sich mittelst der Funktion* $\wp$ *so dar:*

$$(6) \qquad P_{v,v_0}^{u,u_0} = \int_{u_0}^{u} \Big(\int_{v_0}^{v} \wp(u-v)\,dv \Big)\,du;$$

nach Ausführung der Integration in bezug auf v *gewinnt man als Darstellung von* P_{v,v_0}^{u,u_0} *im Integral zweiter Gattung:*

$$(7) \qquad P_{v,v_0}^{u,u_0} = \int_{u_0}^{u} (\zeta(u-v) - \zeta(u-v_0))\,du.$$

§ 5. Darstellung aller elliptischen Funktionen des Körpers durch die Funktionen $\zeta, \wp, \wp', \wp'', \ldots$

Nach (5) S. 198 ist jede elliptische Funktion $\psi(u)$ des vorliegenden Körpers als rationale Funktion von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ darstellbar. Bei der wirklichen Ausrechnung solcher Darstellungen im Einzelfalle kann man sich funktionentheoretischer Schlußweisen bedienen, welche sich auf die Eigenschaften der algebraischen Funktionen und der Integrale der F_2 gründen. Wir notieren z. B. den Satz, *daß eine elliptische Funktion des Körpers, welche im Periodenparallelogramm entweder polfrei ist oder doch nur einen einzigen Pol erster Ordnung haben „könnte", notwendig mit einer Konstanten identisch ist.* Wir machen ferner auf den Satz aufmerksam, *daß eine Funktion, welche entweder eine Konstante*

oder ein Integral erster Gattung sein kann, notwendig mit einer Konstante identisch ist, wenn sie sich bei Vermehrung von u um ω_2 nicht ändert.

Die Darstellung (5) S. 198 einer einzelnen Funktion $\psi(u)$ des Körpers kann man nun durch Vermittlung einer anderen, besonders übersichtlichen Darstellung von $\psi(u)$ in $\zeta, \wp, \wp', \wp'', \ldots$ gewinnen, welche wir hier besprechen wollen. Statt des bisherigen Integrals $\zeta(u)$ benutzen wir hierbei zweckmäßig das „*transzendent normierte*" *Integral* (vgl. darüber oben S. 163):

$$\bar{\zeta}(u) = \zeta(u) - \frac{\eta_2}{\omega_2} u, \tag{1}$$

welches zufolge der Legendreschen Relation (6) S. 160 folgenden Bedingungen genügt:

$$\bar{\zeta}(u + \omega_1) = \bar{\zeta}(u) - \frac{2i\pi}{\omega_2}, \quad \bar{\zeta}(u + \omega_2) = \bar{\zeta}(u) \tag{2}$$

und also insbesondere bei Vermehrung von u um ω_2 unverändert bleibt.

Die darzustellende Funktion $\psi(u)$ habe nun an der Stelle v des Periodenparallelogramms einen Pol ν^{ter} Ordnung, und zwar gelte für die Umgebung desselben die Entwicklung:

$$\psi(u) = c_{-\nu}(u-v)^{-\nu} + c_{-\nu+1}(u-v)^{-\nu+1} + \cdots$$
$$+ c_{-1}(u-v)^{-1} + c_0 + c_1(u-v) + \cdots.$$

In der gleichen Umgebung gelten die Darstellungen:

$$\bar{\zeta}(u-v) = \frac{1}{u-v} + \cdots, \quad \wp(u-v) = \frac{1}{(u-v)^2} + \frac{g_2}{20}(u-v)^2 + \cdots,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\wp^{(\nu-2)}(u-v) = (-1)^\nu \frac{(\nu-1)!}{(u-v)^\nu} + c_0' + c_1'(u-v) + \cdots,$$

wobei wichtig ist, daß in jeder Reihe nur ein einziges Glied mit negativem Exponenten auftritt. Wir können daraufhin leicht ein Aggregat:

$$A\bar{\zeta}(u-v) + B\wp(u-v) + C\wp'(u-v) + D\wp''(u-v) + \cdots \tag{3}$$

bilden, dessen Entwicklung nach Potenzen von $(u-v)$ in den ν ersten Gliedern mit der Reihe für $\psi(u)$ genau übereinstimmt; man hat zu setzen:

$$A = c_{-1}, \; B = c_{-2}, \; C = -\tfrac{1}{2}c_{-3}, \; D = \tfrac{1}{6}c_{-4}, \cdots$$

Einen von v verschiedenen Pol hat übrigens das Aggregat im Periodenparallelogramm nicht. Zieht man dieses Aggregat also von $\psi(u)$ ab, so bleibt die Differenz im Punkte v analytisch und wird übrigens nur wieder die sonstigen Pole von $\psi(u)$, und keine weiteren, aufweisen.

Man wolle nun für jeden dieser übrigen im Periodenparallelogramm gelegenen Pole ein entsprechendes Aggregat abziehen und gelangt schließlich zu einer Differenz, welche im Parallelogramm überall polfrei (analytisch) ist. Wegen der ersten Glieder in den Aggregaten (3) scheint

zunächst noch die Möglichkeit zu bestehen, daß diese Differenz ein Integral und dann natürlich ein solches erster Gattung ist. Aber die Differenz ändert sich zufolge (2) bei Vermehrung von u um ω_2 nicht und ist deshalb mit einer Konstanten A_0 identisch. *Die elliptische Funktion $\psi(u)$ des vorliegenden Körpers läßt sich demnach durch das transzendent normierte Integral zweiter Gattung, die $\wp$-Funktion und ihre Ableitungen in der Gestalt:*

$$(4) \quad \psi(u) = A_0 + \sum_k \{ A_k \zeta(u - v_k) + B_k \wp(u - v_k) + C_k \wp'(u - v_k) + \cdots \}$$

darstellen, wobei sich die Summe auf die verschiedenen im Periodenparallelogramm gelegenen Pole von $\psi(u)$ bezieht.[1])

Bei Vermehrung von u um ω_1 ändert sich das erste Glied des einzelnen Aggregates in (4) rechts zufolge (2) um

$$-\frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot A_k.$$

Da $\psi(u)$ selbst indessen bei Vermehrung des u um ω_1 unverändert bleibt, so folgt: *Die auf die gesamten im Periodenparallelogramm gelegenen Pole von $\psi(u)$ bezogene Summe der Koeffizienten A_k verschwindet:*

$$(5) \qquad \sum_k A_k = 0.$$

Dieser Satz läßt sich auch unmittelbar auf Grund des an (3) S. 38 angeschlossenen allgemeinen Residuensatzes beweisen, wie späterhin noch näher auszuführen ist. Im übrigen erkennen wir in Gleichung (5) einfach den S. 141 aufgestellten Satz wieder, daß die Summe der Residuen aller logarithmischen Unstetigkeitspunkte des Integrals:

$$\int \psi(u)\, du$$

verschwindet, wobei sich die Sprechweise „*aller* Unstetigkeitspunkte" natürlich der F_2 entsprechend nur auf ein einzelnes Periodenparallelogramm bezieht.

Zufolge (5) können wir übrigens in (4), ohne den Charakter dieser Gleichung zu ändern, auch wieder das ursprüngliche ζ statt des transzendent normierten Integrals ζ einführen. Es ergibt sich einfach:

$$(6) \quad \psi(u) = A_0' + \sum_k \{ A_k \zeta(u - v_k) + B_k \wp(u - v_k) + C_k \wp'(u - v_k) + \cdots \},$$

wobei die Konstante A_0' gegeben ist durch:

$$A_0' = A_0 + \frac{\eta_2}{\omega_2} \sum_k A_k v_k.$$

1) In algebraischer Gestalt findet man die gleiche Überlegung S. 151 zur Aufstellung des allgemeinsten elliptischen Integrals der F_2 angewandt. Übrigens erkennt man in der Gleichung (4) ein Analogon der Partialbruchzerlegung (1) S. 61 einer rationalen Funktion.

Will man nun von hieraus die rationale Darstellung von $\psi(u)$ in $\wp(u)$, $\wp'(u)$ gewinnen, so hat man zunächst die aus (4) S. 198 durch Differentiation entspringenden Gleichungen:

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \tfrac{1}{2}g_2, \quad \wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u), \cdots$$

zu benutzen, welche alle höheren Ableitungen $\wp''(u)$, $\wp'''(u), \cdots$ als rationale ganze Funktion von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ darstellen. Die alsdann noch bleibenden Ausdrücke:

$$\zeta(u - v_k), \quad \wp(u - v_k), \quad \wp'(u - v_k)$$

sind hierauf weiter auf Grund der Additionstheoreme (1)ff. des vorigen Paragraphen durch $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ auszudrücken, wobei sich zufolge (5) die mit $\zeta(u)$ behafteten Glieder in der Summe gerade aufheben. Das Ergebnis ist die Darstellung von $\psi(u)$ in der Gestalt (5) S. 198 als rationale Funktion vom $\wp(u)$ und $\wp'(u)$.

§ 6. Die ganze transzendente Funktion $\sigma(u; g_2, g_3)$.

Wir haben jetzt die Aufmerksamkeit auf die Existenz einer gewissen ganzen transzendenten Funktion von u zu lenken, die in dem Gesamtsystem aller im Anschluß an die F_2 betrachteten Funktionen als das einfachste Element zu betrachten ist.

Durch Integration von $\zeta(u)$ erhält man eine unendlich vieldeutige Funktion:

$$(1) \qquad \int \zeta(u)\,du,$$

die in den Gitterpunkten des Parallelogrammnetzes $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ logarithmische Unstetigkeitspunkte hat, in der Umgebung jedes anderen endlichen Punktes u indessen analytisch ist. In der Umgebung des Gitterpunktes $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ ist das Integral (1) zufolge der Gleichung:

$$\zeta(u) = \zeta(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2) + m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

und der Reihenentwicklung (2) S. 201, abgesehen von einer daselbst analytischen Funktion, gleich $\log(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)$. Demnach wird die Exponentialfunktion des Integrales (1):

$$(2) \qquad e^{\int \zeta(u)\,du}$$

in den Gitterpunkten und also in der ganzen endlichen u-Ebene wieder überall analytisch; sie ist also in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene *eine eindeutige, endliche und analytische Funktion von u.* Die Funktion (2) ist weiter durch die Eigenschaft ausgezeichnet, *daß sie in jedem Gitterpunkte einen Nullpunkt erster Ordnung hat und in jedem anderen endlichen Punkte u von 0 verschieden ist*; es handelt sich hier also um *eine ganze transzendente Funktion* von u.

In (1) blieb die untere Grenze noch unbestimmt, so daß unsere ganze Funktion (2) nur erst bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist. Wir wollen nun die hier noch erforderliche Festsetzung so treffen, daß:

$$\lim_{u=0}\left(u^{-1}\cdot e^{\int \zeta(u)\,du}\right)=1$$

gilt. Dies erreichen wir in der Art, daß wir zunächst das Integral aufstellen:

$$\int\limits_0^u\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du,$$

welches übrigens zufolge (2) S. 201 in der Umgebung des Nullpunktes die Entwicklung gestattet:

$$(3)\quad \int\limits_0^u\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du=-\frac{g_2}{2^4\cdot 3\cdot 5}u^4-\frac{g_3}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}u^6-\frac{g_2^2}{2^7\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}u^8$$
$$-\frac{g_2 g_3}{2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}u^{10}-\cdots.$$

Das Integral (1) gestalten wir alsdann einfach zu folgendem bestimmten Integrale aus:

$$\log u+\int\limits_0^u\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du.$$

Die nunmehr eindeutig bestimmte Exponentialfunktion dieses Integrals ist die von Weierstraß eingeführte und von ihm durch $\sigma(u)$ bezeichnete *ganze transzendente Funktion:*

$$(4)\qquad \sigma(u)=u\cdot e^{\int\limits_0^u\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du},$$

welche weiterhin die mannigfachste Verwendung finden wird; sie ist eine *ungerade Funktion von u, die* (wie oben schon bemerkt) *in jedem Gitterpunkte einen Nullpunkt erster Ordnung hat, aber sonst für jedes endliche u von* 0 *verschieden ist.*

Tragen wir die in (3) rechts stehende Reihe als Argument in die Exponentialreihe ein und setzen den Faktor u hinzu, so ergibt sich als *Potenzreihe für die σ-Funktion:*

$$(5)\ \sigma(u)=u+*-\frac{g_2}{2^4\cdot 3\cdot 5}u^5-\frac{g_3}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}u^7-\frac{g_2^2}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}u^9-\frac{g_2 g_3}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}u^{11}-\cdots.$$

Die rechnerische Herstellung dieser Reihe aus der Reihe (3) bezieht sich natürlich auf die Umgebung des Nullpunktes $u=0$. Die Reihe (5) selbst ist jedoch *„beständig konvergent“*, da $\sigma(u)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Durch den Stern auf der rechten Seite von (5) soll hervorgehoben werden, daß das Glied mit der Potenz u^3 in der Potenzreihe von $\sigma(u)$ ausfällt.

Wollen wir die Abhängigkeit der Funktion $\sigma(u)$ von den Invarianten g_2, g_3 zum Ausdruck bringen, so bezeichnen wir die Funktion durch das Symbol $\sigma(u;\, g_2,\, g_3)$. Wir werden späterhin eine partielle Differentialgleichung aufstellen, welche diese Funktion in bezug auf ihre drei Argumente u, g_2, g_3 befriedigt. Aus dieser Differentialgleichung läßt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten der Potenzreihe (5) ableiten. Man findet auf diesem Wege in der S. 117 genannten Schrift von H. A. Schwarz die Koeffizienten der Potenzreihe (5) der Funktion $\sigma(u)$ bis zur Potenz u^{35} einschließlich wirklich berechnet.

Wir haben endlich das Verhalten der Funktion $\sigma(u)$ bei Vermehrung von u um Perioden festzustellen. Aus der Definition von $\sigma(u)$ ergibt sich unmittelbar folgende *Darstellung des Integrals zweiter Gattung* $\zeta(u)$ *durch die* σ*-Funktion:*

$$(6) \qquad \zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

Aus (4) S. 196 folgt demnach, wenn k einer der beiden Indizes 1 oder 2 ist:

$$\frac{\sigma'(u+\omega_k)}{\sigma(u+\omega_k)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta_k.$$

Durch Integration und Herstellung der Exponentialfunktion des Ergebnisses findet man:

$$\sigma(u+\omega_k) = c \cdot e^{\eta_k u} \cdot \sigma(u),$$

unter c eine von u unabhängige Größe verstanden. Tragen wir $u = -\frac{1}{2}\omega_k$ ein und berücksichtigen, daß $\sigma(u)$ eine ungerade Funktion ist und $\sigma(\frac{1}{2}\omega_k)$ nicht verschwindet, so erhält man:

$$c \cdot e^{-\frac{\eta_k \omega_k}{2}} = -1,$$

woraus sich c sofort ergibt: *Bei Vermehrung von* u *um Perioden zeigt die Funktion* $\sigma(u)$ *das Verhalten:*

$$(7) \quad \sigma(u+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(u+\frac{1}{2}\omega_1\right)}\sigma(u), \quad \sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(u+\frac{1}{2}\omega_2\right)}\sigma(u),$$

ändert sich also um die multiplikative Exponentialfunktion des Integrals erster Gattung:

$$\eta_k u + \tfrac{1}{2}\eta_k\omega_k + \pi i.$$

Übrigens zeigt man von (7) aus durch den Schluß der vollständigen Induktion mit Hilfe der Legendreschen Relation (6) S. 160 leicht die für beliebige ganze Zahlen m_1, m_2 gültige Regel:

$$(8) \quad \sigma(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)}\sigma(u).$$

Aus der Funktion $\sigma(u)$ stellt man einfach in der Gestalt $\sigma(u-v)$ eine ganze transzendente Funktion von u her, welche *an der beliebig*

vorzuschreibenden Stelle v des Periodenparallelogramms ihren Nullpunkt erster Ordnung hat und dann natürlich auch in den mit v äquivalenten Punkten des Parallelogrammnetzes verschwindet. Man kann diese Funktion selbstverständlich auch im Anschluß an das Integral zweiter Gattung durch:

$$\sigma(u-v) = (u-v)\cdot e^{\int\limits_v^u\left(\zeta(u-v)-\frac{1}{u-v}\right)du} \tag{9}$$

erklären; bei Vermehrung von u um ω_k ändert sie sich um den Faktor:

$$-e^{\eta_k\left(u-v+\frac{1}{2}\omega_k\right)} = e^{\eta_k\left(u-v+\frac{1}{2}\omega_k\right)+\pi i}. \tag{10}$$

Übertragen wir die Funktionswerte $\sigma(u-v)$ auf die Riemannsche Fläche F_2, wo dem Werte v die Stelle t entspreche, so ergibt sich eine auf der F_2 überall analytische, etwa durch $E(z,t)$ zu bezeichnende Funktion, *welche nur einen einzigen an der Stelle t gelegenen Nullpunkt erster Ordnung hat, sonst aber überall endlich und von 0 verschieden ist.* Bei Fortsetzung über den geschlossenen Weg Q_k geht diese Funktion *in sich selbst, multipliziert mit der Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung* über:

$$E'(z,t) = e^{\eta_k\left(u^{z,t}+\frac{1}{2}\omega_k\right)+\pi i}\cdot E(z,t). \tag{11}$$

Nach Weierstraß, der Funktionen dieser Art zuerst betrachtete[1]), bezeichnen wir $E(z,t)$ als eine „*Primfunktion*" der Fläche F_2[2]); sie ist auf der F_2 unendlich vieldeutig, ihr Feld F_∞ ist mit dem der Funktion u identisch.

Wir hätten die Primfunktion $E(z,t)$ auch bereits bei der algebraischen Behandlung der F_2 (vgl. S. 145ff.) einführen können und wollen hier nachträglich eine invariante Darstellung derselben auf der F_2 angeben. Zu diesem Zwecke leiten wir aus (9) die Gleichung ab:

$$\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u_0-v)} = \frac{u-v}{u_0-v}\cdot e^{\int\limits_v^u\left(\zeta(u-v)-\frac{1}{u-v}\right)du-\int\limits_v^{u_0}\left(\zeta(u-v)-\frac{1}{u-v}\right)du}.$$

Faßt man die Integrale rechter Hand zusammen und ändert die zunächst von u_0 über v nach u laufende Integrationsbahn in der Art unter Festhaltung von u_0 und u ein wenig ab, daß sie nicht mehr durch v hin-

---

1) Siehe den in Weierstraß „Werken", Bd. 2, S. 235 veröffentlichten Brief an Schwarz vom 3. Oktober 1875; die Bezeichnung E ist diesem Briefe entlehnt.

2) Bei der Produktdarstellung der algebraischen Funktionen der F_2 (siehe darüber die Entwicklungen des nächsten Paragraphen) spielt $E(z,t)$ dieselbe Rolle wie die „Primzahlen" bei der Zerlegung der rationalen Zahlen.

durchläuft, so darf man die Differenz $(\zeta(u-v) - (u-v)^{-1})$ gliedweise integrieren und findet:

$$\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u_0-v)} = e^{\int\limits_{u_0}^{u} \zeta(u-v)\,du}.$$

Hieraus geht, wenn wir neben v noch eine Stelle v_0 einführen,

$$\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u_0-v_0)}{\sigma(u_0-v)\,\sigma(u-v_0)} = e^{\int\limits_{u_0}^{u} (\zeta(u-v)-\zeta(u-v_0))\,du}.$$

hervor, wo jetzt zufolge (7) S. 204 rechts im Exponenten unser Integral $P^{u,\,u_0}_{v,\,v_0}$ gewonnen ist. Notieren wir hier also gleich als ein zunächst beiläufiges Ergebnis: *Das Elementarintegral dritter Gattung* $P^{u,\,u_0}_{v,\,v_0}$ *hängt mit der σ-Funktion so zusammen:*

(12) $$e^{P^{u,\,u_0}_{v,\,v_0}} = \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u_0-v_0)}{\sigma(u_0-v)\,\sigma(u-v_0)}.$$

Man lasse nun die Stelle u unendlich nahe an v und u_0 ebenso an v_0 heranrücken; wir haben dann zu setzen:

$$u = v + dv, \qquad u_0 = v_0 + dv_0$$

und gewinnen aus den Eigenschaften der σ-Funktion:

$$\sigma(u-v) = \sigma(dv) = dv, \qquad \sigma(u_0-v_0) = \sigma(dv_0) = dv_0,$$
$$\sigma(u_0-v) = \sigma(v_0-v) = -\sigma(v-v_0), \qquad \sigma(u-v_0) = \sigma(v-v_0).$$

Gleichung (12) nimmt hiernach die Gestalt an:

$$e^{P^{v+dv,\,v_0+dv_0}_{v,\,v_0}} = -\frac{dv\cdot dv_0}{(\sigma(v-v_0))^2}.$$

Da die Bezeichnung u jetzt frei geworden ist, wollen wir weiterhin u statt v schreiben, um den Index 0 bei v_0 fortlassen zu können. Lösen wir die letzte Gleichung nach $\sigma(u-v)$ auf, so ergibt sich:

$$\sigma(u-v) = \sqrt{-\,du\,dv\cdot e^{-P^{u+du,\,v+dv}_{u,\,v}}}.$$

Wir brauchen jetzt nur noch diese Gleichung auf die Fläche F_2 zu übertragen, wobei wir das Integral dritter Gattung in seiner ursprünglichen invarianten Darstellungsform $P^{z,\,z_0}_{t,\,t_0}$ wieder einzuführen haben. *So gewinnen wir als invariante Darstellung der Primfunktion und damit der σ-Funktion auf der Riemannschen Fläche* F_2 *durch das Elementarintegral dritter Gattung:*

(13) $$\sigma(u-v) = E(z,t) = \sqrt{-\,du_z\,du_t\cdot e^{-P^{z+dz,\,t+dt}_{z,\,t}}}.$$

Diese von **Klein** aufgestellte Gleichung ist um so wichtiger, als sich gezeigt hat, daß sie für Riemannsche Flächen beliebigen Geschlechtes p verallgemeinerungsfähig ist. Sie behält dabei ihre rechtsseitige Gestalt

14*

vollständig bei; nur hat man sich bei der Herstellung des „überall endlichen Differentials“ du_z, sobald $p > 1$ ist, an Stelle von z *homogener Variabeln* z_1, z_2 wie oben (S. 119ff.) zu bedienen. An Stelle der „Funktion“ $E(z,t)$ tritt alsdann für $p > 1$ die von Klein mit $\Omega(z_1, z_2; t_1, t_2)$ bezeichnete *„Primform“*.[1])

§ 7. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die σ-Funktion.

Aus der oben gegebenen Erklärung der Funktion $\sigma(u)$ fließen umgekehrt die Darstellungen:

$$(1) \quad \zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du}, \quad \wp(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}, \quad \wp'(u) = -\frac{d^3 \log \sigma(u)}{du^3}$$

des Integrals zweiter Gattung und der Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$, von denen wir die erste bereits oben (S. 209) zu nennen hatten. Auch die *Darstellung des Elementarintegrales dritter Gattung durch die Funktion* $\sigma(u)$:

$$(2) \qquad P_{v, v_0}^{u, u_0} = \log \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u_0-v_0)}{\sigma(u_0-v)\,\sigma(u-v_0)}$$

ist eine unmittelbare Folge der Gleichung (12) S. 211; das hier dargestellte Integral gestattet, wie man sieht, *„Vertauschung der Argumente und Parameter“* (vgl. S. 150 und 163).

Hierüber hinaus können wir für jede beliebige elliptische Funktion $\psi(u)$ des vorgelegten Körpers eine Produktdarstellung mittels der σ-Funktion aufbauen, welche auf der Eigenschaft dieser letzteren Funktion als „Primfunktion“ beruht. Die Funktion $\psi(u)$ sei m-wertig, und es mögen ihre m Nullpunkte im ersten Periodenparallelogramm[2]) bei $v_1, v_2, \ldots, v_m$ gelegen sein, ihre m Pole bei $w_1, w_2, \ldots, w_m$; ein Nullpunkt oder Pol höherer als erster Ordnung muß hierbei so oft aufgeführt sein, als seine Ordnung erfordert.[3])

Die in Aussicht genommene Darstellung von $\psi(u)$ könnten wir leicht auf Grund der Sätze von § 5, S. 204ff., gewinnen, doch ist mit Rücksicht auf die Entwicklungen des nächsten Paragraphen folgende selbständige

---

1) Siehe Klein, „Über hyperelliptische Sigmafunktionen“, Math. Ann. Bd. 27 (1886), S. 431 (insbes. § 12), „Zur Theorie der Abelschen Funktionen“, Math. Ann. Bd. 36 (1889), S. 1ff. Man vgl. auch „Modulfunktionen“, Bd. 2 S. 502ff.

2) Natürlich müssen wir, wie oben (S. 195), von zwei homologen Punkten der Gegenseiten wieder nur einen als zum Parallelogramm gehörig ansehen; wir rechnen etwa die beiden von 0 nach ω_1 und ω_2 ziehenden Seiten zum Parallelogramm, wo dann die gegenüberliegenden Seiten den Nachbarparallelogrammen angehören.

3) Wir erinnern daran, daß, wenn von den m Punkten, in denen $\psi(u)$ irgendeinen vorgeschriebenen komplexen Wert ψ_0 annimmt, etwa ν Punkte bei u_0 koinzidieren, diese Stelle bei Abbildung des Periodenparallelogramms auf eine m-blättrige Fläche über der ψ-Ebene einen ν-blättrigen Verzweigungspunkt liefert.

Überlegung vorzuziehen: Man bilde, den Nullpunkten und Polen von $\psi(u)$ entsprechend, den nachfolgenden Quotienten zweier m-gliedriger σ-Produkte:

$$\frac{\sigma(u-v_1)\cdot\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\cdot\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)}. \tag{3}$$

Die hierdurch gegebene eindeutige Funktion von u stimmt, was Lage und Ordnung der Nullpunkte und Pole angeht, genau mit $\psi(u)$ überein, so daß das Produkt von $\psi(u)$ und dem reziproken Werte des Ausdrucks (3) eine in der ganzen endlichen u-Ebene endliche, nichtverschwindende analytische Funktion ist. Demnach ist auch noch der natürliche Logarithmus dieses Produktes in der ganzen endlichen u-Ebene analytisch und eindeutig.[1]) Bei Vermehrung von u um ω_k nimmt aber unser Produkt zufolge (7) S. 209 den von u unabhängigen Faktor an:

$$e^{\eta_k(v_1+v_2+\cdots+v_m-w_1-w_2-\cdots-w_m)}.$$

Jener Logarithmus ändert sich also bei Zunahme von u um ω_k um einen von u unabhängigen additiven Betrag und erweist sich demnach als ein Integral erster Gattung.[2]) Hieraus ergibt sich, daß unsere Funktion $\psi(u)$ in folgender Art darstellbar sein muß:

$$\psi(u) = C\cdot e^{Au}\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)},$$

unter A und C Konstante verstanden.

C bleibt notwendig unbestimmt, solange wir nur erst die Nullpunkte und Pole von $\psi(u)$ geben. Dagegen ist A aus der Bedingung bestimmbar, daß $\psi(u)$ bei Vermehrung des Argumentes u sowohl um ω_1 als ω_2 unverändert bleiben muß. Diese Forderung liefert die beiden Gleichungen:

$$e^{A\omega_k-\eta_k(v_1+v_2+\cdots+v_m-w_1-w_2-\cdots-w_m)} = 1,$$

welche, unter m_1 und m_2 zwei ganze Zahlen verstanden, auch so geschrieben werden können:

$$(4)\quad \begin{cases} A\omega_1-\eta_1\,(v_1+v_2+\cdots+v_m-w_1-w_2-\cdots-w_m) = +\,2m_2\pi i,\\ A\omega_2-\eta_2\,(v_1+v_2+\cdots+v_m-w_1-w_2-\cdots-w_m) = -\,2m_1\pi i.\end{cases}$$

Wir wollen diese beiden Gleichungen zunächst zur Elimination der beiden ersten Glieder $A\omega_1$, $A\omega_2$ verbinden und gewinnen so mit Benutzung der Legendreschen Relation (6) S. 160:

$$v_1+v_2+\cdots+v_m-w_1-w_2-\cdots-w_m = m_1\omega_1+m_2\omega_2. \tag{5}$$

1) Die Funktion $\log z$ hat nach S. 52 ff. eben nur $z=0$ und $z=\infty$ zu singulären, und zwar wesentlich singulären Punkten und erweist sich nur bei Umläufen um diese Punkte als mehrdeutig.

2) Siehe die Note S. 198 in sinngemäßer Übertragung auf die Integrale erster Gattung.

Hierdurch ist die höchst wichtige Tatsache aufgedeckt, *daß die Nullpunkte v und Pole w unserer elliptischen Funktion* $\psi(u)$ *nicht, wie z. B. die Nullpunkte und Pole einer rationalen Funktion, völlig frei beweglich sind, sondern jedenfalls durch „eine" Relation, eben die Gleichung* (5) *mit zwei ganzen Zahlen* m_1, m_2 *aneinander gebunden sind.* Umgekehrt liefert uns für die hier vorgelegte Funktion die Gleichung (5) die besonderen ihr zugehörigen ganzen Zahlen m_1, m_2.

Kombinieren wir jetzt die Gleichungen (4) zur Elimination der Glieder mit η_1, η_2, so folgt unter erneuter Anwendung der Legendreschen Relation (6) S. 160:

$$A = m_1\eta_1 + m_2\eta_2.$$

Unsere m-wertige elliptische Funktion $\psi(u)$, *für deren Nullpunkte und Pole die Relation* (5) *mit zwei ganzen Zahlen* m_1, m_2 *gültig ist, läßt sich in folgender Art als Quotient zweier m-gliedrigen* σ*-Produkte darstellen*[1]):

$$(6)\qquad \psi(u) = C\cdot e^{(m_1\eta_1+m_2\eta_2)u}\,\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)}.$$

Übrigens erkennt man leicht, daß auch die Umkehrung gilt: *Sind zwei Punktsysteme des Periodenparallelogramms* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *und* $w_1, w_2, \ldots, w_m$ *irgendwie so gewählt, daß die Gleichung* (5) *mit ganzzahligen* m_1, m_2 *gilt, so gewinnt man in* (6) *stets eine zugehörige elliptische Funktion, deren Wertigkeit* $\leqq m$ *ist.* Wir haben hierbei der Möglichkeit, daß die Wertigkeit $< m$ ist, Raum gegeben, um die Fälle, daß Nullstellen v mit Polen w zum Zusammenfall und damit zum gegenseitigen Fortheben kommen, nicht auszuschließen.

Die Gleichung (5) bringt das *„Abelsche Theorem"*[2]) für das elliptische Integral erster Gattung zum Ausdruck und soll weiterhin unter dieser Benennung zitiert werden. Die Bedeutung dieser Formel und der in ihr auftretenden ganzen Zahlen m_1, m_2 wird durch folgende Betrachtung aufgeklärt. Wir wollen die m-blättrige Riemannsche Fläche F_m über der ψ-Ebene einführen, auf welche das Periodenparallelogramm durch die Funktion $\psi(u)$ abgebildet wird. Auch umgekehrt wollen wir uns sogleich wieder die F_m auf alle Periodenparallelogramme unseres Netzes abgebildet denken, wo dann im einzelnen Parallelogramme gerade m Bilder der „ψ-Ebene" als nebeneinander gelagerte Bereiche Platz finden. Die Bilder solcher Blätter der Fläche F_m, welche vom Quer-

1) Wie die Darstellung (6) S. 206 der Partialbruchzerlegung (1) S. 61 der rationalen Funktion gegenüberstand, so entspricht die jetzige Darstellung (6) von $\psi(u)$ der Linearfaktorenzerlegung der rationalen Funktionen (vgl. (2) S. 62 und (3) S. 46).

2) So benannt nach *Jacobis* Vorschlag; s. *Abel*, „Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes", (verfaßt 1826), Oeuvres complètes de *N. H. Abel*, Christiania (1881), Bd. 1 S. 145.

schnittsystem durchzogen sind, reichen dabei vom einzelnen Parallelogramm in benachbarte Parallelogramme hinein. Beschränken wir uns auf das einzelne Parallelogramm, so erscheinen die Bilder jener besonderen Blätter den Schnitten entsprechend zerstückt.

Ist nun ψ_0 irgendein endlicher komplexer Wert, so mögen die Nullpunkte von $(\psi(u) - \psi_0)$, etwa im ersten Parallelogramm, bei u_1, $u_2, \ldots, u_m$ liegen. Einer Änderung von ψ_0 um $d\psi$ mögen die Änderungen der Nullpunkte um $du_1, du_2, \ldots, du_m$ entsprechen. Da die Pole ihre Stellen u behalten haben, so gilt eine Gleichung (5) mit ganzen Zahlen m_1, m_2, sowohl wenn wir die v_k durch die u_k ersetzen, als auch wenn wir die Werte $(u_k + du_k)$ an Stelle der v_k eintragen. Hiernach ist die Summe $(du_1 + du_2 + \ldots + du_m)$ selber eine ganzzahlige Kombination $(m_1' \omega_1 + m_2' \omega_2)$ der Perioden. Da aber jene Summe unendlich klein ist, so folgt $m_1' = 0$, $m_2' = 0$, und also gilt:

$$du_1 + du_2 + \cdots + du_m = 0. \tag{7}$$

Wir wollen dies Ergebnis zunächst auf der F_m weiter verfolgen und beschreiben von den m übereinander liegenden Stellen ψ_0 m kongruente Integrationsbahnen in den m Blättern bis zu einem beliebigen Systeme von m übereinander liegenden Endpunkten ψ; diese m Wege dürfen abgesehen davon, daß sie genau übereinander verlaufen sollen, beliebig gewählt werden und insbesondere auch irgendwie über Querschnitte hinwegschreiten. Dann folgt aus (7) durch Integration über die gewählten Bahnen:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\psi_0}^{\psi} du_k = 0 \tag{8}$$

als Ausdruck des Abelschen Theorems, wobei du_k das Differential des Integrals erster Gattung im k^{ten} Blatte ist.

Nun setze man insbesondere $\psi_0 = \infty$ und $\psi = 0$. Für die m Anfangswerte des Integrals dürfen wir die obigen $w_1, w_2, \ldots, w_m$ benutzen. Die Integrationsbahnen werden dann, dem Werte $\psi = 0$ der oberen Grenze entsprechend, zu Endwerten $v_1', v_2', \ldots, v_m'$ führen, welche zufolge (8) mit den Anfangswerten durch die Relation:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_k' - w_k) = 0$$

verbunden sind. Hier liegen dann aber keineswegs alle Endwerte v_k' notwendig auch im ersten Parallelogramm; denn die m Integrationswege können ja irgendwie die Querschnitte überschritten haben. Wir können vielmehr nur aussagen, daß die v_k' in ihrer Gesamtheit ein mit den v_k

äquivalentes Punktsystem im Parallelogrammnetz darstellen. Es existiert also eine Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{m}(v_k - v_k') = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

mit ganzen Zahlen m_1, m_2, deren Addition zur letzten Gleichung uns dann in der Tat zur obigen Relation (5) zurückführt.

Übrigens ist hiernach einleuchtend, daß wir die Nullpunkte v_k und Pole w_k von $\psi(u)$, sofern sie nicht alle dem gleichen Parallelogramm anzugehören brauchen, immer so wählen können, daß die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{m}(v_k - w_k) = 0 \tag{9}$$

unmittelbar gültig ist. Dann tritt an Stelle von (6) die noch etwas einfachere Darstellung unserer Funktion $\psi(u)$:

$$\psi(u) = C\cdot\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)}. \tag{10}$$

Als Beispiele für diese Gleichung betrachten wir die Darstellungen von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$. Die beiden Pole der zweiwertigen Funktion $\wp(u)$ fallen bei $u=0$ zusammen. Ein Nullpunkt u_0 ist der im Innern des spitzwinkligen Dreiecks der Fig. 37, S. 171 sichtbare Scheitelpunkt des Winkels α_3; genauere Angaben über seine Lage lassen sich allgemein nicht machen.[1]) Jedenfalls dürfen wir aber als zweiten Nullpunkt $-u_0$ gebrauchen und befriedigen damit die Relation (9). In der zugehörigen Darstellung (10) haben wir dann C so zu bestimmen, daß die aus (1) S. 200 folgende Bedingung:

$$\lim_{u=0}\left(u^2\wp(u)\right) = 1$$

erfüllt ist. Wir erhalten so:

$$\wp(u) = -\frac{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0)}{\sigma(u_0)^2\,\sigma(u)^2}. \tag{11}$$

Die drei Pole der Funktion $\wp'(u)$ fallen wieder bei $u=0$ zusammen. Ihre drei Nullpunkte entsprechen den endlichen Verzweigungspunkten e_1, e_2, e_3 und sind also im Periodenparallelogramm bei $\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ gelegen. Man wird leicht die Richtigkeit der nachfolgenden Darstellung erkennen:

$$\wp'(u) = -2\,\frac{\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma(u)^3}. \tag{12}$$

1) In den Spezialfällen $g_2=0$ und $g_3=0$ liegen die Verhältnisse jedoch sehr einfach. Im äquianharmonischen Falle (vgl. Fig. 37, S. 171, wo jetzt das damalige Kurvenviereck geradlinig wird) können wir $\pm\frac{1}{3}(\omega_1-\omega_2)$ als Nullpunkte der $\wp$-Funktion heranziehen; im harmonischen Falle (vgl. Fig. 38 und 40, S. 173) koinzidieren die Nullpunkte von $\wp(u)$ im Mittelpunkte des Periodenquadrates.

Übrigens merken wir bei dieser Gelegenheit die aus unseren früheren Entwicklungen (S. 166ff.) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen an:

$$(13)\qquad \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1,\quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2,\quad \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = e_3.$$

Schließlich wollen wir noch $(\wp(u) - \wp(v))$ der Darstellung (10) unterwerfen. Die Pole dieser zweiwertigen „Funktion von u" liegen wieder bei $u = 0$ vereint, und als Nullpunkte können wir einfach v und $-v$ benutzen. Wir gelangen zur Darstellung:

$$(14)\qquad \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\,\sigma(v)^2}.$$

§ 8. Die elliptischen Funktionen der zweiten und dritten Art.

Von Ch. Hermite[1]) ist eine Erweiterung des Begriffs der elliptischen Funktionen eingeführt, welche wir im Anschluß an unsere Sprechweise so erklären können: *Eine Funktion $\psi(u)$, deren Feld die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞ ist, heißt eine elliptische Funktion zweiter Art, falls sie bei Vermehrung von u um ω_k in sich selbst, multipliziert mit einem von u unabhängigen Faktor λ_k, übergeht:*

$$(1)\qquad \psi(u+\omega_1) = \lambda_1\psi(u),\quad \psi(u+\omega_2) = \lambda_2\psi(u).$$

Die bisherigen elliptischen Funktionen werden demgegenüber als solche von der *ersten Art* bezeichnet. Übrigens werden diese letzteren von den elliptischen Funktionen zweiter Art mit umfaßt, insofern in (1) die besonderen Faktoren $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ nicht ausgeschlossen sind.

Hieran schließt sich weiter die folgende Erklärung: *Eine Funktion $\psi(u)$, deren Feld die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞ ist, heißt eine elliptische Funktion dritter Art, falls sie bei Vermehrung von u um ω_k in sich selbst, multipliziert mit der Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung, übergeht:*

$$(2)\qquad \psi(u+\omega_1) = e^{2i\pi(\mu_1 u+\nu_1)}\psi(u),\quad \psi(u+\omega_2) = e^{2i\pi(\mu_2 u+\nu_2)}\psi(u).$$

Es ist einleuchtend, daß diese Art sowohl die Funktionen zweiter als diejenigen erster Art in sich begreift.[2])

Zu den Funktionen dritter Art gehört insbesondere die Funktion $\sigma(u)$. Inwieweit im übrigen für das von unserer F_2 gelieferte Parallelogrammnetz bei willkührlich gewählten Faktoren λ_k bzw. Koeffizienten μ_k, ν_k zugehörige Funktionen existieren, ist gleich näher festzustellen.

---

1) S. die Abhandlungenreihe „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" in den Pariser Comptes Rendus, Bd. 85—94 (1877—82) oder Ch. Hermite, „Oeuvres", publ. par E. Picard, 3 Bde. (Paris, 1905ff.), Bd. 3, S. 266ff.

2) Die Faktoren $2i\pi$ sind zur Vereinfachung späterer Rechnungen in die Exponenten aufgenommen.

Zwei Funktionen gleicher Art, welche bei Vermehrung von u um ω_k einen und denselben Faktor annehmen, bezeichnet man als *„gleichändrig“*. Einleuchtend sind dann folgende Sätze: *Der Quotient zweier gleichändrigen elliptischen Funktionen ist stets eine elliptische Funktion erster Art; alle mit einer gegebenen Funktion zweiter oder dritter Art $\psi(u)$ gleichändrigen Funktionen gewinnen wir durch Multiplikation von $\psi(u)$ mit den gesamten Funktionen erster Art.*

Es ist nun leicht einzusehen, daß wir in den elliptischen Funktionen zweiter und dritter Art wesentlich neue Funktionen keineswegs zu erblicken haben. Eine einzelne Funktion $\psi(u)$ kann nämlich, da sie im Periodenparellelogramm frei von wesentlich singulären Punkten ist, ebenda nur endlich viele, etwa m Nullpunkte erster Ordnung haben, desgleichen nur endlich viele, etwa n Pole erster Ordnung. Mögen die ersteren bei $v_1, v_2, \ldots, v_m$, die letzteren bei $w_1, w_2, \ldots, w_n$ gelegen sein, wobei wir etwaige Nullpunkte oder Pole höherer Ordnung wie oben (S. 212) wieder in der Weise berücksichtigen wollen, daß wir die betreffenden Stellen v bzw. w der Ordnung entsprechend mehrfach aufführen.

Nun folgt aus den Bedingungen (1) bzw. (2) sofort, daß die vorgelegte Funktion $\psi(u)$ in den übrigen Parallelogrammen des Netzes an den mit den v und w äquivalenten Stellen ihre Nullpunkte und Pole besitzt. Es wird demnach der aus der σ-Funktion aufgebaute Ausdruck:

$$(3) \qquad \frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_n)}$$

eine eindeutige Funktion von u darstellen, welche genau in derselben Weise verschwindet und unendlich wird wie $\psi(u)$. Das Produkt von $\psi(u)$ und dem reziproken Werte des Ausdrucks (3) ist demnach eine in der endlichen u-Ebene überall eindeutige endliche und von 0 verschiedene Funktion. Der natürliche Logarithmus dieser Funktion ist also eine in der ganzen endlichen u-Ebene eindeutige analytische und damit polfreie Funktion, und dasselbe wird demnach auch von der nach u genommenen Ableitung dieses Logarithmus gelten.

Aber das Produkt von $\psi(u)$ und dem reziproken Werte von (3) verhält sich zufolge (1) bzw. (2) sowie (7) S. 209 bei Vermehrung von u um ω_k wie eine elliptische Funktion dritter Art.[1]) Demnach wird die eben erwähnte Ableitung des Logarithmus bei Vermehrung von u um ω_k sich bis auf eine additive Konstante reproduzieren und stellt also notwendig ein Integral erster Gattung dar. Durch Integration und

1) Man beachte, daß die dritte Art die Funktionen der beiden ersten Arten mit umfaßt.

Übergang zur Exponentialfunktion ergibt sich daraus unmittelbar der Satz: *Die elliptische Funktion zweiter oder dritter Art* $\psi(u)$ *läßt sich mittels des Integrals erster Gattung und der σ-Funktion in der Gestalt darstellen:*

$$(4) \qquad \psi(u) = C \cdot e^{Au^2 + Bu} \cdot \frac{\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2) \cdots \sigma(u - v_m)}{\sigma(u - w_1)\,\sigma(u - w_2) \cdots \sigma(u - w_n)}.$$

Aber auch umgekehrt ist einleuchtend, *daß jeder solche Ausdruck* (4) *mit irgendwie gewählten Konstanten A, B, C, Nullpunkten v und Polen w eine elliptische Funktion einer der drei Arten darstellt.* Dies ergibt sich aus der Bauart der rechten Seite von (4) mit Rücksicht auf das Verhalten der σ-Funktion bei Vermehrung von u um ω_k.

Wir denken nun in (1) bzw. (2) das rechts stehende Faktorensystem willkürlich gewählt und fragen, ob wir in (4) über die Nullpunkte und Pole sowie die Konstanten A und B so verfügen können, daß wir eine Funktion dieses Faktorensystems gewinnen. Bei der folgenden Betrachtung können wir die Funktionen zweiter Art zunächst denen der dritten Art unterordnen; sie entsprechen einfach den Werten $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ der beiden Koeffizienten μ. Übrigens schreiben wir zur Abkürzung:

$$(5) \qquad v_1 + v_2 + \cdots + v_m = V, \quad w_1 + w_2 + \cdots + w_n = W.$$

Das Verhalten des in (4) rechts stehenden Ausdrucks bei Vermehrung von u um Perioden folgt aus (7) S. 209. Damit den Relationen (2) genügt wird, müssen die Gleichungen bestehen:

$$(6) \quad 2A\omega_1 + (m - n)\,\eta_1 = 2i\pi\,\mu_1, \quad 2A\omega_2 + (m - n)\,\eta_2 = 2i\pi\,\mu_2,$$
$$A\omega_1^2 + B\omega_1 - (V - W)\,\eta_1 + (m - n)\left(\tfrac{1}{2}\eta_1\,\omega_1 + \pi i\right) = 2i\pi\,\nu_1 + 2m_2\,\pi i,$$
$$A\omega_2^2 + B\omega_2 - (V - W)\,\eta_2 + (m - n)\left(\tfrac{1}{2}\eta_2\,\omega_2 + \pi i\right) = 2i\pi\,\nu_2 - 2m_1\,\pi i,$$

unter m_1 und m_2 zwei ganze Zahlen verstanden. Die beiden letzten Gleichungen lassen sich mittelst der beiden Gleichungen (6) in die folgenden Gestalten umrechnen:

$$(7) \quad \begin{cases} B\omega_1 - (V - W)\eta_1 = 2i\pi\,\nu_1 - i\pi\mu_1\omega_1 - (m - n)\,\pi i + 2m_2\pi i, \\ B\omega_2 - (V - W)\eta_2 = 2i\pi\,\nu_2 - i\pi\mu_2\omega_2 - (m - n)\,\pi i - 2m_1\pi i. \end{cases}$$

Liegt nun die *zweite Art* vor, so ist $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Die beiden Gleichungen (6) für A und $(m - n)$ haben die Determinante:

$$2(\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1) = 4i\pi,$$

so daß jetzt $A = 0$ und $m = n$ gilt. Die Gleichungen (7) kürzen sich unter Einführung der Multiplikatoren λ_1, λ_2 auf:

$$B\omega_1 - (V - W)\,\eta_1 = \log\lambda_1 + 2m_2\pi i,$$
$$B\omega_2 - (V - W)\,\eta_2 = \log\lambda_2 - 2m_1\pi i$$

und ergeben für B und $(V-W)$:

$$(8)\quad \begin{cases} B = m_1\eta_1 + m_2\eta_2 - \dfrac{\eta_1 \log\lambda_2 - \eta_2 \log\lambda_1}{2i\pi}, \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_m - w_1 - w_2 - \cdots - w_m = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 - \dfrac{\omega_1 \log\lambda_2 - \omega_2 \log\lambda_1}{2i\pi}. \end{cases}$$

Ist $m=0$, so sind die Faktoren λ_1, λ_2 durch die Relation:

$$\omega_1 \log\lambda_2 - \omega_2 \log\lambda_1 = 2i\pi\,(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$

aneinander gebunden und also nicht frei wählbar; in diesem Falle reduziert sich $\psi(u)$ auf die Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung. Schließen wir diesen Fall aus, so folgt: *Für willkürlich gewähltes Faktorensystem λ_1, λ_2 und beliebig vorgeschriebene Anzahl $m>0$ gibt es zugehörige elliptische Funktionen zweiter Art; dieselben haben allgemein die Gestalt:*

$$(9)\qquad \psi(u) = C\cdot e^{Bu}\,\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)},$$

weisen also im Periodenparallelogramm ebenso viele Nullpunkte wie Pole auf. B hat die in (8) *angegebene Bedeutung; m_1, m_2 ergeben sich aus der zweiten Gleichung* (8), *welche eine dem Abelschen Theorem* (5) S. 213 *entsprechende Beziehung zwischen den Nullpunkten und Polen von $\psi(u)$ darstellt.*

Handelt es sich weiter um eine Funktion *dritter Art*, die nicht schon der ersten oder zweiten Art angehört, so verschwinden die Koeffizienten μ_1, μ_2 jedenfalls nicht beide. Die Lösung der Gleichungen (6) liefert nun:

$$(10)\qquad A = -\tfrac{1}{2}(\eta_1\mu_2 - \eta_2\mu_1), \quad m - n = \omega_1\mu_2 - \omega_2\mu_1.$$

Hieraus folgt zunächst: *Die Koeffizienten μ_1, μ_2 sind nicht unabhängig voneinander wählbar; vielmehr muß $(\omega_1\mu_2 - \omega_2\mu_1)$ eine ganze Zahl sein, die wir (auch wenn sie gleich 0 oder negativ ist) als die „Ordnung" der elliptischen Funktion dritter Art bezeichnen, und die den Überschuß der Anzahl m der Nullpunkte von $\psi(u)$ über die Anzahl n der Pole im Periodenparallelogramm darstellt.*

Weiter ergibt die Auflösung der Gleichungen (7) für B und $(V-W)$:

$$(11)\quad \begin{cases} B = m_1\eta_1 + m_2\eta_2 - (\eta_1\nu_2 - \eta_2\nu_1) - \tfrac{1}{2}(\mu_1\omega_1\eta_2 - \mu_2\omega_2\eta_1) \\ \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}(m-n)(\eta_1 - \eta_2), \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_m - w_1 - w_2 - \cdots - w_n = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ \qquad - (\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1) - \tfrac{1}{2}\omega_1\omega_2(\mu_1 - \mu_2) + \tfrac{1}{2}(m-n)(\omega_1 - \omega_2). \end{cases}$$

Ist die aus der zweiten Gleichung (10) zu bestimmende Ordnung gleich 0, und setzt man $m=0$, $n=0$, so folgt als eine weitere einschränkende Bedingung für die μ, ν:

$$\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 + \tfrac{1}{2}\omega_1\omega_2(\mu_1 - \mu_2) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

und es reduziert sich $\psi(u)$ auf die Exponentialfunktion einer ganzen Funktion zweiten Grades von u. Schließen wir diesen Fall aus, so folgt: *Sind die μ_1, μ_2 ν_1, ν_2 bis auf die schon formulierte Bedingung der μ_1, μ_2 gewählt, so gibt es für jede Auswahl zweier nicht-negativen (und nicht zugleich verschwindenden) ganzen Zahlen m, n, deren Differenz die durch μ_1, μ_2 festgelegte „Ordnung" ist, zugehörige elliptische Funktionen dritter Art. Für deren im Periodenparallelogramm gelegenen Nullpunkte und Pole gilt die dem Abelschen Theorem* (5) S. 213 *entsprechende zweite Relation* (11), *welche zugleich die ganzen Zahlen m_1, m_2 festlegt; mit ihnen baut sich B in Gestalt der ersten Gleichung* (11) *auf, während A durch* (10) *gegeben ist.*

Die elliptischen Funktionen dritter Art von der Ordnung 0 sind übrigens mit den Funktionen der zweiten Art nahe verwandt und können durch Zusatz von Exponentialfaktoren zu Funktionen zweiter Art gemacht werden. Ist nämlich $m = n$, so folgt aus der zweiten Gleichung (10):

$$\frac{\mu_1}{\omega_1} = \frac{\mu_2}{\omega_2}.$$

Nennen wir den gemeinsamen Wert dieser Quotienten abkürzend τ, so ergibt sich leicht: *Eine elliptische Funktion dritter Art $\psi(u)$ der Ordnung 0 liefert in der Gestalt:*

$$(12) \qquad \psi_1(u) = e^{-\pi i \tau u^2} \psi(u)$$

eine solche der zweiten Art von den Faktoren:

$$\lambda_1 = e^{\pi i (2\nu_1 - \mu_1 \omega_1)}, \quad \lambda_2 = e^{\pi i (2\nu_2 - \mu_2 \omega_2)}.$$

Soll eine unserer Funktionen $\psi(u)$ *polfrei* sein und weder mit einer Konstanten noch mit der Exponentialfunktion eines Integrals erster Gattung identisch sein, *so muß sie der dritten Art angehören und hat die Gestalt:*

$$(13) \qquad \psi(u) = Ce^{Au^2 + Bu} \cdot \sigma(u - v_1)\, \sigma(u - v_2) \ldots \sigma(u - v_m);$$

wir bezeichnen sie kurz als eine *„ganze elliptische Funktion m^{ter} Ordnung"*.[1]) Die zweite Gleichung (11) lautet jetzt:

$$(14) \qquad \begin{aligned} v_1 + v_2 + \cdots + v_m &= m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \\ &- (\omega_1 \nu_2 - \omega_2 \nu_1) - \tfrac{1}{2} \omega_1 \omega_2 (\mu_1 - \mu_2) + \tfrac{1}{2} m (\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

wie denn auch übrigens in den Gleichungen (10) und (11) einfach $n = 0$ einzutragen ist.

Mit Rücksicht auf die gleich folgende Untersuchung erinnern wir, die Funktion (13) betreffend, nochmals an folgende Verhältnisse. Sind

$$\psi_1(u) = C_1 \cdot e^{A_1 u^2 + B_1 u}\, \sigma(u - v_1)\, \sigma(u - v_2) \cdots \sigma(u - v_m),$$
$$\psi_2(u) = C_2 \cdot e^{A_2 u^2 + B_2 u}\, \sigma(u - w_1)\, \sigma(u - w_2) \cdots \sigma(u - w_m)$$

1) Auch andere Benennungen, wie z. B. die der „Jacobischen Funktionen", kommen vor.

irgend zwei gleichändrige ganze elliptische Funktionen m^{ter} Ordnung, so mögen für die erste Funktion m_1', m_2' die beiden ganzen in (14) rechts auftretenden Zahlen sein, für die zweite aber m_1'', m_2''. Wegen der Gleichändrigkeit ergeben die Gleichungen (10) und (11):

$$A_1 = A_2, \quad B_1 - B_2 = (m_1' - m_1'')\,\eta_1 + (m_2' - m_2'')\,\eta_2.$$

Setzen wir also abkürzend:

$$m_1' - m_1'' = m_1, \quad m_2' - m_2'' = m_2, \quad \frac{C_1}{C_2} = C,$$

so folgt für den Quotienten $\psi(u)$ unserer beiden Funktionen, der eine elliptische Funktion erster Art ist:

$$(15) \quad \psi(u) = \frac{\psi_1(u)}{\psi_2(u)} = C \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)} \cdot \frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_m)}{\sigma(u-w_1)\,\sigma(u-w_2)\cdots\sigma(u-w_m)}$$

mit der aus (14) hervorgehenden Bedingung:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m - w_1 - w_2 - \cdots - w_m = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Wir sind hier also genau zur Darstellung (6) S. 214 der elliptischen Funktionen erster Art durch die σ-Funktion zurückgeführt. *Umgekehrt gewinnen wir durch Multiplikation der besonderen ganzen elliptischen Funktion m^{ter} Ordnung $\psi_2(u)$ mit allen möglichen m-wertigen Funktionen erster Art $\psi(u)$ der Pole $w_1, w_2, \ldots, w_m$ in der Gestalt $\psi_2(u)\cdot\psi(u)$ die gesamten mit $\psi_1(u)$ gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen m^{ter} Ordnung.*

§ 9. Anzahltheorem über elliptische Funktionen mit gegebenen Polen nebst Folgerungen.

Das Abelsche Theorem (5) S. 213 deckt uns ein eigentümliches Gesetz auf, welches die elliptischen Funktionen, d. i. diejenigen der ersten Art beherrscht. Sind etwa die Pole, deren Gesamtzahl m sei, im Periodenparallelogramm festgelegt, so sind die m Nullpunkte nicht mehr völlig frei wählbar, *vielmehr ist, wenn $(m-1)$ unter diesen Nullpunkten beliebig gewählt sind, der m^{te} auf Grund der Gleichung:*

$$(1) \quad v_m = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + w_1 + w_2 + \cdots + w_m - v_1 - v_2 - \cdots - v_{m-1}$$

im Periodenparallelogramm eindeutig mitbestimmt.[1])

Die gleiche Eigenschaft haftet natürlich den algebraischen Funktionen der F_2 an, wie schon S. 214 ff. ausgeführt wurde. Ist $\psi(u) = w(z)$ eine m-wertige algebraische Funktion der F_2, so möge dieselbe den speziellen komplexen Wert ψ_0 in den m Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ und den

1) Schreiben wir einen dieser Bedingung nicht genügenden m^{ten} Nullpunkt vor, so ist eben nur erst eine elliptische Funktion *zweiter* Art mit diesen Nullpunkten und Polen angebbar.

Wert ψ in den Stellen $z_1', z_2', \ldots, z_m'$ annehmen. Die Gleichung (8) S. 215 ergibt dann, für die F_2 umgeschrieben:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_k'} du = 0,$$

wobei die Integrationswege und damit die Zuordnung der Punkte z_k' zu den Punkten z_k dadurch vorgezeichnet sind, daß die Wege auf der m-blättrigen Riemannschen Fläche F_m über der ψ-Ebene kongruente übereinanderliegende Kurven von ψ_0 nach ψ sein müssen (vgl. S. 215). Wir wollen beiläufig bemerken, daß wir die letzte Gleichung auch in allgemeiner Art aufbauen dürfen. Erstlich dürfen wir jede einzelne Integrationskurve unter Festhaltung ihrer Endpunkte stetig ändern, auch irgendwelche Periodenwege einhängen, wobei dann freilich das Integral sich um entsprechende Multipla von ω_1 und ω_2 ändert. Andererseits gilt:

$$\int_{z_1'}^{z_1'} + \int_{z_2}^{z_2'} = \left(\int_{z_1}^{z_1'} + \int_{z_1'}^{z_2'}\right) + \left(\int_{z_2}^{z_2'} + \int_{z_2'}^{z_1'}\right) = \int_{z_1}^{z_2'} + \int_{z_2}^{z_1'},$$

woraus man leicht den Schluß zieht, daß man die oberen Grenzen der Integrale z_k' irgendwie den unteren z_k zuordnen darf. *Das Abelsche Theorem nimmt alsdann die Gestalt an:*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_k'} du = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \tag{2}$$

wobei die m Punkte z_k', in denen unsere m-wertige algebraische Funktion den Wert ψ annimmt, den m Punkten z_k, in denen die Funktion gleich ψ_0 wird, irgendwie zugeordnet sind, die Integrationswege zwischen zwei zugeordneten Punkten z_k beliebig wählbar sind und m_1, m_2 zwei dieser Wahl entsprechende ganze Zahlen bedeuten.

Was aber das Wesentliche ist, so kommt eben durch diese Gleichung (2) auch wieder zum Ausdruck, *daß nach Auswahl des Stellensystems $z_1, z_2, \ldots, z_m$ das zweite System $z_1', z_2', \ldots, z_m'$ an die Bedingung* (2) *geknüpft ist, derzufolge eine unter diesen Stellen mit den* $(m-1)$ *übrigen bereits eindeutig bestimmt ist.*

Dieses Sachverhältnis ist den algebraischen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche der Geschlechtes $p = 0$ fremd. Wählen wir zur Darstellung dieser Funktionen eine *einwertige z* unter ihnen (vgl. S. 94) und legen wir damit eine F_1 zugrunde (d. h. die schlichte z-Ebene), so werden jene algebraischen Funktionen als rationale Funktionen $R(z)$ von z darstellbar. *Hier dürfen wir in der Tat für eine m-wertige Funktion $R(z)$ die m Pole und m Nullpunkte völlig willkürlich und unab-*

hängig voneinander wählen, wodurch alsdann $R(z)$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist (vgl. S. 61ff).

In anderer Gestalt ist uns die hier betrachtete Eigenschaft der elliptischen Funktionen (erster Art) bereits S. 205ff. begegnet. Da im Ausdruck (6) S. 214 einer m-wertigen Funktion $\psi(u)$ mit vorgeschriebenen Polen $w_1, w_2, \ldots, w_m$ neben $(m-1)$ willkürlich wählbaren Nullstellen[1]) auch noch der Faktor C als endliche Konstante willkürlich wählbar ist, so existieren m-fach unendlich viele Funktionen $\psi(u)$ mit vorgegebenen m Polen.[2]) Dies ist nun gerade die Tatsache, welche in der Darstellung (6) S. 206 von $\psi(u)$ unmittelbar zum Ausdruck kommt, insofern die zunächst in der Anzahl $(m+1)$ auftretenden Koeffizienten $A_0, A_k, B_k, \ldots$ zufolge der damaligen Relation (5) S. 206 sich auf m willkürlich wählbare komplexe Koeffizienten reduzieren.

Wir wollen die vorliegenden Verhältnisse in Gestalt eines Anzahltheorems charakterisieren, das uns in der aufzustellenden Gestalt später gute Dienste leisten wird. In der Formel (6) S. 206 ist der Möglichkeit der Koinzidenz der Pole explizite Rechnung getragen. Fallen die m Pole an den ν verschiedenen Stellen $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ irgendwie zusammen, so können wir, indem wir gleich auf die Relation (5) S. 206 Rücksicht nehmen, irgendeine der zugehörigen Funktionen $\psi(u)$ in der nachfolgenden Gestalt darstellen:

$$(3)\quad \psi(u) = A_0 + \sum_{k=1}^{\nu-1} A_k(\zeta(u-w_k) - \zeta(u-w_\nu)) + \sum_{k=1}^{\nu} (B_k \wp(u-w_k) + C_k \wp'(u-w_k) + D_k \wp''(u-w_k) + \ldots).$$

Zugleich können wir die jetzt noch restierenden m Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{\nu-1}, B_k, C_k, \ldots$ ganz willkürlich wählen und gewinnen dann jedesmal eine zugehörige Funktion $\psi(u)$ mit den vorgeschriebenen m Polen. Diese Pole dürfen sich dabei sehr wohl zum Teil, ja sogar vollständig gegen Nullpunkte der dargestellten Funktion $\psi(u)$ fortheben; im Extremfalle, wo sich alle Pole fortheben, ist nur A_0 von 0 verschieden, dagegen alle übrigen Koeffizienten gleich 0, so daß $\psi(u)$ mit der Konstanten A_0 identisch ist.

Gemäß der hiermit festgelegten Auffassung haben wir zum Ge-

1) Wir erinnern hier gleich daran, daß auch Koinzidenzen von Nullpunkten mit Polen eintreten dürfen, wo alsdann eine entsprechende Herabminderung der Wertigkeit eintritt. Es handelt sich also im Texte um alle Funktionen, welche keine anderen Pole haben als die $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

2) Als „einfach-unendlich" gilt bei dieser Sprechweise der Wertbereich einer komplexen Variabelen.

samtsystem aller Funktionen $\psi(u)$ mit den m vorgeschriebenen Polen insbesondere auch die m Funktion:

$$(4) \qquad 1,\ \zeta(u-w_1)-\zeta(u-w_\nu), \ldots, \zeta(u-w_{\nu-1})-\zeta(u-w_\nu), \\ \wp(u-w_k), \wp'(u-w_k), \ldots,$$

welche den einzelnen m Gliedern in (3) rechter Hand entsprechen, als zugehörig anzusehen. Diese Funktionen haben die wichtige Eigenschaft, *ein System von m „linear-unabhängigen" Funktionen darzustellen.* Hierdurch soll zum Ausdruck kommen, daß zwischen den m Funktionen (4) keine lineare Relation:

$$A_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} A_k(\zeta(u-w_k)-\zeta(u-w_\nu)) + \sum_{k=1}^{\nu}(B_k\wp(u-w_k)+\cdots) = 0$$

mit nicht durchgängig verschwindenden Koeffizienten identisch, d. i. unabhängig von u, bestehen kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung zeigt man sofort, indem man die Existenz einer solchen identischen Gleichung annimmt und die auf der linken Seite der Gleichung gegebene, mit 0 identische Funktion in der Umgebung der Stelle w_k in eine Reihe nach Potenzen von $(u-w_k)$ entwickelt. Die Potenzen mit negativen Exponenten werden dabei mit Koeffizienten behaftet auftreten, die von den $A_k, B_k, C_k, \ldots$ nur um nichtverschwindende numerische Faktoren abweichen (vgl. S. 200ff.). Da aber die dargestellte Funktion mit 0 identisch ist, so treten solche Glieder überhaupt nicht auf, und also sind die $A_k, B_k, C_k, \ldots$ für alle $k = 1, 2, \ldots, \nu$ notwendig gleich 0. Dann aber verschwindet zufolge der letzten Gleichung auch noch A_0.

Unmittelbar einleuchtend ist nun nach den obigen Entwicklungen weiter folgende Aussage: *In den m linear-unabhängigen besonderen Funktionen* (4) *unseres Gesamtsystems aller Funktionen $\psi(u)$ mit den vorgeschriebenen m Polen $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ist jede andere Funktion dieses Systems linear und homogen mit konstanten Koeffizienten (nämlich eben in der Gestalt* (3)*) darstellbar; und umgekehrt ist jede solche lineare und homogene Verbindung der Funktionen* (4) *auch eine Funktion unseres Systems.*

Mittelst einiger Sätze der Determinantentheorie können wir diesem Ergebnis eine noch etwas allgemeinere Gestalt verleihen. Sind $\psi_1(u)$, $\psi_2(u), \ldots, \psi_m(u)$ irgendwelche m unter unseren Funktionen, so gelte für $\psi_i(u)$ die Darstellung:

$$(5) \quad \psi_i(u) = A_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\nu-1} A_k^{(i)}(\zeta(u-w_k)-\zeta(u-w_\nu) + \sum_{k=1}^{\nu}(B_k^{(i)}\wp(u-w_k)+\cdots).$$

Da die Funktionen (4) linear-unabhängig sind, so folgt aus den fraglichen Determinantensätzen: *Die m Funktionen $\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_m'(u)$*

sind stets und nur dann linear-unabhängig, wenn die Determinante der m^2 Koeffizienten $A, B, \ldots$ einen nichtverschwindenden Wert hat. Es ergibt sich zugleich die Möglichkeit, aus dem Gesamtsystem unserer Funktionen $\psi(u)$ mit vorgegebenen m Polen *auf unendlich viele verschiedene Arten ein System linear-unabhängiger Funktionen auszuwählen.*

Haben wir irgendein solches System gewählt, so können wir die zugehörigen m Gleichungen (5) nach den unter (4) genannten Funktionen auflösen und damit diese insbesondere als lineare-homogene Verbindungen der $\psi_i(u)$ darstellen. Damit kann man dann aber die gewählten $\psi_i(u)$ überhaupt für die Darstellung aller Funktionen $\psi(u)$ unseres Systems heranziehen. Wir sind damit zu dem in Aussicht genommenen „Anzahltheorem" hingelangt: *Unter allen elliptischen Funktionen (erster Art) mit m vorgegebenen Polen kann man auf unendlich viele Arten m linear-unabhängige Funktionen $\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_m(u)$ auswählen, in denen jede weitere solche Funktion in der Gestalt:*

$$(6) \qquad \psi(u) = c_1\psi_1(u) + c_2\psi_2(u) + \cdots + c_m\psi_m(u)$$

linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist; und umgekehrt ist natürlich jeder solche Ausdruck mit irgendwie gewählten m endlichen komplexen Konstanten eine der in Rede stehenden Funktionen, wodurch die m-fach unendliche Mannigfaltigkeit unseres Funktionssystems wieder zum Ausdruck gelangt.

Denjenigen Teil dieses Satzes, der sich auf die Darstellung der Funktionen $\psi(u)$ bezieht, kann man auch so aussprechen: *Zwischen je $(m+1)$ Funktionen $\psi_0(u), \psi_1(u), \ldots, \psi_m(u)$ mit vorgegebenen m Polen besteht stets eine lineare Relation:*

$$(7) \qquad c_0\psi_0(u) + c_1\psi_1(u) + \cdots + c_m\psi_m(u) = 0$$

mit nicht durchgängig verschwindenden Koeffizienten identisch. Entweder sind nämlich bereits die $\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_m(u)$ „linear-abhängig", oder sie sind zur Darstellung von $\psi_0(u)$ in der Gestalt (6) geeignet, woraus dann eben eine Relation (7) mit $c_0 = -1$ folgt.

Der gewonnene Satz gilt entprechend für die algebraischen Funktionen der Fläche F_2 mit vorgegebenen Polen. Um die Bedeutung des Satzes hervorzuheben, weisen wir nochmals auf die entsprechend bei einer Fläche des Geschlechtes $p = 0$ vorliegenden Verhältnisse hin. Zur Darstellung der algebraischen Funktionen benutzen wir, wie schon vorhin bemerkt wurde, eine F_1, so daß alle Funktionen mit m vorgegebenen Polen in der Gestalt:

$$R(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m}{g(z)}$$

darstellbar sind, unter $g(z)$ die bestimmte ganze Funktion verstanden,

deren Nullpunkte die vorgeschriebenen Pole sind.[1]) Die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_m$ bleiben hier frei wählbar; genau wie oben folgt jetzt das „Anzahltheorem", *daß auf einer Fläche des Geschlechtes* 0 *bei* m *vorgegebenen Polen* $(m+1)$ *linear-unabhängige zugehörige Funktionen angegeben werden können, in denen dann alle weiteren linear und homogen darstellbar sind.* Übrigens sind beide Sätze Spezialfälle des sogenannten „*Riemann-Rochschen Satzes*", welcher auf einer Fläche beliebigen Geschlechtes p die Anzahl linear-unabhängiger Funktionen mit m vorgegebenen Polen festlegt.[2])

Auf Grund der Schlußbetrachtung von § 8 (S. 222) wollen wir noch eine Folgerung aus dem Anzahltheorem auf die ganzen elliptischen Funktionen (dritter Art) m^{ter} Ordnung aussprechen. Wie wir daselbst sahen, gewinnen wir gerade genau alle mit:

$$(8) \qquad \psi_0(u) = C \cdot e^{Au^2+Bu}\, \sigma(u-w_1)\, \sigma(u-w_2) \cdots \sigma(u-w_m)$$

gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen m^{ter} Ordnung, wenn wir diese besondere Funktion mit den gesamten m-wertigen elliptischen Funktionen (erster Art) der Pole $w_1, w_2, \ldots, w_m$ multiplizieren. Sind nun unter den letzteren Funktionen $\bar{\psi}_1(u), \bar{\psi}_2(u), \ldots, \bar{\psi}_m(u)$ irgend m linear-unabhängige, so ist jede weitere in ihnen linear und homogen darstellbar, so daß wir alle mit der Funktion (8) gleichändrigen ganzen Funktionen m^{ter} Ordnung in der Gestalt:

$$c_1\psi_0(u)\bar{\psi}_1(u) + c_2\psi_0(u)\bar{\psi}_2(u) + \cdots + c_m\psi_0(u)\psi_m(u)$$

gewinnen. Offenbar stellen die m Produkte:

$$\psi_k(u) = \psi_0(u)\bar{\psi}_k(u)$$

m besondere mit der Funktion (8) gleichändrige ganze elliptische Funktionen m^{ter} Ordnung dar, die voneinander linear-unabhängig sind. Wir gelangen also zu der Folgerung: *Unter allen gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen (dritter Art) der Ordnung* m *kann man auf unendlich viele Arten* m *linear-unabhängige* $\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_m(u)$ *aussuchen, in denen dann alle weiteren in der Gestalt:*

$$(9) \qquad \psi(u) = c_1\psi_1(u) + c_2\psi_2(u) + \cdots + c_m\psi_m(u)$$

homogen und linear mit konstanten Koeffizienten darstellbar sind. Einen Teil dieses Theorems können wir auch in die Aussage kleiden: *Zwischen je* $(m+1)$ *gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen (dritter Art)*

1) Es bedarf kaum des Hinweises darauf, daß, wenn $g(z)$ den Grad m nicht erreicht, ein oder mehrere Pole bei $z = \infty$ liegen; damit $g(z)$ eindeutig bestimmt ist, denken wir den Koeffizienten des höchsten Gliedes gleich 1 gesetzt.

2) S. Roch, „Über die Anzahl der willkürlichen Konstanten in algebraischen Funktionen", Journ. f. Math., Bd. 64 (1865), S. 372.

m^{ter} Ordnung besteht notwendig eine lineare Relation mit nicht durchgängig verschwindenden Koeffizienten identisch.

Der zuletzt gewonnene Satz ist auch unter dem Namen des „*Satzes von Hermite*“ oder des „*Hermiteschen Prinzips*“ bekannt und mag auch späterhin unter dieser Benennung zitiert werden. Der Satz tritt bei *Hermite* in einem Briefe an Jacobi vom August 1844 auf[1]); er steht daselbst natürlich außer Zusammenhang mit den hier vorausgeschickten allgemeinen funktionentheoretischen Erwägungen, ist auch zunächst nur ausgesprochen für gewisse spezielle Funktionen von der Art, wie sie hier allgemein als ganze elliptische Funktionen m^{ter} Ordnung bezeichnet sind. Das Beweismittel sind Fouriersche Reihen der fraglichen Funktionen, auf die wir später ausführlich zu sprechen kommen. Übrigens besteht Grund zu der Annahme, daß der nach Hermite benannte Satz bereits im Jahre 1800 *Gauß* bekannt gewesen sein muß.[2])

Viertes Kapitel.

Die eindeutigen doppeltperiodischen Funktionen erster Stufe.

Nächst der Eindeutigkeit ist die doppelte Periodizität die wichtigste Eigenschaft der elliptischen Funktionen. Es ist möglich und oftmals durchgeführt, die Darstellung der ganzen Theorie an den Begriff der „eindeutigen doppeltperiodischen Funktion“ einer Variabelen anzuknüpfen. Wie sich alsdann der Aufbau der Theorie gestaltet, soll im vorliegenden Kapitel dargestellt werden.

Diese Entwicklung ist für uns noch nach anderer Richtung hin von grundsätzlicher Bedeutung. Wir haben oben (S. 137 ff.) erkannt, daß der einzelne Körper algebraischer Funktionen des Geschlechtes $p = 1$ eindeutig durch den Wert der absoluten Invariante J charakterisiert werden kann, und daß andererseits zu jedem beliebigen endlichen komplexen Werte J ein bestimmter Körper gehört. Späterhin (S. 180) fanden wir, daß sich noch in einer anderen Art eine „Maßgröße“ oder ein „Modul“ für den einzelnen Körper algebraischer und damit elliptischer Funktionen angeben läßt; ein solcher Modul war nämlich der Quotient ω der reduzierten Perioden ω_1, ω_2 des Integrals erster Gattung. Dem einzelnen Körper gehörte ein eindeutig bestimmter endlicher komplexer Wert ω mit positivem imaginären Bestandteile zu, und es lag der Bildpunkt dieses Wertes ω in dem in Fig. 43, S. 179 dargestellten „Doppeldreieck“.

1) S. Jacobis „Werke“, Bd. 2 S. 96 oder Hermites „Werke“, Bd. 1 S. 18.

2) S. darüber P. Günther, „Die Untersuchungen von Gauß in der Theorie der elliptischen Funktionen“, Gött. Nachr. von 1894 S. 102 und L. Schlesinger, „Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie“, Gött. Nachr. von 1912, Beiheft S. 44.

Hier entsteht nun die Frage, ob wir J und damit den Funktionenkörper so wählen können, daß wir irgendeinen beliebig vorgeschriebenen endlichen Bildpunkt ω des fraglichen Doppeldreiecks wirklich erreichen. Die Entwicklungen des vorliegenden Kapitels werden diese Frage bejahend beantworten. Damit werden wir aber zugleich die Problemstellung für das nächste Kapitel gewinnen, in dem die sich hier ergebende Beziehung zwischen J und ω weiter aufzuklären ist.

§ 1. Die Substitutionsgruppe $\Gamma^{(u)}$ der doppeltperiodischen Funktionen.

Unter Vorbehalt einer genaueren Erklärung verstehen wir unter $\psi(u)$ eine eindeutige analytische Funktion, welche die beiden endlichen von 0 verschiedenen Perioden ω_1, ω_2 hat:

(1) $$\psi(u + \omega_1) = \psi(u), \qquad \psi(u + \omega_2) = \psi(u).$$

Diese Funktion wird dann auch unverändert bleiben, wenn wir ihr Argument um $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ vermehren:

(2) $$\psi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \psi(u),$$

unter m_1, m_2 irgendein Paar ganzer Zahlen[1]) verstanden.

Die gesamten, allen Paaren ganzer Zahlen m_1, m_2 entsprechenden Substitutionen:

(3) $$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

bilden eine „Gruppe" von Translationen, die wir als die *„Substitutionsgruppe der doppeltperiodischen Funktionen"* benennen und durch $\Gamma^{(u)}$ oder, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, kurz durch Γ bezeichnen wollen. Für die einzelnen Substitutionen der Gruppe Γ und ihre Kombinierung nehmen wir die symbolischen Bezeichnungen von S. 127 wieder auf. Sind S und S' irgend zwei Substitutionen unserer Gruppe, so gilt hier das Gesetz:

$$S' \cdot S = S \cdot S',$$

was bei den S. 126ff. besprochenen Gruppen endlicher Ordnung keineswegs allgemein galt; man sagt, *irgend zwei Substitutionen der Gruppe Γ seien miteinander vertauschbar.* Werden die beiden in (1) zur Geltung kommenden Substitutionen durch S_1 und S_2 bezeichnet, so läßt sich die beliebige Substitution (3) der Gruppe durch:

$$S = S_1^{m_1} \cdot S_2^{m_2}$$

darstellen: man sagt dieserhalb, *S_1, S_2 bilden ein System von erzeugenden Substitutionen der Gruppe Γ.* Bei dieser Auffassung denken wir mit S_1

1) Wir erinnern daran, daß wir bei der Bezeichnung „ganze Zahl" (ohne Zusatz) stets die Zahl 0 und die negativen ganzen Zahlen einbegreifen wollen.

und S_2 die zu ihnen inversen Substitutionen S_1^{-1}, S_2^{-1} sogleich mitgegeben.

Irgend zwei endliche Punkte der u-Ebene, von denen der eine in den anderen durch eine Substitution S von Γ (und also der zweite in den ersten durch S^{-1}) transformiert wird, sollen *„bezüglich der Gruppe Γ äquivalent"* heißen. Es ist dies derselbe Äquivalenzbegriff, mit dem wir oben (S. 180ff.) arbeiteten, insofern ja in je zwei äquivalenten Punkten die Funktion $\psi(u)$ gleiche Werte haben muß.

Die im vorigen Kapitel auftretenden Perioden ω_1, ω_2 lieferten einen Periodenquotienten $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, der eine endliche, nicht-reelle Zahl war. Daß der imaginäre Bestandteil von ω positiv war, konnte dann nötigenfalls durch Zeichenwechsel der einen Periode stets erreicht werden. An der letzteren Verabredung werden wir auch hier festhalten, falls der Quotient ω der beiden jetzt vorgelegten Perioden ω_1, ω_2 nicht reell ist. Im übrigen ist von vornherein durchaus nicht abzusehen, ob nicht auch der Fall eines reellen Periodenquotienten ω zu brauchbaren Ergebnissen zu führen vermag. Wir werden demselben demnach hier eine besondere Voruntersuchung widmen.

Ist ω reell, so können wir nötigenfalls durch Zeichenwechsel von ω_1 auch $\omega > 0$ als erfüllt ansehen. Da $\omega_1 = \omega_2$ auszuschließen ist (was auf „einfachperiodische" Funktionen führen würde), so verstehen wir etwa unter ω_1 diejenige unter beiden Perioden, welche den größeren Betrag hat. Alle mit $u = 0$ äquivalenten Punkte, die wir jetzt durch:

$$(4) \qquad m\omega_1 + n\omega_2$$

bezeichnen wollen, liegen auf der Geraden G der u-Ebene durch die Punkte $0, \omega_2, \omega_1$. Sie liefern, wie man sofort sieht, ein System von Werten u, *das sich gegenüber Addition und Subtraktion reproduziert;* es folgt dies unmittelbar aus der Ganzzahligkeit von m und n.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem unter den von 0 verschiedenen Werten (4) ein Wert $\omega_0 = m_0\omega_1 + n_0\omega_2$ von kleinstem Betrage $|\omega_0|$ angebbar ist oder nicht. Im ersten Falle findet sich zwischen den beiden mit 0 äquivalenten Punkten $(m\omega_1 + n\omega_2)$ und:

$$m\omega_1 + n\omega_2 + \omega_0 = (m + m_0)\omega_1 + (n + n_0)\omega_2$$

kein weiterer mit 0 äquivalenter Punkt; denn wäre $(m'\omega_1 + n'\omega_2)$ ein solcher, so würde man sofort:

$$|(m' - m)\omega_1 + (n' - n)\omega_2| < |\omega_0|$$

erkennen und hätte in ω_0 nicht den mit 0 äquivalenten Punkt von kleinstem Betrage. Man erkennt hieraus sofort, daß jetzt die gesamten mit $u = 0$ äquivalenten Punkte durch:

$$(5) \qquad 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \ldots$$

gegeben sind. Unter diesen finden sich insbesondere die Punkte $u = \omega_1$ und $u = \omega_2$; wir können also $\omega_1 = p\omega_0$ und $\omega_2 = q\omega_0$ setzen, wobei p und q zwei ganze Zahlen sind. Da übrigens:

$$m_0\omega_1 + n_0\omega_2 = (m_0 p + n_0 q)\omega_0 = \omega_0$$

ist und also die Gleichung:

$$m_0 p + n_0 q = 1 \tag{6}$$

gilt, so folgt aus der Ganzzahligkeit von m_0 und n_0, daß p und q relative Primzahlen sind. *Gegenwärtig ist also ω rational, und zwar gleich dem Bruch $\omega = \frac{p}{q}$, der sich nicht weiter heben läßt.*

Nehmen wir umgekehrt ω als rational gegeben an und schreiben etwa sofort wieder ω gleich einem irreduzibelen Bruche $\frac{p}{q}$, wo p und q als positive ganze Zahlen vorausgesetzt werden dürfen, so gelangen wir leicht wieder zur Existenz eines mit 0 äquivalenten Punktes $(m_0\omega_1 + n_0\omega_2)$ von kleinstem Betrage. Man kann nämlich für *jede* ganze Zahl m die zweite ganze Zahl n in einer und nur einer Weise so bestimmen, daß:

$$0 \leqq |m\omega_1 + n\omega_2| < \omega_2 \tag{7}$$

gilt und also der Punkt $(m\omega_1 + n\omega_2)$ dem Intervall der Geraden G zwischen den Punkten 0 und ω_2 angehört, unter Einschluß des Endpunktes 0 und Ausschluß des Endpunktes ω_2. Da aber zufolge $\omega = \frac{p}{q}$ offenbar:

$$(m + q)\omega_1 + (n - p)\omega_2 = m\omega_1 + n\omega_2$$

gilt, so reduzieren sich diese (allen ganzen Zahlen m entsprechenden) unendlich vielen dem fraglichen Intervall angehörenden Punkte auf nur endlich viele, insofern wir ja bereits alle verschiedenen Punkte gewinnen, wenn wir m auf die q Werte $m = 0, 1, 2, \ldots, q - 1$ beschränken. Es gibt also unter diesen Punkten einen am Nullpunkte $u = 0$ nächst gelegenen ω_0, womit wir unseren obigen Ansatz wieder gewonnen haben.

Im vorliegenden Falle lassen sich die gesamten Substitutionen der Gruppe Γ auf die Gestalt:

$$u' = u + l\omega_0, \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

bringen, und die beiden Gleichungen (1) sind durch die eine:

$$\psi(u + \omega_0) = \psi(u)$$

ersetzbar. *Der Fall eines reellen rationalen Periodenquotienten ω ist deshalb auszuschließen, weil er uns nicht doppeltperiodische, sondern „einfachperiodische" Funktionen liefert.*

Der andere Fall, daß der Periodenquotient ω reell und irrational ist, wird nunmehr dahin zu charakterisieren sein, daß jetzt unter den

von 0 verschiedenen mit $u = 0$ äquivalenten Punkten (4) keiner mit kleinstem Betrage $|m\omega_1 + n\omega_2|$ angebbar ist. Man kann dies auch unmittelbar in der Weise einsehen, daß man für jede ganze Zahl m die eindeutig zugehörige Zahl n wie oben gemäß der Bedingung (7) wählt. Jetzt können keine zwei unter den einfach unendlich vielen Punkten $(m\omega_1 + n\omega_2)$ des in (7) bezeichneten Intervalles zusammenfallen. Würde nämlich:

$$m\omega_1 + n\omega_2 = m'\omega_1 + n'\omega_2$$

gelten, so würde sich, da $m \gtrless m'$ gilt, ω sofort wieder als rationale reelle Zahl ergeben. Die unendlich vielen Punkte jenes endlichen Intervalles müssen demnach mindestens eine Häufungsstelle haben. Ist nun δ eine beliebig klein gewählte, von 0 verschiedene positive Zahl und grenzt man um die Häufungsstelle als Mittelpunkt ein Intervall der Länge δ ein, so kann man in diesem Intervall zwei verschiedene mit 0 äquivalente Punkte $(m\omega_1 + n\omega_2)$ und $(m'\omega_1 + n'\omega_2)$ angeben. Dann aber erkennt man sofort in:

$$\omega_0 = (m' - m)\,\omega_1 + (n' - n)\,\omega_2 = m_0\omega_1 + n_0\omega_2$$

einen mit 0 äquivalenten, aber von 0 verschiedenen Punkt, dessen Betrag $|\omega_0| < \delta$, d. h. kleiner als die beliebig klein gewählte Zahl δ ist. *Es ist also in der Tat bei reellem irrationalen ω kein von 0 verschiedener Punkt* (4) *mit kleinstem Betrage angebbar.*

Bei dieser Sachlage kann man jetzt in *jeder* Umgebung irgendeines endlichen Punktes u einen und damit sogar beliebig viele von u verschiedene, aber bezüglich Γ mit u äquivalente Punkte angeben. Nun soll die Funktion $\psi(u)$ in allen äquivalenten Punkten gleiche Werte haben. Ist aber $\psi(u)$ nicht mit einer Konstanten identisch und verhält sich diese Funktion im Punkte u analytisch, so läßt sich um den Punkt u eine Umgebung eingrenzen, in der der besondere im Mittelpunkte der Umgebung vorliegende Funktionswert $\psi(u)$ nicht ein zweites Mal angenommen wird. Es folgt, daß in unserem Falle die Funktion $\psi(u)$, wenn sie nicht mit einer Konstanten identisch sein soll, in keinem endlichen Punkte u analytisch sein würde. Nun haben wir aber das Kennzeichen, analytisch zu sein, oben in die Erklärung der Funktion $\psi(u)$ aufgenommen. Es ergibt sich demnach: *Der Fall eines irrationalen Periodenquotienten ω ist deshalb abzuweisen, weil jede zugehörige eindeutige „analytische" Funktion $\psi(u)$ mit einer Konstanten identisch sein müßte.*

Auf diese Weise ist der Boden für die weiter folgende Untersuchung geebnet: *Wir lassen nur noch diejenigen Gruppen $\Gamma^{(u)}$ zur Untersuchung zu, deren Periodenquotienten ω endliche komplexe Zahlen mit nichtverschwindenden, und zwar positiven imaginären Bestandteilen sind.*

§ 2. Der Diskontinuitätsbereich der Substitutionsgruppe $\Gamma^{(u)}$.

Um die gesamten mit irgendeinem endlichen Punkte u_0 äquivalenten Punkte $(u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ leicht übersehen zu können, denken wir uns in der u-Ebene das geradlinige Parallelogramm der Ecken 0, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 gezeichnet und stellen genau wie in Fig. 41, S. 174, durch lückenlose Aneinanderreihung von Parallelogrammen, die mit dem ersten kongruent sind, ein ganzes Parallelogrammnetz her, welches die u-Ebene bis auf den Punkt ∞ schlicht bedeckt. Die bezüglich $\Gamma^{(u)}$ äquivalenten Punkte sind dann einfach die homologen Punkte in den Parallelogrammen dieses Netzes.

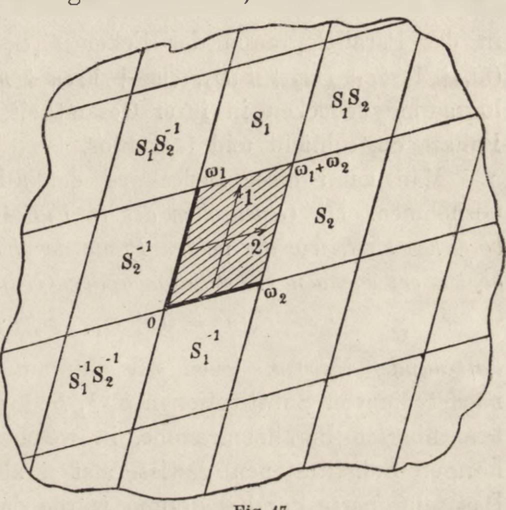


Fig. 47.

Das zuerst gezeichnete Parallelogramm ist in Fig. 47 durch Schraffierung hervorgehoben. Von den Randpunkten des Parallelogramms wollen wir nur diejenigen als dem Parallelogramm angehörig betrachten, welche auf den beiden Seiten von 0 nach ω_2 und von 0 nach ω_1, unter Ausschluß der beiden Endpunkte ω_2 und ω_1, gelegen sind. Um dies in der Figur hervorzuheben, sind diese beiden Seiten in Fig. 47 etwas stärker ausgezogen. Nach dieser Verabredung ist der folgende Satz einleuchtend: *Für jeden endlichen Punkt u_0 der u-Ebene liefert unser Parallelogramm einen und nur einen äquivalenten Punkt.*

Der Punkt $u = \infty$ (der wesentlich singuläre Punkt der elliptischen Funktionen) ist bezüglich $\Gamma^{(u)}$ nur mit sich selbst äquivalent. Er gehört dem Parallelogrammnetze nicht an, wenn auch in jeder Umgebung dieses Punktes unendlich viele Parallelogramme sich finden; man bezeichnet den fraglichen Punkt dieserhalb als einen „*Grenzpunkt*" der Gruppe $\Gamma^{(u)}$. Auf alle übrigen Punkte der u-Ebene bezieht sich nun folgende grundlegende Erklärung: *Unter einem „Diskontinuitätsbereiche" der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ versteht man einen aus einem oder mehreren Stücken bestehenden Bereich der u-Ebene, welcher für jeden vom Grenzpunkte der Gruppe verschiedenen Punkt u_0 einen und nur einen äquivalenten aufweist, und welcher den Grenzpunkt der Gruppe selbst nicht enthält.*[1])

1) Wir haben die Definition des „Diskontinuitätsbereiches" hier gleich so allgemein gefaßt, daß sie für die im nächsten Kapitel zu besprechende Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$,

Üben wir auf einen Diskontinuitätsbereich der $\Gamma^{(u)}$ jede Substitution dieser Gruppe einmal und nur einmal aus, so ergeben sich unendlich viele Bereiche, welche in ihrer Gesamtheit jeden vom Grenzpunkte der $\Gamma^{(u)}$ verschiedenen Teil der u-Ebene schlicht und ohne Lücke bedecken müssen. Dies ist, wenn wir das in Fig. 47 schraffierte Parallelogramm als Diskontinuitätsbereich benutzen, ja unmittelbar einleuchtend. Dieser Bereich geht durch die Substitution:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

in das Parallelogramm der Ecken $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $m_1\omega_1 + (m_2+1)\omega_2$, $(m_1+1)\omega_1 + (m_2+1)\omega_2$, $(m_1+1)\omega_1 + m_2\omega_2$ über, und diese Parallelogramme bedecken in ihrer Gesamtheit die u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞, schlicht und lückenlos.

Man kann diese Bedeckung der u-Ebene aber auch schrittweise vornehmen. *Die Gegenseiten des in Fig. 47 schraffierten Diskontinuitätsbereiches sind, wie die beiden Pfeile der Figur andeuten sollen, durch die beiden erzeugenden Substitutionen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$:*

$$S_1(u) = u + \omega_1, \quad S_2(u) = u + \omega_2$$

aufeinander bezogen. Üben wir nun auf den schraffierten Bereich zunächst die vier Substitutionen $S_1^{\pm 1}$, $S_2^{\pm 1}$ aus, so gewinnen wir die vier benachbarten Parallelogramme, in welche wir die Symbole der zugehörigen Substitutionen gewissermaßen als „Namen" eintragen wollen. Das schraffierte Parallelogramm würde dann folgerecht den „Namen" 1 der „identischen" Substitutionen $u' = u$ erhalten müssen. Das Parallelogramm S_1 hat nun noch drei ungedeckte Seiten; längs dieser Seiten tragen wir jetzt die neuen Parallelogramme S_1^2, S_1S_2, $S_1S_2^{-1}$ an (vgl. Fig. 47). In dieser Weise fahren wir fort, indem wir an ein schon gewonnenes Parallelogramm S die benachbarten $SS_1^{\pm 1}$, $SS_2^{\pm 1}$, soweit dieselben nicht schon hergestellt sind, antragen. *Diese schrittweise zu vollziehende Herstellung des ganzen Netzes versinnlicht uns im geometrischen Bilde die Erzeugung der ganzen Gruppe $\Gamma^{(u)}$ aus S_1 und S_2.*

Es ist nun zu bemerken, daß ein Diskontinuitätsbereich der Gruppe Γ noch in höchst mannigfaltiger Weise wählbar ist. Irgendein Stück eines zuerst gewählten Bereiches kann man demselben nehmen und durch ein äquivalentes Stück ersetzen, ohne daß der neue Bereich auf-

bei der jedoch die Anzahl der Grenzpunkte nicht gleich 1, sondern unendlich ist, gleich mit gilt. Übrigens ist der Begriff des Diskontinuitätsbereiches allgemein grundlegend für die Theorie der „eigentlich diskontinuierlichen" Gruppen linearer Substitutionen einer komplexen Variabelen; man sehe darüber die „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von F. Klein und R. Fricke, Bd. 1 S. 62 (Leipzig, 1897) oder „Modulfunktionen", Bd. 1 S. 185.

hörte, ein Diskontinuitätsbereich der Gruppe zu sein. Nun ist es allerdings zweckmäßig, den Bereich (was hier ja möglich ist) aus *einem einzigen* Stücke aufzubauen. Aber auch dann zeigt uns die bereits S. 182 ff. entwickelte *„lineare Transformation der Perioden“* noch eine große Mannigfaltigkeit von Gestalten für einen Diskontinuitätsbereich unserer $\Gamma^{(u)}$. Sind (wie S. 182) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, irgend vier ganze Zahlen der Determinante 1:

(1) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so setzen wir wieder:

(2) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

und wollen jedes so erreichbare Paar ω_1', ω_2' als ein *„Paar primitiver Perioden“* für unsere $\Gamma^{(u)}$ bzw. für die ihr zugehörigen doppeltperiodischen Funktionen bezeichnen; zu diesen Paaren primitiver Perioden gehören natürlich auch die ursprünglichen ω_1, ω_2. Da sich diese ω_1, ω_2 zufolge (1) in der Gestalt:

$$\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_2', \quad \omega_2 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'$$

auch ihrerseits als *ganzzahlige* Kombinationen der ω_1', ω_2' darstellen lassen, so ist unsere $\Gamma^{(u)}$ auch als Gruppe der Substitutionen:

(3) $$u' = u + m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2',$$

zu bilden für alle Paare ganzer Zahlen m_1', m_2', darstellbar.

Wenden wir nun auf diese neue Gestalt der $\Gamma^{(u)}$ die am Anfang des vorliegenden Paragraphen durchgeführte Betrachtung an, *so ergibt sich als neue Gestalt des Diskontinuitätsbereiches der $\Gamma^{(u)}$ das geradlinige Parallelogramm der Ecken* $0, \omega_2', \omega_1' + \omega_2', \omega_1'$. Die Beziehungen zwischen diesen den sämtlichen primitiven Periodenpaaren zugehörigen Parallelogrammen sollen im folgenden Kapitel näher untersucht werden. Als Ziel unserer nächsten Betrachtungen aber sehen wir an, unter allen diesen zunächst gleichberechtigten Parallelogrammen ein eindeutig zu erklärendes als besonders geeignet auszusuchen. Hierhin führt die nachfolgende Untersuchung.

§ 3. Einführung eines secksekigen Diskontinuitätsbereichs der $\Gamma^{(u)}$ und Erklärung eines reduzierten Periodenpaares.

Wir gehen von irgendeinem Paare primitiver Perioden ω_1, ω_2 unserer $\Gamma^{(u)}$ aus, verstehen unter u_0 einen beliebig gewählten Punkt der u-Ebene und bezeichnen die gesamten mit u_0 äquivalenten Punkte durch $u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$; dabei sei etwa $u_1 = u_0 + \omega_1$, $u_2 = u + \omega_2$, im übrigen aber seien die Bezeichnungen u_k vorerst willkürlich auf die mit u_0 äquivalenten Punkte verteilt. Diejenige Substitution der Gruppe $\Gamma^{(u)}$, welche u_0 in u_k transformiert, werde mit S_k bezeichnet. Wir denken das Parallelogramm der Ecken $u_0, u_0 + \omega_2, u_0 + \omega_1 + \omega_2, u_0 + \omega_1$ ge-

zeichnet und von ihm aus sogleich das ganze zugehörige Parallelogrammnetz hergestellt, dessen „Gitterpunkte" die Punkte u_k sind. Dieses Netz überzieht die u-Ebene mit zwei Systemen äquidistanter paralleler Geraden (vgl. Fig. 47). Der senkrechte Abstand zweier benachbarten Geraden im einen System sei E_1, im anderen E_2; unter E verstehen wir einen dieser Abstände, der nicht größer ist als der andere.[1]) Die beiden Diagonalen des einzelnen Parallelogramms mögen die Längen D_1 und D_2 haben; D sei eine unter ihnen, die nicht kleiner ist als die andere. Ist u irgendein endlicher Punkt, so kann man sofort einen Gitterpunkt nachweisen, dessen Entfernung von u kleiner als D ist; andererseits ist die Gesamtzahl aller Gitterpunkte, welche von u einen Abstand $< D$ haben, beschränkt, indem sich für diese Anzahl eine bestimmte endliche, allein von $\frac{D}{E}$ abhängige obere Schranke angeben läßt.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Unter B_0 verstehen wir das System aller Punkte der u-Ebene, welche von u_0 nicht weiter entfernt sind als von irgendeinem der mit u_0 äquivalenten Punkte u_1, u_2, u_3, ...* Es gibt jedenfalls unendlich viele solche Punkte; denn wenn wir z. B. um u_0 den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}E$ beschreiben, so gehört sicher jeder Punkt dieser Kreisfläche dem System B_0 an.

Um weitere Angaben über das Punktsystem B_0 zu machen, bezeichnen wir mit G_k die Gerade der u-Ebene, welche die Verbindungsgerade der Punkte u_0 und u_k in ihrem Mittelpunkte senkrecht schneidet.[2]) Es ist einleuchtend, daß von u_0 aus gesehen kein Punkt von B_0 jenseits irgendeiner Geraden G_k gelegen sein kann. Alle Punkte diesseits der Geraden liegen u_0 näher als u_k, alle Punkte auf G_k haben von u_0 und u_k gleichen Abstand. Hieraus geht sogleich weiter hervor: Ist u irgendein Punkt des Systems B_0, so gehört jeder Punkt der Verbindungsgeraden von u nach u_0 diesem Systeme an. Gäbe es nämlich auf dieser Verbindungsgeraden einen Punkt u', der nicht zu B_0 gehörte, so würde ein Gitterpunkt u_k nachweisbar sein, dem u' näher läge als dem Punkte u_0. Dann aber müßte die nicht durch u_0 ziehende Gerade G_k die Verbindungsstrecke von u_0 nach u' überkreuzen, und auch der Punkt u könnte nicht zu B_0 gehören. *Das Punktsystem B_0 bildet demnach ein Kontinuum.*

Bezeichnen wir mit u_3 und u_4 bie beiden Gitterpunkte $u_0 - \omega_1$ und $u_0 - \omega_2$, so bilden die beiden Paare paralleler Geraden G_1, G_3 und G_2, G_4 ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkte u_0, dessen Diagonalen

1) E ist also der kleinere Abstand, wenn E_1, E_2 verschieden sind, oder einer unter ihnen, wenn sie gleich sind.

2) k ist irgendeiner der Indizes $1, 2, 3, \cdots$.

D_1' und D_2' sein mögen; D' sei eine derselben, die nicht kleiner als die andere ist. Kein Punkt von B_0 kann hiernach um weiter als $\frac{1}{2}D'$ von u_0 abstehen: *Das Punktkontinuum B_0 liegt ganz im Endlichen, indem jeder Punkt u desselben von u_0 einen Abstand $< \frac{1}{2}D'$ hat.*

Von zwei weiteren Eigenschaften des Kontinuums B_0 soll die eine sogleich, die andere späterhin zur Verwendung kommen. Lassen wir an Stelle von u_0 irgendeinen anderen endlichen Punkt u_0' treten und bauen von ihm aus mit dem bisherigen primitiven Periodenpaar ω_1, ω_2 ein neues Parallelogrammnetz auf, so wird dieses aus dem ersten Netze einfach durch die Translation hervorgehen, welche u_0 nach u_0' verschiebt. Da hierbei die Maßverhältnisse unverändert bleiben, so ist einleuchtend, *daß das entsprechend zu u_0' gehörende Punktsystem B_0' einfach auch durch jene Translation aus B_0 hervorgeht.* Weiter geht das erste Parallelogrammnetz in sich selber über, wenn wir die u-Ebene um den Punkt u_0 durch den Winkel π drehen. Da auch hierbei die Maßverhältnisse unverändert bleiben, so folgt: *Das Punktkontinuum B_0 geht bei der Drehung um u_0 durch den Winkel π in sich selbst über und hat somit u_0 zum Mittelpunkte.*

Um nun festzustellen, welcher Teil des durch die Geraden G_1, G_2, G_3, G_4 umgrenzten Parallelogramms das Kontinuum B_0 ist, denke man auch noch die übrigen Geraden G_5, $G_6, \ldots$ gezeichnet. Dann bleibt um u_0 herum ein Bereich der u-Ebene von Geraden frei, und dieser liefert dann einfach die Innenpunkte des Systemes B_0. Doch braucht man hierbei keineswegs alle Geraden G_k zu zeichnen. Die einzelne G_k kann in das Innere des von $G_1, \ldots, G_4$ umrandeten Parallelogramms ja nur dann eintreten, wenn der Abstand des Punktes u_k von u_0 kleiner als D' ist. Für die Anzahl der Gitterpunkte u_k, die diese Bedingung erfüllen, läßt sich aber wieder eine allein von D' und E abhängige obere Schranke angeben. Wir erkennen: *B_0 ist ein endlicher, von endlich vielen Geraden begrenzter Bereich, der in u_0 einen Mittelpunkt hat.*

Ist G_k eine Gerade, welche sich an der Berandung von B_0 beteiligt, so kann, wie oben festgestellt ist, kein Punkt des Bereiches B_0, von u_0 aus gesehen, jenseits G_k liegen. Es folgt: *Die Winkel in den Ecken des Polygons B_0 sind alle konkav.* Übrigens ergibt sich sogleich weiter aus dem Umstande, daß u_0 Mittelpunkt von B_0 ist: *Der Rand von B_0 ist ein geradliniges Polygon von gerader Seitenanzahl $2n$; je zwei diametrale Seiten sind parallel und gleich.*

Es sei wieder G_k irgendeine der $2n$ Geraden, welche den Rand des Bereiches B_0 liefern. Die Punkte u_0 und u_k liegen in gleichen Abständen beiderseits von G_k, und die Verbindungsgerade dieser Punkte schneidet G_k senkrecht, etwa im Punkte u_k'. Die Drehung der u-Ebene

um u_0 durch den Winkel π werde durch das Symbol T_0 bezeichnet; sie und die Translation S_k sind gegeben durch:

$$T_0(u) = -u + 2u_0, \quad S_k(u) = u + (u_k - u_0).$$

Da beide Transformationen unser Parallelogrammnetz in sich überführen, so leistet dasselbe die aus ihnen zusammengesetzte Transformation:

$$T_k(u) = S_k T_0(u) = -u + (u_0 + u_k) = -u + 2u_k',$$

welche die Drehung der u-Ebene um den Punkt u_k' durch den Winkel π darstellt. Gehört nun der Punkt u' der Geraden G_k (vgl. Fig. 48) dem Bereiche B_0 (als Randpunkt) an, so gibt es keinen Gitterpunkt u_i, welcher näher an u' gelegen wäre als u_0. Üben wir jetzt die Drehung T_k aus, so folgt, daß es in dem transformierten und also in dem ursprünglichen Systeme der Gitterpunkte keinen gibt, an dem der mit u' bezüglich u_k' diametrale Punkt u'' der Geraden G_k (vgl. Fig. 48) näher gelegen wäre als an u_0. Von zwei solchen bezüglich u_k' diametralen Punkten u' und u'' der Geraden G_k gehören also entweder beide oder keiner dem Bereiche B_0 an. Es ergibt sich so: *Die von G_k gelieferte Seite des Randes von B_0 hat u_k' zum Mittelpunkt, so daß die beiden Endpunkte dieser Seite (Ecken von B_0) vom Zentrum u_0 gleichen Abstand haben: Der Rand von B_0 ist hiernach ein „Polygon im Kreise", und es hat dies Polygon, wie wir wiederholen, den Kreismittelpunkt u_0 selbst zum Zentrum.*

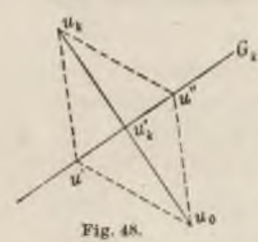


Fig. 48.

Bezeichnen wir die begrenzte Strecke der Geraden G_k, welche B_0 berandet, als „Seite" G_k unseres Polygons, und ist G_i die gegenüberliegende Seite, so stellen G_i und G_k „Niveaugerade" der Translation S_k dar (vgl. S. 67), während die durch u_0 und in ihrer Verlängerung durch u_k hindurchziehende Verbindungsgerade der Mitten jener Seiten eine die Niveaugeraden senkrecht schneidende „Bahngerade" der Translation S_k ist. Es folgt: *Bei Ausübung der Translation S_k kommt die Seite G_i unseres Polygons gerade genau mit der Gegenseite G_k zur Deckung, so daß homologe Punkte je zweier Gegenseiten des Polygons bezüglich der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ äquivalent sind.*

Es sei nun S_l irgendeine von $S_0 = 1$ verschiedene Substitution der Gruppe Γ, und es gehe B_0 durch die Transformation S_l in $B_l = S_l(B_0)$ über. Diese beiden Bereiche B_0 und B_l können nicht übereinandergreifen; denn ihre Innenflächen liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden G_l. Sind S_l und S_m voneinander und von S_0 verschieden, so können auch die Bereiche B_l und B_m nicht übereinandergreifen; denn sonst müßte dasselbe von den Bereichen $S_m^{-1}S_l(B_0)$ und B_0 gelten, obwohl die Substitution $S_m^{-1}S_l$ von S_0 verschieden ist. Denkt man demnach alle, den

Substitutionen unserer $\Gamma^{(u)}$ entsprechenden Bereiche $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ gezeichnet, so kann kein Stück der u-Ebene mit einem nicht-verschwindenden Flächeninhalte von mehr als einem Bereiche bedeckt sein. Es kann aber auch keinen endlichen Punkt u geben, der nicht bedeckt wäre. Es findet sich nämlich in irgendeiner Entfernung $> D$ von u (vgl. S. 236) stets eine nicht verschwindende, endliche Anzahl von Gitterpunkten, und unter ihnen also einer u_h, von dem u nicht weiter absteht als von den übrigen. Dann aber liegt u im Innern oder doch auf dem Rande von B_h. *Die gesamten Bereiche $B_0, B_1, B_2, \ldots$ liefern eine schlichte und lückenlose Bedeckung der ganzen endlichen u-Ebene, so daß wir im Bereiche B_0 (unter Vorbehalt einer Bestimmung über die Zurechnung der Randpunkte zum Bereiche) einen Diskontinuitätsbereich der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ erkennen.*

Wir betrachten nun einen Eckpunkt des Bereiches B_0. Derselbe sei im Bereichnetze von ν Bereichen $B_0, B_i, B_k, \ldots$ umlagert; dann ist sicher $\nu \geqq 3$, da die Polygonwinkel konkav sind. Von den ν in Rede stehenden Winkeln gehört nur ein erster dem Bereiche B_0 an. Indessen findet sich für jeden der $(\nu - 1)$ übrigen Winkel ein bestimmter äquivalenter Winkel in B_0. Auch sind diese $(\nu - 1)$ Winkel des Bereiches B_0 untereinander und vom ersten verschieden, was man leicht aus dem Umstande folgert, daß äquivalente Winkel (als durch Translationen ineinander übergehend) gleichgerichtete Schenkel haben. Man sagt, daß diese ν Winkel von B_0 zu einem „Zyklus“ zusammengehören; es ist einleuchtend, daß die Summe der Winkel des Zyklus gleich 2π ist.

Nun mögen sich die $2n$ Ecken von B_0 im ganzen auf μ solche Zyklen verteilen. Dann ist die Winkelsumme von B_0 gleich $2\mu\pi$, und da sie andrerseits gleich $(2n-2)\pi$ ist, so ist die Zyklenanzahl durch:

$$\mu = n - 1$$

gegeben. Da ferner jeder Zyklus mindestens *drei* Ecken enthält, so ist die Eckenanzahl $2n$ mindestens gleich 3μ. Man findet also:

$$2n \geqq 3\mu = 3n - 3, \quad 3 \geqq n,$$

so daß nur die beiden Möglichkeiten $n = 3$ und $n = 2$ in Betracht kommen: *Der Diskontinuitätsbereich B_0 der $\Gamma^{(u)}$ ist entweder ein „Sechseck im Kreise“, das den Kreismittelpunkt u_0 selbst zum Mittelpunkt hat, oder ein Rechteck; im ersten Falle haben wir zwei Eckenzyklen, im letzten Falle einen.* Übrigens können wir *das Rechteck als Grenzfall eines solchen Sechsecks* ansehen, indem sich nämlich alsdann zwei Gegenseiten des Sechsecks auf Punkte zusammengezogen haben. Da eine Änderung des Punktes u_0 nur eine entsprechende Translation von B_0 bewirkt (vgl. S. 237), so merken wir noch den Satz an: *Der Diskontinuitätsbereich der*

$\Gamma^{(u)}$ als Sechseck B_0 ist in Gestalt und Orientierung eindeutig bestimmt, kann aber noch einer beliebigen Parallelverschiebung unterzogen werden.

Die Gestalt des Sechsecks ist hierneben in Fig. 49 veranschaulicht. Die drei mit Nummern versehenen Pfeile mögen die nun durch S_1, S_2, S_3 zu bezeichnenden Substitutionen festlegen, welche die Seiten des Sechsecks in die Gegenseiten überführen. Liegt (wie in Fig. 49) nicht der Grenzfall eines Rechteckes vor, so bestimmen wir betreffs der Verteilung der Indizes 1, 2 und 3 folgendes: Gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar kleinster Seiten des Sechsecks, so gehöre zu diesem die Translation S_3; hat das Sechseck indessen vier kleinste Seiten, während die beiden letzten Seiten größer als jene sind, so soll diesem Paar S_1 zugehören. Nur wenn wir ein gleichseitiges Sechseck haben, bleibe die Verteilung der Indizes unter Einhaltung der in Fig. 49 vorgeschriebenen Reihenfolge willkürlich wählbar. Gleichzeitige Umkehrung der drei Pfeilrichtungen ist eine unwesentliche Änderung; sie kommt auf Ersatz der drei S_k durch ihre inversen Substitutionen S_k^{-1} hinaus.

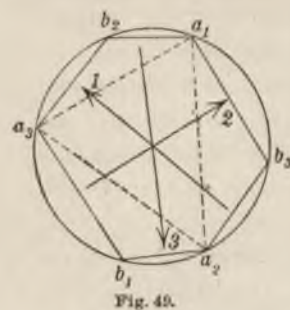


Fig. 49.

Indem wir den Grenzfall des Rechteckes unten erledigen, setzen wir zunächst im allgemeinen Falle:

$$S_k(u) = u + \omega_k, \qquad (k=1,2,3),$$

wobei neben ω_1 und ω_2 noch eine dritte Periode ω_3 eingeführt ist und natürlich die ω_1, ω_2 nicht mit den bisher so bezeichneten Perioden identisch zu sein brauchen. *Diese drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 sind bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel für unsere $\Gamma^{(u)}$ einzeln eindeutig bestimmt; nur im Falle des gleichseitigen Sechsecks, wo:*

$$(1) \qquad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \varrho^2 : \varrho : 1, \qquad \left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

gilt, können die ω_1, ω_2, ω_3 noch zyklisch permutiert werden.

Die Seitenzuordnung lehrt, daß die in Fig. 49 mit a_1, a_2, a_3, bezeichneten Ecken den einen, die drei Ecken b den anderen Eckenzyklus bilden. Man lese aus der Figur ab, daß:

$$b_2 = S_1(b_3), \quad b_3 = S_2(b_1), \quad b_1 = S_3(b_2)$$

gilt. Hieraus folgt:

$$b_2 = S_1 S_2 S_3(b_2),$$

und da S_0 die einzige Substitution von $\Gamma^{(u)}$ ist, welche b_2 in sich transformiert, so gilt $S_1 S_2 S_3 = 1$. *Zwischen den drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 besteht die Relation:*

$$(2) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

so daß sich insbesondere für ω_3 *die Darstellung ergibt:*

(3) $$\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2.$$

Man wird längst bemerkt haben, daß wir hier unmittelbar zu den Entwicklungen von S. 171ff. zurückgeführt sind. Das durch die Punkte a_1, a_2, a_3 gelieferte Dreieck hat die Seiten $|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|$ und ist spitzwinklig. Die damalige Entwicklung zeigt also: *Der in jedem Falle (auch dem äquianharmonischen Falle des gleichseitigen Sechsecks) eindeutig bestimmte Quotient* ω *der beiden Perioden* ω_1, ω_2 *ist ein Innenpunkt des in der Fig. 42, S. 176 schraffierten Bereiches, oder er liegt (im Falle von vier kleinsten Seiten des Sechsecks und im äquianharmonischen Falle) auf dem von* $\omega = \varrho$ *nach* $\omega = i\infty$ *ziehenden Rande dieses Bereiches.* Insbesondere ist es der in Fig. 49 gewählten Anordnung der Pfeile 1 und 2 zu danken, daß ω ein komplexer Wert mit *positivem* imaginären Bestandteile ist.

Die für den Fall des Rechtecks noch nötigen Ergänzungen sind nun leicht gegeben. Ist das Rechteck kein Quadrat, so verbinde der Pfeil 1 die beiden kleineren Seiten; die Richtungen der Pfeile seien so gewählt, daß ω wieder einen positiven imaginären Bestandteil erhält. *Die Perioden* ω_1, ω_2 *sind wieder bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel eindeutig bestimmt, und der Punkt* ω *liegt auf dem von* $\omega = i$ *nach* $\omega = i\infty$ *ziehenden geradlinigen Rande des in Fig. 42, S. 176 schraffierten Bereiches; im harmonischen Falle (dem eines Quadrates) können wir überdies noch die Änderung* $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1$ *vornehmen (vgl. S. 179), die aber den Quotienten* $\omega = i$ *nicht ändert.*

Will man an Stelle des Sechsecks lieber mit einem Parallelogramm arbeiten, so trenne man, wie Fig. 50 zeigt, das Dreieck $a_1 b_2 a_3$ ab und ersetze es durch das äquivalente $c\, b_3\, a_2$; desgleichen ersetze man das Dreieck $a_2 a_3 b_1$ durch $c\, a_1 b_3$. Die Gegenseiten des Parallelogramms sind dann durch S_1 und S_2 aufeinander bezogen. Zweckmäßig wird übrigens sein, daß wir auch hier (wie oben, vgl. S. 179), sobald $|\omega_1| < |\omega_2|$ ist, noch die Änderung $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1$ vornehmen, was dem Übergange von Fig. 42 zu Fig. 43, S. 176ff., entspricht. *Die nunmehr für unsere* $\Gamma^{(u)}$ *erklärten primitiven Perioden* ω_1, ω_2 *sollen als die „reduzierten" Perioden bezeichnet werden; sie sind bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel eindeutig (im harmonischen Falle* $(\omega = i)$ *zweideutig, im äquianharmonischen* $(\omega = \varrho)$ *dreideutig) bestimmt. Der Quotient* ω *ist in jedem Falle eindeutig bestimmt und liefert einen Punkt im Innern oder auf dem stark markierten Rande des Doppeldreiecks der Fig. 43, S. 179.*

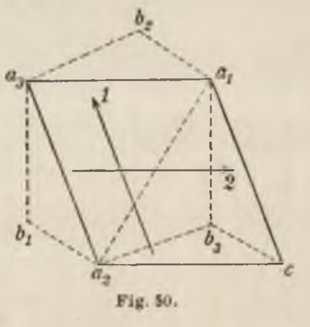


Fig. 50.

Der Mittelpunkt u_0 des Sechsecks B_0 konnte noch beliebig verschoben werden, ohne daß die Gestalt und Orientierung von B_0 sich änderte. Wir treffen die Anordnung etwa so, daß ein erstes dem reduzierten Periodenpaar entsprechendes Parallelogramm die Ecken $0, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1$ bekommt. Damit dieses Parallelogramm ein Diskontinuitätsbereich der $\Gamma^{(u)}$ ist, rechnen wir wie oben (vgl. S. 233) von den Randpunkten nur die beiden von 0 nach ω_1 und ω_2 ziehenden Seiten, jedoch ohne die Endpunkte ω_1, ω_2, dem Parallelogramm zu.

Das gewonnene Ergebnis ist um so wichtiger, als wir auch umgekehrt leicht folgenden Satz zeigen können: *Bauen wir mit irgend zwei Perioden ω_1, ω_2, deren Quotient ω dem Doppeldreieck der Fig. 43, S. 179, angehört, das Parallelogramm der Ecken* 0, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 *auf und erklären damit eine Gruppe $\Gamma^{(u)}$, so liegt für diese $\Gamma^{(u)}$ in jenen ω_1, ω_2 stets unmittelbar das reduzierte Periodenpaar vor.*[1])

Liegt nämlich ein Periodenrechteck vor, so sei u_0 dessen Mittelpunkt, und $u_1, u_2, \ldots$ seien die Mittelpunkte der übrigen Rechtecke des Netzes. Hier ist dann unmittelbar einleuchtend, daß das erste Rechteck das System aller Punkte u darstellt, die von u_0 nicht weiter abstehen als von einem der äquivalenten Punkte u_k. Das Rechteck ist also unser eindeutig bestimmter Bereich B_0 und ω_1, ω_2 die reduzierten Perioden.

Liegt kein Rechteck vor, so wird das Parallelogramm durch seine kleinste Diagonale in zwei spitzwinklige Dreiecke zerlegt. Man wolle diese Zerlegung an allen Parallelogrammen des Netzes vornehmen, worauf die u-Ebene mit einem Netze spitzwinkliger Dreiecke überzogen erscheint. Wenn man jetzt in jedem Dreieck den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises geradlinig mit den drei Seitenmitten verbindet, so entsteht, wie die Fig. 51 veranschaulicht, ein Sechsecknetz. Fassen wir nun etwa das Sechseck mit dem Mittelpunkt $u_0 = 0$ ins Auge, so gehören die sechs Seiten desselben zu denjenigen Geraden, die wir oben G_k nannten. Das zum Punkte $u_0 = 0$ gehörende Sechs-

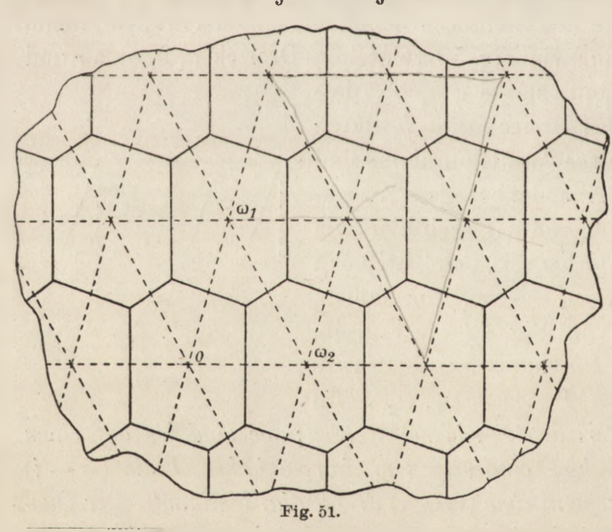


Fig. 51.

1) Der Satz ist auf arithmetischem Wege bereits S. 186ff. bewiesen. Ist für die Gruppe $\Gamma^{(u)}$ des Textes in ω'_1, ω'_2 irgendein Paar primitiver Perioden vor-

eck B_0 ist also ein Teil des in Fig. 51 vorliegenden Sechsecks um $u_0 = 0$. Der Teil kann aber vom Ganzen nicht verschieden sein, da B_0 sonst nicht mehr ein Diskontinuitätsbereich der $\Gamma^{(u)}$ wäre; es ist nämlich das Sechseck der Fig. 51 mit dem Mittelpunkte $u_0 = 0$ eben auch ein Diskontinuitätsbereich unserer Gruppe.[1]) Unser Sechseck liefert nun unmittelbar ω_1, ω_2 als das reduzierte Periodenpaar.

Unsere Ergebnisse eröffnen uns einen geordneten Überblick über die gesamten existierenden Gruppen $\Gamma^{(u)}$. *Sie werden alle, und jede nur einmal, von allen wesentlich verschiedenen reduzierten Periodenpaaren geliefert.* Der Wert ω hat den gesamten Bereich des Doppeldreiecks der Fig. 43, S. 179, zu beschreiben. Beim einzelnen ω wähle man ω_2 als endliche, von 0 verschiedene komplexe Zahl willkürlich und erkläre ω_1 durch die Gleichung $\omega_1 = \omega \cdot \omega_2$. Ist ω weder gleich i noch gleich ϱ, so wird auf diese Weise jede Gruppe zweimal geliefert, da gleichzeitiger Zeichenwechsel von ω_1, ω_2 ja die Gruppe nicht ändert. Für $\omega = i$ (Periodenquadrat) wird sogar jede Gruppe viermal, für $\omega = \varrho$ (gleichseitiges Sechseck) jede sechsmal geliefert. Um jede Gruppe $\Gamma^{(u)}$ nur einmal zu gewinnen, schreibe man einfach vor, *daß die Amplitude der komplexen Zahl ω_2 im allgemeinen zwischen 0 und π, im harmonischen Falle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und im äquianharmonischen zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ liegen soll, jedesmal unter Einschluß der unteren und Ausschluß der oberen Grenze.*

Eine Ausartung der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ tritt ein, falls ω in die Spitze $i\infty$ des oft genannten Doppeldreiecks hineinrückt, während ω_2 irgendeinen endlichen, von 0 verschiedenen Wert hat. Wir können vorerst noch bei endlichen ω als erstes Parallelogramm dasjenige der Ecken $\pm \frac{\omega_1}{2}$, $\pm \frac{\omega_1}{2} + \omega_2$ wählen. Was aus diesem Parallelogramm für $\lim \omega = i\infty$ wird, ist leicht zu sehen. Wir können (auf der u-Kugel) eine beliebig kleine Umgebung des Punktes $u = \infty$ ausschneiden und alsdann immer noch $|\omega|$ zwar endlich, aber so groß wählen, daß der Rest der u-Kugel

---

gelegt, so entsteht deren Quotient ω' aus dem Quotienten ω der beiden Perioden ω_1, ω_2 durch eine „lineare Transformation":

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Es wurde nun S. 186 u. f. bewiesen, daß, wenn hier nicht die identische Transformation vorliegt, neben ω nicht auch noch ω' dem Doppeldreieck der Fig. 43 angehören kann (mit den bekannten Ausnahmen im harmonischen und äquianharmonischen Falle). Das heißt aber eben, daß jedes neue primitive Paar ω_1', ω_2' nicht das „reduzierte" sein kann.

1) Man mache sich mittelst der Fig. 51 klar, in welcher Weise die vier Sechseck-Bestandteile, welche das Parallelogramm der Ecken 0, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 bedecken, sich zu einem vollen Sechseck zusammenbauen lassen.

bereits vollständig von den zu den Substitutionen $u' = u + m_2 \omega_2$ gehörenden Parallelogrammen bzw. von Teilen derselben bedeckt erscheint. Für $\lim \omega = i\infty$ arten die Parallelogramme in Kreisbogenzweiecke der u-Kugel aus, die sich von zwei entgegengesetzten Richtungen mit ihren Spitzen an den Punkt $u = \infty$ heranziehen. *Für* $\lim \omega = i\infty$ *artet die Gruppe* $\Gamma^{(u)}$ *in die Gruppe aller Substitutionen:*

$$u' = u + m_2 \omega_2$$

aus; als Diskontinuitätsbereich bietet sich ein „Parallelstreifen" der u-Ebene dar, begrenzt von zwei parallelen Geraden, die durch die Punkte $u = 0$ *und* $u = \omega_2$ *senkrecht zur Verbindungslinie dieser beiden Punkte laufen.*

§ 4. Von den Transformationen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ in sich.

Ein Problem, aus dem man sehr viele wichtige Fragestellungen der Theorie der elliptischen Funktionen entwickeln kann, ist, *alle linearen Transformationen der einzelnen Gruppe* $\Gamma^{(u)}$ *in sich aufzustellen.* Der Ansatz zur Behandlung dieser Aufgabe ist in den Erklärungen von S. 128 enthalten. Führen wir an Stelle von u eine neue Variabele U mittelst einer linearen Transformation $U = T(u)$ ein, so werden die Substitutionen $u' = S(u)$ von Γ in die Substitutionen:

$$U' = TST^{-1}(U)$$

transformiert, welche in ihrer Gesamtheit die „transformierte Gruppe" $\Gamma' = T\Gamma T^{-1}$ bilden. Es handelt sich also jetzt um die Aufgabe, die lineare Transformation T in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, daß diese transformierte Γ' mit der ursprünglichen Gruppe Γ gleich ist.

Da der Grenzpunkt $T(\infty)$ der transformierten Γ' mit dem der ursprünglichen Γ, d. h. mit dem Punkte ∞, zusammenfallen muß, so ist dieser Punkt ∞ ein Fixpunkt von T (vgl. S. 70), und also ist T eine lineare *ganze* Transformation:

$$T(u) = au + b, \tag{1}$$

in der a eine von 0 verschiedene Konstante ist. Die zu T inverse Transformation ist:

$$T^{-1}(u) = a^{-1}u - a^{-1}b.$$

Wir wählen nun ω_1, ω_2 als reduziertes Periodenpaar der Gruppe Γ und verstehen unter S_1 und S_2 die erzeugenden Substitutionen:

$$S_1(u) = u + \omega_1, \qquad S_2(u) = u + \omega_2$$

der Gruppe. Für die ihnen entsprechenden erzeugenden Substitutionen der transformierten Gruppe:

$$TS_1T^{-1}(U) = U + \Omega_1, \qquad TS_2T^{-1}(U) = U + \Omega_2$$

berechnet man dann einfach als Beziehung der Ω_1, Ω_2 zu den ω_1, ω_2:

(2) $$\Omega_1 = a\omega_1, \qquad \Omega_2 = a\omega_2.$$

Da sich nun diese erzeugenden Substitutionen wegen $\Gamma' = \Gamma$ auch in der Gruppe Γ finden müssen, so sind Ω_1, Ω_2 als ganzzahlige Kombinationen der ω_1, ω_2 darstellbar. Und da andererseits auch S_1 und S_2 in der Gruppe:

$$U' = U + m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2$$

enthalten sind, so sind auch ω_1, ω_2 ganzzahlige Kombinationen der Ω_1, Ω_2. Es gelten demnach zwei Gleichungen:

(3) $$\Omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \Omega_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

wo die α, β, γ, δ ganze Zahlen der Determinante 1 oder -1 sind. Da jedoch der Quotient $\Omega = \Omega_1 : \Omega_2$ mit dem Periodenquotienten ω gleich ist und also wie dieser einen *positiven* imaginären Bestandteil hat, so ist, wie man aus (3) leicht ausrechnet, nur:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zulässig.

Mit Benutzung von (2) ergibt sich jetzt weiter:

$$\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Der Satz von S. 187 (s. auch die Note S. 242) liefert daraufhin unmittelbar das Ergebnis: Für das Zahlenquadrupel α, β, γ, δ, das wir in dem Symbol $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ zusammenfassen, haben wir, wenn weder der harmonische, noch der äquianharmonische Fall vorliegt, nur die beiden Möglichkeiten:

(4) $$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1, 0\\ 0, \pm 1\end{pmatrix};$$

für $\omega = i$, wo noch die Substitution (8) S. 187 hinzukommt, liegen die vier Möglichkeiten vor:

(5) $$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1, 0\\ 0, \pm 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & \pm 1\\ \mp 1, & 0\end{pmatrix},$$

endlich für $\omega = \varrho$, wo noch die Substitutionen (6) und (7) S. 187 hinzutreten, die sechs:

(6) $$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & \mp 1\\ \pm 1, & \pm 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pm 1, & \pm 1\\ \mp 1, & 0\end{pmatrix}.$$

Tragen wir die gefundenen Zahlenquadrupel in (3) ein und vergleichen die Ergebnisse mit (2), so folgt, daß zunächst in jedem Falle $a = +1$ und $a = -1$ als Werte des ersten Koeffizienten a der Substitution (1) zulässig sind. Für $\omega = i$ und also $\omega_1 = i\omega_2$ ergibt sich außerdem noch der Ansatz:

$$\Omega_1 = a\omega_1 = \pm\,\omega_2, \qquad \Omega_2 = a\omega_2 = \mp\,\omega_1,$$

welcher $a = \mp i$ liefert. Für $\omega = \varrho$ und also $\omega_1 = \varrho\omega_2$ kommen noch die beiden Ansätze hinzu:

$$\Omega_1 = a\omega_1 = \mp \omega_2, \qquad \Omega_2 = a\omega_2 = \pm(\omega_1 + \omega_2),$$
$$\Omega_1 = a\omega_1 = \pm(\omega_1 + \omega_2), \qquad \Omega_2 = a\omega_2 = \mp \omega_1,$$

die uns $a = \mp \varrho^2$ und $a = \mp \varrho$ liefern.

In allen diesen Fällen wird auch tatsächlich die Gruppe Γ durch T in sich transformiert, und zwar, was besonders bemerkenswert ist, ohne daß der zweite Koeffizient b der Transformation T irgendeiner Beschränkung unterliegt. Schreiben wir, um die Unbeschränktheit von b anzudeuten, im Anschluß an die Bezeichnungen von S. 190ff. die Variabele v statt b, so können wir als Ergebnis notieren: *Die Gruppe Γ wird in jedem Falle durch die gesamten Transformationen:*

(7) $$T(u) = \pm u + v$$

in sich transformiert, außerdem im harmonischen Falle noch durch die gesamten Transformationen:

(8) $$T(u) = \pm iu + v,$$

und entsprechend im äquianharmonischen Falle durch:

(9) $$T(u) = \pm \varrho u + v, \qquad T(u) = \pm \varrho^2 u + v.$$

Wir sind hiermit zu den Ergebnissen zurückgeführt, welche wir bereits oben (S. 190ff.) auf algebraischer Grundlage gewonnen hatten. Die Transformationen $T(u) = u + v$ für alle endlichen v liefern die damals oft genannte kontinuierliche Gruppe. Eine planmäßige Bearbeitung dieser Gruppe und der in ihr enthaltenen Untergruppe würde die Ansätze liefern, die zu den Additionstheoremen sowie zur Division und Transformation der elliptischen Funktionen hinführen. Wir werden demnach noch oft Gelegenheit haben, auf die fragliche Gruppe und ihre Untergruppen zurückzugehen.

Unter den übrigen Transformationen T müssen wir hier vor allem noch auf $u' = -u$ hinweisen, eine Transformation, die uns von algebraischer Seite durch die Vertauschung der beiden Blätter der Fläche F_2 geliefert wird. Fügen wir die Substitution $u' = -u$ der $\Gamma^{(u)}$ hinzu, *so gewinnen wir in den gesamten Substitutionen:*

(10) $$u' = \pm u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

eine etwa durch $\Gamma^{(u)}_{(2)}$ oder $\Gamma_{(2)}$ zu bezeichnende erweiterte Gruppe, die wir als die „Substitutionsgruppe der geraden doppeltperiodischen Funktionen" bezeichnen, insofern die einzelne derselben ja in der Tat gegenüber der Substitution $u' = -u$ invariant ist.

Bezüglich dieser $\Gamma_{(2)}$ sind im Periodenparallelogramm, das wir etwa wieder mit den reduzierten Perioden aufbauen, stets die zwei Punkte

u und $(-u + \omega_1 + \omega_2)$, die im Parallelogramm diametral liegen, äquivalent. Wir zerlegen das Parallelogramm etwa durch seine kleinste (im Rechteckfalle durch eine) Diagonale in zwei Dreiecke (vgl. Fig. 51, S. 242) und haben im einzelnen Dreieck einen Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{(2)}$. Die Punkte auf den Dreieckseiten selbst sind dann zu Paaren einander äquivalent. Haben wir z. B. ein ω mit „positivem" reellen Bestandteile, so nehmen wir das Dreieck der Ecken $0, \omega_2, \omega_1$ zum Diskontinuitätsbereiche. Hier sind dann:

$$(11) \qquad u' = -u + \omega_1, \quad u' = -u + \omega_2, \quad u' = -u + \omega_1 + \omega_2$$

drei in der $\Gamma_{(2)}$ enthaltene elliptische Substitionen der Periode 2, welche die Seitenmitten des Dreiecks zu Fixpunkten haben und je zwei zur Mitte symmetrische Punkte der einzelnen Seite als äquivalent erweisen.[1]) Von der einzelnen Seite hat also hier je nur die eine Hälfte dem Diskontinuitätsbereiche anzugehören (vgl. Fig. 52), von den drei Ecken etwa nur die bei $u = 0$; in Fig. 52 ist der Diskontinuitätsbereich durch Schraffierung hervorgehoben, und die Zuordnung der Seitenhälften ist durch Pfeile angedeutet.

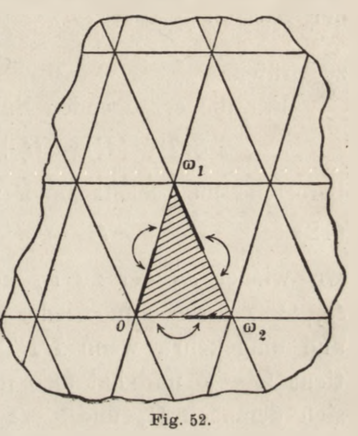


Fig. 52.

Eine *zweite* Art linearer Substitutionen, die *indirekte* Kreisverwandtschaften darstellen (d. h. solche mit Umlegung der Winkel), war S. 73 ff. eingeführt und besprochen. Auf u angewandt erhalten wir die einzelne solche Substitution, wenn wir von u zum konjugiert komplexen Wert $\bar{u}$ gehen und auf diesen sodann irgendeine Substitution erster Art ausüben.

Wir fragen nun, ob wir vielleicht auch solche Substitutionen zweiter Art angeben können, welche $\Gamma^{(u)}$ in sich transformieren. Eine etwa durch $U = \overline{T}(u)$ zu bezeichnende Substitution zweiter Art, welche dies leistet, müßte jedenfalls wieder den Grenzpunkt ∞ zum Fixpunkte haben und also die Gestalt aufweisen:

$$\overline{T}(u) = a\bar{u} + b.$$

Haben wir ein brauchbares $\overline{T}$ gewonnen, so erhalten wir sogleich unendlich viele in der Gestalt $T \cdot \overline{T}$, wo T die gesamten Substitutionen (7)

1) Hat ω negativen reellen Bestandteil, so wählt man zweckmäßig das Dreieck der Ecken $0, -\omega_1, \omega_2$ zum Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{(2)}$ und hat dann an Stelle der Substitutionen (11) die nachfolgenden:

$$u' = -u - \omega_1, \qquad u' = -u + \omega_2, \qquad u' = -u - \omega_1 + \omega_2.$$

bzw. (8) oder (9) durchlaufen soll. Berufen wir uns hierauf, so ist es keine Beschränkung, wenn wir in dem Ansatz für die gesuchten Transformationen $\overline{T}$ den Koeffizienten $b = 0$ setzen und die Amplitude ϑ der komplexen Zahl a auf das Intervall $0 \leqq \vartheta < \pi$ bzw. $0 \leqq \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ oder $0 \leqq \vartheta < \frac{1}{3}\pi$ beschränken. Wir wollen ferner bemerken, daß die durch einmalige Wiederholung von $\overline{T}$ zu gewinnende Transformation erster Art:

$$\overline{T}^2(u) = a\bar{a}\,u$$

natürlich auch die $\Gamma^{(u)}$ in sich überführt. Da hiernach $\overline{T}^2$ zu den Transformationen (7) ff. gehört, andrerseits aber $a \cdot \bar{a}$ als Produkt zweier nicht-verschwindender, konjugiert komplexer Zahlen $a, \bar{a}$ reell und > 0 ist, so bleibt nur $a\bar{a} = 1$ übrig. Wir haben also $a = e^{\vartheta i}$ zu setzen und den Ansatz:

$$\overline{T}(u) = e^{\vartheta i} \cdot \bar{u}$$

zu prüfen.

Für die erzeugenden Substitutionen der transformierten Gruppe:

$$\overline{T}S_1\overline{T}^{-1}(U) = U + \Omega_1, \qquad \overline{T}S_2\overline{T}^{-1}(U) = U + \Omega_2$$

berechnet man leicht die Beziehungen:

$$(12) \qquad \Omega_1 = e^{\vartheta i} \cdot \bar{\omega}_1, \qquad \Omega_2 = e^{\vartheta i} \cdot \bar{\omega}_2,$$

wo wieder $\bar{\omega}_k$ der zu ω_k konjugiert komplexe Wert sein soll. Diese Ω_1, Ω_2 müssen nun wieder ganzzahlige Kombinationen der ω_1, ω_2 sein und umgekehrt, wenn $\overline{T}\Gamma\overline{T}^{-1} = \Gamma$ zutreffen soll. Jetzt ist der Quotient $\Omega = \bar{\omega}$ und hat also *negativen* imaginären Bestandteil; es müssen sich demnach Ω_1 und $-\Omega_2$ durch eine „lineare Transformation" (vgl. Note 1, S. 184) aus den ω_1, ω_2 berechnen:

$$\Omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \quad -\Omega_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Hieraus folgt auf Grund von (12) für den Quotienten ω der Perioden ω_1, ω_2:

$$\gamma\omega\bar{\omega} + \alpha\omega + \delta\bar{\omega} + \beta = 0,$$

eine Relation, die sich, wenn wir $\omega = \xi + i\eta$ setzen, in die beiden Gleichungen spaltet:

$$\gamma(\xi^2 + \eta^2) + (\alpha + \delta)\xi + \beta = 0, \quad (\alpha - \delta)\eta = 0.$$

Da nun $\eta > 0$ ist, so folgt $\delta = \alpha$, und also liegt der Punkt ω auf dem durch die Gleichung:

$$(13) \qquad \gamma(\xi^2 + \eta^2) + 2\alpha\xi + \beta = 0, \quad (\alpha^2 - \beta\gamma = 1)$$

dargestellten Kreise.

Ist die ganze Zahl $\gamma = 0$, so folgt aus (13):

$$\alpha = \delta = \pm 1, \quad \xi = \mp \tfrac{1}{2}\beta = -\tfrac{1}{2}\alpha\beta.$$

Die für unser Doppeldreieck der Fig. 43 charakteristische Bedingung

$-1 \leq 2\xi < 1$ liefert also als einzige Möglichkeiten $\beta = 0$ und $\beta = \alpha = \pm 1$. Ist γ von 0 verschieden, so schreiben wir die erste Gleichung (13) so:

$$(14) \qquad \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2,$$

wodurch der Kreis mit dem Radius $|\gamma^{-1}|$ und den Mittelpunktskoordinaten $\xi = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\eta = 0$ dargestellt ist. Da der Punkt $\omega = \varrho$ mit der Ordinate $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ der an der reellen ω-Achse nächst gelegene endliche Punkt unseres Doppeldreiecks ist, so sind nur die ganzzahligen Werte $\gamma = \pm 1$ brauchbar. Unter allen Kreisen (14) erreichen dann aber nur der mit $\alpha = 0$ das Doppeldreieck (nämlich als Randkreis desselben) und der für $\alpha = \gamma = \pm 1$ (nämlich im einzelnen Punkte $\omega = \varrho$). *Soll demnach die Gruppe Γ durch eine Transformation $\overline{T}$ in sich überführbar sein, so muß der Quotient ω der reduzierten Perioden entweder auf der imaginären ω-Achse $\xi = 0$ oder auf dem Rande $2\xi + 1 = 0$ oder endlich auf dem Rande $\xi^2 + \eta^2 = 1$ des in Fig. 43, S. 179, schraffierten Dreiecks liegen, und wir haben für das Zahlenquadrupel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. die Kombinationen:*

$$(15) \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\pm 1, & \pm 1\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & \mp 1\\ \pm 1, & 0\end{pmatrix},$$

zu denen für $\omega = \varrho$ noch die Möglichkeit hinzukommt:

$$(16) \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ \pm 1, & \pm 1\end{pmatrix}.$$

Daß in allen Fällen $\Gamma^{(u)}$ tatsächlich durch $\overline{T}$ in sich transformiert wird, ist aus der *„Symmetrie" der betreffenden Periodenparallelogramme* einleuchtend. $\overline{T}$ bedeutet nichts anderes als die *„Spiegelung"* (vgl. S. 73) der u-Ebene in sich an der durch den Nullpunkt $u = 0$ laufenden Geraden der Amplitude $\frac{1}{2}\vartheta$ (und $\pi + \frac{1}{2}\vartheta$). Haben wir den ersten Fall (15) und damit ein Rechteck, so folgt aus den vorstehenden Formeln:

$$\overline{T}(u) = \pm \frac{\omega_1}{\overline{\omega}_1}\overline{u} = \mp \frac{\omega_2}{\overline{\omega}_2}\overline{u}.$$

Hier aber liegt für das obere Zeichen die Spiegelung an der Rechteckseite durch die Punkte 0 und ω_1 — wir wollen sie kurz die Gerade $(0, \omega_1)$ nennen — vor, für das untere Zeichen aber die Spiegelung an der Geraden $(0, \omega_2)$.

Im dritten Falle (15) ist $|\omega| = 1$, und das Parallelogramm ist ein Rhombus. Jetzt gilt:

$$\overline{T}(u) = \pm \frac{\omega_2}{\overline{\omega}_1}\overline{u} = \pm \frac{\omega_1}{\overline{\omega}_2}\overline{u},$$

und hier haben wir für das obere Zeichen die Spiegelung an der „Diagonale" $(0, \omega_1 + \omega_2)$, für das untere aber diejenige an der Diagonale

$(0, \omega_1 - \omega_2)$ des mit dem ersten benachbarten Rhombus der Ecken $0, \omega_1, \omega_1 - \omega_2, -\omega_2$.

Liegt der zweite Fall (15) vor, so tritt die Symmetrie am Parallelogramm der reduzierten Perioden nicht hervor, wohl aber am Parallelogramm der Ecken $0, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, \omega_1$, wie man sich mit Hilfe von Fig. 53 deutlich machen wolle. Es liegen wieder zwei durch den Nullpunkt $u = 0$ laufende Symmetrielinien vor, und unsere obigen Gleichungen geben als zugehörige Spiegelungen:

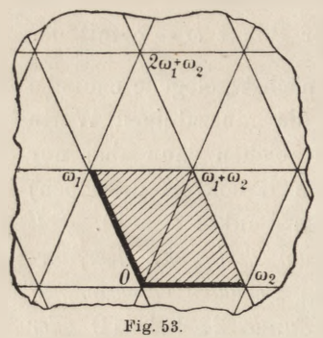


Fig. 53.

$$\overline{T}(u) = \mp \frac{\omega_2}{\overline{\omega}_2}\,\overline{u} = \pm \frac{\omega_1 + \omega_2}{\overline{\omega}_1}\,\overline{u}.$$

Im harmonischen Fall kommen für die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die erste und dritte Kombination (15) zugleich zur Geltung. Beim Quadratnetz laufen in der Tat *vier* Symmetrielinien durch den einzelnen Gitterpunkt. Für $\omega = \varrho$ kommen der zweite und dritte Fall (15) zugleich in Betracht, und der Ansatz (16) liefert noch als 5. und 6. Spiegelung:

$$\overline{T}(u) = \pm \frac{\omega_1}{\overline{\omega}_1}\,\overline{u} = \mp \frac{\omega_1 + \omega_2}{\overline{\omega}_2}\,\overline{u}.$$

Das gleichseitige Sechseck im Kreise (vgl. S. 239) hat in der Tat sechs durch seinen Mittelpunkt laufende Symmetrielinien. In allen Fällen ist durch die oben ausgesprochene Bedingung $0 \leqq \vartheta < \pi$ bzw. $0 \leqq \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ und $0 \leqq \vartheta < \frac{1}{3}\pi$ eine bestimmte unter den Spiegelungen ausgezeichnet.[1])

§ 5. Begriff der doppeltperiodischen Funktionen und Residuensätze.

Es sei jetzt irgendeine besondere Gruppe $\Gamma^{(u)}$ vorgelegt und für dieselbe ein primitives Periodenpaar ω_1, ω_2 ausgewählt; das zugehörige Parallelogramm der Ecken $0, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1$ oder allgemeiner mit den Ecken $u_0, u_0 + \omega_2, u_0 + \omega_1 + \omega_2, u_0 + \omega_1$ benutzen wir als Diskontinuitätsbereich der $\Gamma^{(u)}$. Wir stellen nun folgende endgültige Erklärung der doppeltperiodischen Funktionen auf: *Eine zur Gruppe $\Gamma^{(u)}$ gehörende eindeutige doppeltperiodische Funktion soll eine analytische Funktion $\psi(u)$ sein, welche die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte $u = \infty$ (dem*

1) Fügt man der Gruppe Γ die einzelne der gewonnenen Spiegelungen $\overline{T}$ hinzu, so entsteht eine erweiterte Gruppe $\Gamma_{(2)}$, welche neben den Substitutionen $1, S_1, S_2, S_3, \ldots$ der Γ noch die Substitutionen zweiter Art $\overline{T}, S_1\overline{T}, S_2\overline{T}, S_3\overline{T}, \ldots$ enthält. Alle existierenden Erweiterungen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ sind aufgestellt und figürlich erläutert in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von Klein und Fricke (Leipzig 1897). Bd. 1, S. 224 ff.

Grenzpunkte der $\Gamma^{(u)}$*), zum Felde hat und bei Ausübung irgendeiner Substitution von* $\Gamma^{(u)}$ *ihren Wert behält:*

$$(1) \qquad \psi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \psi(u).$$

In Punkten, die bezüglich Γ äquivalent sind, liegen demnach stets gleiche Funktionswerte vor, so daß alle Werte, die von $\psi(u)$ überhaupt angenommen werden, bereits im Periodenparallelogramm erreicht werden. Der Punkt $u = \infty$ muß notwendig ein wesentlich singulärer Punkt von $\psi(u)$ sein (was ja auch schon in die Definition der Funktion aufgenommen wurde); denn in *jeder* Umgebung der Stelle ∞ liegen unendlich viele Parallelogramme des Netzes und sind also unendlich viele verschiedene Punkte nachweisbar, in denen die Funktion einen und denselben Wert annimmt. Im Endlichen soll aber erklärungsgemäß kein weiterer wesentlich singulärer Punkt von $\psi(u)$ auftreten. Wenden wir diese Aussage insbesondere auf das Periodenparallelogramm an, so ergibt sich in bekannter Weise: *Die Funktion* $\psi(u)$ *kann im Periodenparallelogramm nur endlich viele Pole haben, sowie überhaupt einen vorgeschriebenen komplexen Wert daselbst nur in endlich vielen Punkten annehmen.*

Wir wenden nun zunächst die Residuensätze von S. 37ff. an, indem wir annehmen, daß wir auf irgendeinem Wege eine zur $\Gamma^{(u)}$ gehörende doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ wirklich gewonnen haben. Nach der Erklärung von S. 37 ist das „Residuum“ der Funktion $\psi(u)$ für einen etwa bei $u = w$ gelegenen Pol der Koeffizient c_{-1} des Gliedes mit der Potenz $(u - w)^{-1}$ in der zugehörigen Potenzreihenentwicklung:

$$\psi(u) = \frac{c_{-m}}{(u-w)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(u-w)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{u-w} + c_0 + c_1(u-w) + \cdots.$$

In einem mit w äquivalenten Punkte w' wird eine Entwicklung nach Potenzen von $(u - w')$ mit den gleichen Koeffizienten gelten, so daß zu äquivalenten Polen gleiche Residuen der Funktion $\psi(u)$ gehören.

Wir haben uns oben durch die Unbestimmtheit der ersten Ecke u_0 des Parallelogramms eine gewisse Freiheit in der Lagerung des Parallelogramms vorbehalten. Da $\psi(u)$ nur endlich viele Nullpunkte und Pole im Parallelogramm haben kann und andererseits unbegrenzt viele inäquivalente Ecken u_0 zur Verfügung stehen, so dürfen wir u_0 so gewählt denken, daß auf dem Rande des Parallelogramms der Ecken u_0, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1$ sich weder ein Nullpunkt noch ein Pol von $\psi(u)$ findet. Übrigens wollen wir mit C den aus den vier Seiten sich zusammensetzenden Rand des Parallelogramms bezeichnen und haben dabei, wenn wir einen Umlauf um das Parallelogramm im positiven Sinne ausführen wollen, C in der Richtung zu beschreiben, daß

die Eckenfolge u_0, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1$ vorliegt. Bei den nachfolgenden über den geschlossenen Rand C auszudehnenden Integralen soll diese Integrationsrichtung stets innegehalten werden.

Nach dem Residuensatze (3) S. 38 ist das über C genommene Integral:

$$(2)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(C)} \psi(u)\,du$$

gleich der Summe der Residuen von $\psi(u)$ für alle im Parallelogramm gelegenen Pole. Nun können wir aber den vier Seiten des Parallelogramms entsprechend jedes über C erstreckte Integral so zerlegen:

$$\int\limits_{(C)} = \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} + \int\limits_{u_0+\omega_2}^{u_0+\omega_2+\omega_1} + \int\limits_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_1} + \int\limits_{u_0+\omega_1}^{u_0},$$

so daß die Umkehrung der Integrationsrichtung bei zweien von diesen Integralen auch folgende Zerlegung als möglich ergibt[1]):

$$\int\limits_{(C)} = \Bigg(\int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} - \int\limits_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2}\Bigg) - \Bigg(\int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} - \int\limits_{u_0+\omega_2}^{u_0+\omega_2+\omega_1}\Bigg).$$

Hier sind die Teilintegrale, welche sich auf je zwei Gegenseiten des Parallelogramms beziehen, in eine Klammer zusammengefaßt. Ist nun zunächst $f(u)$ irgendeine längs C eindeutige analytische Funktion, so ist

$$\int\limits_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2} f(u)\,du = \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} f(u+\omega_1)\,du,$$

und ebenso gilt:

$$\int\limits_{u_0+\omega_2}^{u_0+\omega_2+\omega_1} f(u)\,du = \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} f(u+\omega_2)\,du.$$

Das über C genommene Integral läßt sich somit in die Gestalt:

$$\int\limits_{(C)} f(u)\,du = \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} (f(u+\omega_2) - f(u))\,du - \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} (f(u+\omega_1) - f(u))\,du$$

setzen. Ist demnach $f(u)$ irgendeine unserer doppeltperiodischen Funktionen $\psi(u)$, so verschwindet das Integral (2): *Für jede bei unserer Gruppe $\Gamma^{(u)}$ etwa existierende doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ verschwindet die Summe der Residuen aller im Periodenparallelogramm gelegenen Pole.*

Aus der Begriffserklärung von $\psi(u)$ folgt, daß mit dieser Funktion auch deren Ableitung $\psi'(u)$ eine zur Gruppe $\Gamma^{(u)}$ gehörende doppeltperiodische Funktion ist. Dasselbe gilt demnach auch vom Quotienten:

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{d\log\psi(u)}{du},$$

---

1) S. die entsprechenden Zerlegungen auf der Riemannschen Fläche F_2 oben S. 159.

so daß unser Integral über C auch für diese Funktion verschwindet. Daraufhin liefert der zweite Residuensatz (5) S. 39 sofort: *Für jede zur $\Gamma^{(u)}$ gehörende doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ ist die Summe der Ordnungen aller im Parallelogramm gelegenen Nullpunkte gleich der Summe der Ordnungen aller daselbst gelegenen Pole.*

Wir bezeichnen den gemeinsamen endlichen ganzzahligen Wert dieser Summe mit m und nennen m die *„Wertigkeit“* der Funktion $\psi(u)$. In gewohnter Schlußweise ziehen wir die Folgerung, *daß, wenn ψ_0 irgendein endlicher komplexer Wert ist, die doppeltperiodische Funktion $(\psi(u) - \psi_0)$ als Summe der Ordnungen ihrer im Periodenparallelogramm gelegenen Nullpunkte auch wieder m liefert.* Da solche Nullpunkte auch auf dem Rande C liegen können, so ist an der Bestimmung festzuhalten, daß nur die beiden von u_0 auslaufenden Seiten des Parallelogramms (unter Ausschluß der Endpunkte $u_0 + \omega_1$, $u_0 + \omega_2$) diesem Bereiche als zugehörig gelten.

Man kann das gewonnene Ergebnis auch in die Form kleiden: *Eine m-wertige doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ nimmt einen beliebig vorgeschriebenen Wert ψ_0 (auch die Werte 0 und ∞ eingeschlossen) stets in m Punkten des Parallelogramms wirklich an, wobei unter diesen m Punkten beim einzelnen ψ_0 natürlich irgendwelche Koinzidenzen stattfinden können.* Dabei gilt für solche Koinzidenzen die früher schon öfters aus den Reihenentwicklungen entnommene Betrachtung: *Für einen endlichen Wert ψ_0 wird eine Koinzidenz von ν zugehörigen Punkten an der Stelle $u = v$ stets und nur dann eintreten, wenn an dieser Stelle die Funktion $\psi'(u)$ einen Nullpunkt $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt; für den Wert $\psi_0 = \infty$ sind die Koinzidenzen unmittelbar aus den Ordnungen der Pole von $\psi(u)$ ersichtlich.*

Die gewonnenen Ergebnisse gestatten uns, ein Resultat von grundsätzlicher Bedeutung abzuleiten. Wir setzen die Funktionswerte $\psi(u) = z$ und wollen das Parallelogramm konform auf die z-Ebene abbilden. Das Abbild wird jede Stelle der z-Ebene bis auf gewisse Verzweigungspunkte m-blättrig überdecken. Jeder $(\nu - 1)$-fache Nullpunkt v der Funktion $\psi'(u)$ liefert für den endlichen Wert $z = \psi(v)$ einen ν-blättrigen Verzweigungspunkt; die Pole von $\psi(u)$ im Parallelogramm — es seien n unterschiedene, und ihre Ordnungen seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — liefern n bei $z = \infty$ übereinanderliegende Verzweigungspunkte bzw. mit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ Blättern. Weitere Verzweigungspunkte treten nicht auf. Nach der Regel (4) S. 88 berechnet sich das Geschlecht p dieser Fläche F_m zu:

$$p = -m + 1 + \sum \frac{\nu - 1}{2} + \sum \frac{\mu - 1}{2},$$

wo sich die erste Summe auf die im Endlichen, die zweite auf die bei

$z = \infty$ gelegenen Verzweigungspunkte bezieht. Die Pole von $\psi'(u)$ fallen mit denen von $\psi(u)$ zusammen; die Ordnung ist je um eine Einheit größer, also $(\mu + 1)$. Die Wertigkeit von $\psi'(u)$ ist demnach:

$$\sum(\mu + 1) = n + \sum \mu = m + n,$$

woraus sich ergibt:

$$\sum \frac{\mu - 1}{2} = \frac{m - n}{2}.$$

Nun ist die Wertigkeit $(m + n)$ von $\psi'(u)$ auch gleich der Summe aller Ordnungen $(\nu - 1)$ der Nullpunkte dieser Funktion, woraus sich:

$$\sum \frac{\nu - 1}{2} = \frac{m + n}{2}$$

ergibt. Somit ist $p = 1$: *Durch eine m-wertige doppeltperiodische Funktion $z = \psi(u)$ wird das Periodenparallelogramm konform auf eine geschlossene m-blättrige Riemannsche Fläche F_m über der z-Ebene abgebildet, deren Geschlecht $p = 1$ ist.*

Daß hierbei eine Fläche „des Geschlechtes 1", d. h. eine solche vom Zusammenhange des Kreisringes (vgl. S. 84 ff.), herauskommen muß, ist anschaulich unmittelbar einleuchtend. Das einzelne Paar der Gegenseiten des Parallelogramms fügt sich in der Abbildung zusammen und liefert einen Rückkehrschnitt Q auf der F_m. Die beiden so zu gewinnenden Schnitte Q_1, Q_2 zerlegen dann die F_m in einen auf das Parallelogramm eindeutig bezogenen Bereich, der, wie das Parallelogramm, einfachen Zusammenhang besitzt.

Jede weitere doppeltperiodische Funktion der $\Gamma^{(u)}$ liefert nun, auf die F_m übertragen, daselbst eine algebraische Funktion[1]), und umgekehrt liefert uns jede algebraische Funktion der F_m für die $\Gamma^{(u)}$ eine doppeltperiodische Funktion. Der Anschluß an die auf algebraischer Basis entwickelte Theorie der elliptischen Funktionen des vorangehenden Kapitels ist damit erreicht: *Entweder gibt es überhaupt keine doppeltperiodische Funktion der vorgelegten $\Gamma^{(u)}$, oder wir haben hier mit einem der im vorigen Kapitel gewonnenen Periodenparallelogramme zu tun; und dann haben sofort die gesamten damaligen Entwicklungen über den zugehörigen Körper elliptischer Funktionen Gültigkeit.*

Man kann nun den Existenzbeweis von Funktionen $\psi(u)$ bei beliebig gegebener Gruppe $\Gamma^{(u)}$ mittelst direkter funktionentheoretischer Erwägungen führen, wie sie bei den Existenztheoremen der algebraischen und der automorphen Funktionen Verwendung finden.[2]) Es emp-

1) S. die allgemeine Erklärung einer algebraischen Funktion S. 77 unten.

2) Man sehe hierüber z. B. Weyl „Die Idee der Riemannschen Fläche", (Leipzig, 1913) Kap. 2 und die „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von Klein und Fricke, Bd. 2 S. 8 ff. sowie etwa auch „Modulfunktionen", Bd. 1 S. 508 ff.

fiehlt sich indessen hier einen anderen Weg zu gehen, den wir ohnedies zu betreten haben. Wir werden den Existenzbeweis der zu einer beliebig gewählten $\Gamma^{(u)}$ gehörenden Funktionen $\psi(u)$ dadurch führen, daß wir diese Funktionen unmittelbar durch konvergente Produkte und Reihen zur Darstellung bringen. Eine hierbei grundlegende Konvergenzbetrachtung stellen wir in § 6 voran.[1])

§ 6. Über die Konvergenz gewisser Doppelreihen.

Für eine beliebig vorgelegte Gruppe $\Gamma^{(u)}$ wollen wir unter ω_1, ω_2 zunächst der Bequemlichkeit halber das reduzierte Periodenpaar verstehen. Wir zeichnen das zugehörige Parallelogrammnetz und wollen für die Gitterpunkte desselben die abgekürzte Bezeichnung:

(1) $$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = (m_1, m_2)$$

einführen. Der Abstand des einzelnen Gitterpunktes vom Nullpunkt ist der absolute Betrag $|(m_1, m_2)|$. Indem wir den Gitterpunkt $u = 0$, und damit die Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ ausschließen, bilden wir mit einer positiven ganzen Zahl k die auf alle übrigen Gitterpunkte bezogene Summe:

(2) $$\sum_{m_1, m_2}{}' |(m_1, m_2)|^{-k},$$

wobei durch den oberen Index am Summenzeichen hier und weiterhin, falls nichts anderes bestimmt ist, die Auslassung der genannten Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ angedeutet sein mag. Wir stellen die Frage, ob man die ganze positive Zahl k so wählen kann, daß die Doppelreihe (2) konvergiert.

Da die Reihe (2) nur reelle positive Glieder enthält, so wird sie im Falle der Konvergenz auch „unbedingt", d. i. unabhängig von der Anordnung der Glieder, gegen einen bestimmten endlichen Summenwert konvergieren. Wir dürfen daraufhin bei der Konvergenzuntersuchung eine besondere gleich näher anzugebende Gliederanordnung bevor-

1) Die Begriffsbestimmung der doppeltperiodischen Funktionen im Anschluß an das Periodenparallelogramm und die auf Cauchyschen Hilfsmitteln beruhende Aufstellung der Residuensätze ist zum ersten Male im Zusammenhange von J. Liouville in einer 1847 gehaltenen Vorlesung gegeben; dieselbe ist von C. W. Borchardt ausgearbeitet und unter dem Titel „Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville" im Journ. f. Math., Bd. 88 (1879), S. 277 veröffentlicht. Es spielt hier insbesondere der Satz, daß es keine *ein*wertige Funktion $\psi(u)$ geben kann, eine grundlegende Rolle. Dieser Satz ist durch die im Texte aufgestellte Beziehung auf eine Fläche des Geschlechtes 1 selbstverständlich; doch kann er auch sehr leicht aus dem ersten Residuensatze (Verschwinden der Summe der Residuen aller Pole) geschlossen werden.

zugen, die durch Fig. 54 begründet wird. Hier sind die sämtlichen von $u = 0$ verschiedenen Gitterpunkte auf den Rändern einer einfach unendlichen Reihe konzentrischer und ähnlicher Parallelogramme untergebracht, die in der Figur punktiert sind. Das n^{te} Parallelogramm trägt diejenigen $4n$ Gitterpunkte, deren Zahlenpaare m_1, m_2 die Bedingung befriedigen:

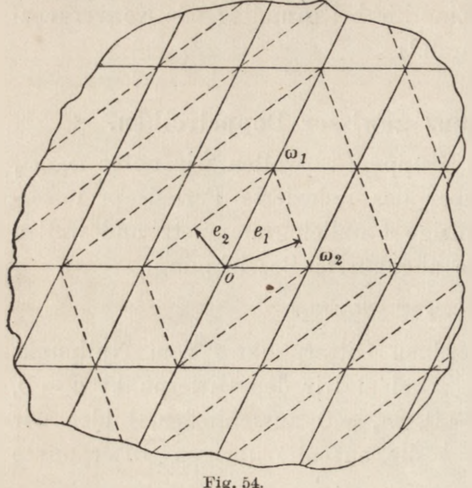


Fig. 54.

$$|m_1| + |m_2| = n.$$

Sind e_1 und e_2 die Längen der Lote vom Nullpunkte auf die Seiten des ersten dieser Parallelogramme, und ist e eine dieser beiden Zahlen, die nicht größer ist als die andere; so gilt (vgl. Fig. 54) für die $4n$ Gitterpunkte auf dem Rande des n^{ten} Parallelogramms:

$$\frac{1}{|(m_1, m_2)|} < \frac{1}{ne}.$$

Verstehen wir demnach unter Σ_n die Summe der $4n$ Glieder von (2), welche zum n^{ten} Parallelogramm gehören, so gilt:

$$\sum_n < \frac{4}{e^k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

Wenn wir also jetzt für die Reihe (2) die Anordnung:

$$\sum_{m_1, m_2}' = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \cdots$$

bevorzugen, so ist klar, daß unsere Reihe jedenfalls dann konvergiert, wenn die Reihe

$$1 + (\tfrac{1}{2})^{k-1} + (\tfrac{1}{3})^{k-1} + (\tfrac{1}{4})^{k-1} + \cdots$$

konvergent ist. Diese Reihe ist zwar für $k = 2$ noch divergent, aber für alle ganzen Zahlen $k > 2$ ist sie konvergent und gibt z. B. für $k = 3$ den bekannten Summenwert:

$$1 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{5})^2 + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wir haben demnach als Resultat anzumerken: *Die Doppelreihe* (2) *ist für alle ganzen Zahlen* $k > 2$ *konvergent.*

Hiernach wird auch die Reihe:

$$(3) \qquad \sum_{m_1, m_2}' (m_1, m_2)^{-k}$$

für alle ganzen Zahlen $k > 2$ absolut und also unbedingt konvergent sein. Da übrigens mit jedem Zahlenpaar m_1, m_2 auch das Paar $-m_1$,

$-m_2$ auftritt, so ist der Summenwert für alle ungeraden Zahlen $k = 3, 5, \ldots$ gleich 0. Wir lassen demnach weiter nur die geraden Exponenten zu und wollen für die betreffenden Reihen die Bezeichnungen einführen:

$$(4) \qquad G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^{2k}.$$

Für jede ganze Zahl $k \geqq 2$ ist hierdurch ein bei unserer Gruppe $\Gamma^{(u)}$ eindeutig bestimmter endlicher Summenwert $G_k(\omega_1, \omega_2)$ der rechts stehenden konvergenten Reihe erklärt, dessen Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 uns noch mehrfach beschäftigen wird.

Eine erste grundlegende Eigenschaft der Werte $G_k(\omega_1, \omega_2)$ folgt aus der *unbedingten* Konvergenz unserer Doppelreihen. Führen wir an Stelle der bisherigen reduzierten Perioden ω_1, ω_2 mittelst „linearer Transformation" (vgl. S. 184) irgendein zur Gruppe $\Gamma^{(u)}$ gehörendes primitives Periodenpaar:

$$(5) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ein, so sind bekanntlich die Werte $(m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2')$ in ihrer Gesamtheit den Werten $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ gleich, und es entspricht die Kombination $m_1' = 0$, $m_2' = 0$ insbesondere der Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$. Bilden wir demnach die Reihe (4) für ω_1', ω_2' an Stelle der ω_1, ω_2, so wird dieser Ersatz einfach auf eine Umordnung der Reihenglieder hinauslaufen. Der Summenwert ist aber von der Gliederanordnung unabhängig, und also folgt das grundlegende Ergebnis: *Der Summenwert $G_k(\omega_1, \omega_2)$ erweist sich als der gleiche für je zwei primitive Periodenpaare unserer $\Gamma^{(u)}$, er ist gegenüber irgendeiner linearen Transformation* (5) *der Perioden invariant:*

$$(6) \qquad G_k(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2; \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = G_k(\omega_1, \omega_2).$$

§ 7. Existenzbeweis der doppeltperiodischen Funktionen.

Für den einzelnen Körper elliptischer Funktionen konstruierten wir oben (S. 208) eine ganze transzendente Funktion $\sigma(u)$, die in jedem Gitterpunkte einen Nullpunkt erster Ordnung hatte, in jedem anderen endlichen Punkte u aber von 0 verschieden war. Auf Grund der Entwicklungen von S. 56ff. über die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen können wir auf independentem Wege für unsere hier vorgelegte $\Gamma^{(u)}$ mittelst eines unendlichen Produktes eine entsprechende ganze transzendente Funktion herstellen, die wir unter Vorbehalt näherer Vergleichung mit der früheren Funktion $\sigma(u)$ gleich selbst wieder durch das Symbol $\sigma(u)$ bezeichnen. Es ist nämlich die

damalige Reihe (6) S. 59 für das aufzustellende Produkt mit Nullpunkten in den Gitterpunkten einfach unsere jetzige Reihe:

$$\sum_{m_1, m_2}{}' |(m_1, m_2)|^{-(h+1)},$$

deren Konvergenz für $h = 2$ bewiesen ist. *Somit haben wir* (vgl. S. 59) *in:*

$$(1)\qquad \sigma(u) = u \prod_{m_1, m_2}{}' \left(1 - \frac{u}{(m_1, m_2)}\right) e^{\frac{u}{(m_1, m_2)} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{(m_1, m_2)}\right)^2},$$

wo beim Produkte die einzige Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ *auszulassen ist (Index am Produktzeichen!), eine ganze transzendente Funktion der „Höhe" 2 von der gewünschten Beschaffenheit, d. h. von der richtigen Lage und Ordnung der Nullpunkte.*

Ob wir hierin die σ-Funktion, welche uns von S. 208 her bei den Körpern elliptischer Funktionen bekannt ist, wieder gefunden haben, wird bald näher zu untersuchen sein. Vorher wollen wir gleich noch aus der von S. 59 her feststehenden *unbedingten* Konvergenz des Produktes (1) denselben Schluß ziehen, wie im vorigen Paragraphen bei den Summenwerten $G_k(\omega_1, \omega_2)$. Bezeichnen wir die in (1) erklärte Funktion in ihrer Abhängigkeit von u, ω_1 und ω_2 genauer durch $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$, so wird stets derselbe Produktwert erscheinen, wenn wir unter Festhaltung von u die Perioden ω_1, ω_2 durch ein anderes primitives Periodenpaar ersetzen: *Die in* (1) *erklärte ganze transzendente Funktion* $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$ *erweist sich als invariant gegenüber irgendeiner linearen Transformation der Perioden:*

$$(2)\qquad \sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Um genauere Angaben über unsere Funktion $\sigma(u)$ zu machen, gehen wir auf die Sätze von Seite 60 (am Schlusse des damaligen § 12) ein und bilden die Ableitungen von $\log \sigma(u)$:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d \log \sigma(u)}{du} = \dfrac{1}{u} + \sum\limits_{m_1, m_2}{}' \left(\dfrac{1}{u - (m_1, m_2)} + \dfrac{1}{(m_1, m_2)} + \dfrac{u}{(m_1, m_2)^2}\right), \\ -\dfrac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = \dfrac{1}{u^2} + \sum\limits_{m_1, m_2}{}' \left(\left(\dfrac{1}{u - (m_1, m_2)}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{(m_1, m_2)}\right)^2\right), \\ \dfrac{d^3 \log \sigma(u)}{du^3} = 2 \sum\limits_{m_1, m_2} \left(\dfrac{1}{u - (m_1, m_2)}\right)^3, \end{cases}$$

sowie allgemein für $\nu \geqq 3$:

$$(4)\qquad (-1)^{\nu - 1} \frac{d^\nu \log \sigma(u)}{du^\nu} = (\nu - 1)! \sum_{m_1, m_2} \left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)}\right)^\nu,$$

wo für $\nu \geqq 3$ die Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ bei der Summe nicht

mehr auszulassen ist. Wir haben hier eine Reihe von Funktionen, die die schlichte u-Ebene, abgesehen vom Punkte ∞, zum Felde haben; dabei hat die ν^{te} Funktion in jedem Gitterpunkte einen Pol ν^{ter} Ordnung und ist in jedem anderen endlichen Punkte u analytisch. Die einzelne der rechts stehenden Reihen ist in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergent, wobei jedoch in jedem Gitterpunkte ein einzelnes Reihenglied den daselbst gelegenen Pol der dargestellten Funktion liefert.

Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß wir hier für $\nu \geqq 3$ lauter doppeltperiodische Funktionen unserer $\Gamma^{(u)}$ vor uns haben. Es bewirkt ja z. B. die Vermehrung von u um ω_2 nur eine Gliederumordnung in der einzelnen unbedingt konvergenten Reihe. Nicht ganz so unmittelbar ist dasselbe an der zweiten Reihe (3) einzusehen. Greifen wir hier für irgendeine endliche positive ganze Zahl n und für stehendes m_1 den Bestandteil:

$$\sum_{m_2=-n}^{+n}{}' \left(\left(\frac{1}{u-(m_1, m_2)} \right)^2 - \left(\frac{1}{(m_1, m_2)} \right)^2 \right) = \Phi_n(u)$$

heraus[1]), so gilt für die durch diesen Bestandteil der zweiten Reihe (3) erklärte rationale Funktion $\Phi_n(u)$ von u:

$$\Phi_n(u+\omega_2) - \Phi_n(u) = \left(\frac{1}{u-(m_1, -n-1)} \right)^2 - \left(\frac{1}{u-(m_1, n)} \right)^2.$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung für $\lim n = \infty$ die Grenze 0 hat und $\lim \Phi_n(u)$ als Bestandteil einer absolut konvergenten Reihe eine bestimmte Funktion $\Phi(u)$ darstellt, so gilt für diese Funktion $\Phi(u+\omega_2) = \Phi(u)$. Die zweite Reihe (3) setzt sich aber aus lauter solchen Bestandteilen zusammen und hat also auch die Periode ω_2. *Der Existenzbeweis der doppeltperiodischen Funktionen für unsere beliebig vorgelegte Gruppe $\Gamma^{(u)}$ ist damit erbracht.* Insbesondere haben wir für jede ganze Zahl $\nu \geqq 2$ eine ν-wertige Funktion $\psi(u)$ mit einem Pole ν^{ter} Ordnung in jedem Gitterpunkte konstruiert, und speziell die erste unter ihnen wird unser Parallelogramm auf eine zweiblättrige Fläche F_2 des Geschlechtes 1 und also mit 4 Verzweigungspunkten abbilden. Wir sind demnach nunmehr berechtigt von einem *„Körper doppeltperiodischer Funktionen“* für *jede* unserer Gruppen $\Gamma^{(u)}$ zu sprechen und dürfen für diesen Funktionenkörper alle Entwicklungen des vorigen Kapitels als gültig in Anspruch zu nehmen.

---

1) Hier soll der Index am Summenzeichen bedeuten, daß bei $m_1 = 0$ im Gliede mit $m_2 = 0$ der Subtrahend der Klammer auszulassen ist.

§ 8. Teilbruchreihen für die Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$ nebst Folgerungen.

Wir betrachten nun zunächst die zweiwertige Funktion:

$$\psi(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1, m_2}' \left(\left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)} \right)^2 - \left(\frac{1}{(m_1, m_2)} \right)^2 \right)$$

unserer Gruppe $\Gamma^{(u)}$ näher. Da mit jedem Zahlenpaare m_1, m_2 auch $-m_1$, $-m_2$ in der Reihe vorkommt, so ist aus der Bauart der Reihe ersichtlich, daß $\psi(u)$ eine gerade Funktion ist.

Die Funktion:

$$\varphi(u) = \psi(u) - \frac{1}{u^2}$$

ist in der Umgebung von $u = 0$ analytisch und hat, wie wieder die Reihe zeigt, im Punkte $u = 0$ den Wert 0. Sie gestattet demnach in dieser Umgebung die Entwicklung:

$$\psi(u) - \frac{1}{u^2} = \varphi(u) = \varphi''(0) \cdot \frac{u^2}{2!} + \varphi^{(4)}(0) \cdot \frac{u^4}{4!} + \cdots$$

Nun gilt aber:

$$\varphi^{(2k)}(u) = (2k+1)! \sum_{m_1, m_2}' \left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)} \right)^{2k+2}.$$

Setzen wir hier $u = 0$, so ergibt sich rechter Hand, abgesehen von dem numerischen Faktor $(2k + 1)!$, die in (4) S. 257 eingeführte Summe des Wertes $G_{k+1}(\omega_1, \omega_2)$. Die Reihenentwicklung der Funktion $\psi(u)$ für die Umgebung des Punktes $u = 0$ hat demnach die Gestalt:

$$(1) \qquad \psi(u) = \frac{1}{u^2} + 3G_2u^2 + 5G_3u^4 + 7G_4u^6 + 9G_5u^8 + \cdots$$

Man wird bereits erkannt haben, daß wir hier die Funktion $\wp(u)$ des zur Gruppe $\Gamma^{(u)}$ gehörenden Körpers doppeltperiodischer Funktionen vor uns haben; denn $(\psi(u) - \wp(u))$ ist als polfreie doppeltperiodische Funktion mit einer Konstanten identisch, und der Wert dieser Konstanten ist 0, da zufolge der Reihenentwicklungen von $\psi(u)$ und $\wp(u)$ (vgl. (1) S. 200) die Differenz $(\psi(u) - \wp(u))$ für $u = 0$ den Wert 0 hat. Umgekehrt ziehen wir aus der Identität $\wp(u) = \psi(u)$ jetzt sofort das Ergebnis: *Die Funktionen erster Stufe $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ lassen sich in die folgenden als „Teilbruchreihen" zu bezeichnenden Reihen entwickeln:*

$$(2) \qquad \begin{cases} \wp(u) = \dfrac{1}{u^2} + \displaystyle\sum_{m_1, m_2}' \left(\left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)} \right)^2 - \left(\frac{1}{(m_1, m_2)} \right)^2 \right), \\ \wp'(u) = -2 \displaystyle\sum_{m_1, m_2} \left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)} \right)^3, \end{cases}$$

die abgesehen davon, daß in jedem Gitterpunkte je ein Glied einen Pol besitzt, in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergieren.

Weiter kann hiernach die in der ersten Gleichung (3) S. 258 gelieferte Funktion vom Integral zweiter Gattung $\zeta(u)$ nur um eine additive Konstante abweichen. Da aber infolge jener Gleichung:

$$\lim_{u=0}\left(\frac{d\log\sigma(u)}{du}-\frac{1}{u}\right)=0$$

gilt, so zeigt der Vergleich mit der Potenzreihe (2) S. 201 von $\zeta(u)$, daß wir in der ersten Gleichung (3) S. 258 unmittelbar $\zeta(u)$ vor uns haben: *Das Integral zweiter Gattung erster Stufe $\zeta(u)$ läßt sich in die Teilbruchreihe entwickeln:*

$$(3)\qquad \zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{m_1,m_2}{}'\left(\frac{1}{u-(m_1,m_2)}+\frac{1}{(m_1,m_2)}+\frac{u}{(m_1,m_2)^2}\right),$$

von deren Konvergenz dasselbe gilt wie von derjenigen der Reihen (2).

Kehren wir endlich mittelst des Integrales:

$$e^{\int\zeta(u)\,du}=\sigma(u)$$

zum Ausgangspunkte (1) S. 258 unserer gegenwärtigen Entwicklung zurück, so ist klar, daß diese Funktion von der S. 208 eingeführten Funktion $\sigma(u)$ nur um einen konstanten Faktor abweichen kann. Aber auch die Funktion (1) S. 258 befriedigt wie die in (5) S. 208 dargestellte Funktion $\sigma(u)$ die Bedingung:

$$\lim_{u=0}\frac{\sigma(u)}{u}=1.$$

Also haben wir in (1) *S. 258 unmittelbar unsere frühere σ-Funktion in Gestalt eines doppelt unendlichen Produktes wiedergewonnen.*

Soll die Abhängigkeit der Funktionen $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ auch von ω_1, ω_2, wie sie in den Teilbruchreihen zum Ausdruck kommt, hervorgehoben werden, so schreiben wir $\zeta(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$, $\wp(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$, $\wp'(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$. Aus der „unbedingten" Konvergenz der Teilbruchreihen folgt alsdann, wie bei der Funktion $\sigma(u)$: *Das Integral zweiter Gattung erster Stufe ζ und die doppeltperiodischen Funktionen erster Stufe $\wp$ und $\wp'$ bleiben unverändert, falls man in ihnen ω_1, ω_2 irgendeiner linearen Transformation unterwirft:*

$$(4)\qquad \begin{cases}\zeta(u\,|\,\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2)=\zeta(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\\ \wp(u\,|\,\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2)=\wp(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\\ \wp'(u\,|\,\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\ \gamma\omega_1+\delta\omega_2)=\wp'(u\,|\,\omega_1,\omega_2).\end{cases}$$

Vergleichen wir die Reihe (1) mit der ursprünglichen Potenzreihe (1) S. 200 der $\wp$-Funktion, so zeigt sich, daß die Summenwerte $G_2(\omega_1,\omega_2)$,

$G_3(\omega_1, \omega_2)$ unserer Doppelreihen (4) S. 257 zu den rationalen Invarianten g_2 und g_3 der biquadratischen binären Form in der Beziehung stehen:

$$\frac{1}{2^2 \cdot 5} g_2 = 3 G_2, \qquad \frac{1}{2^2 \cdot 7} g_3 = 5 G_3.$$

Wir erkennen: *Die Werte der rationalen Invarianten g_2, g_3 hängen eindeutig vom Periodenpaare ω_1, ω_2 ab:*

$$(5) \quad g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^4, \quad g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^6$$

und erweisen sich zufolge der unbedingten Konvergenz der hier rechts stehenden Reihen gleichfalls als invariant gegenüber einer beliebigen linearen Transformation der Perioden:

$$(6) \quad \begin{cases} g_2(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = g_2(\omega_1, \omega_2), \\ g_3(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = g_3(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Die absolut konvergente Reihe (3) muß bei Vermehrung von u um Perioden ω_1, ω_2 die Eigenschaften des Integrales zweiter Gattung:

$$\zeta(u + \omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \qquad \zeta(u + \omega_2) = \zeta(u) + \eta_2$$

besitzen. Greifen wir aus dieser Reihe die endlich vielen Glieder:

$$\sum_{m_1=-k}^{+k} \left(\sum_{m_2=-l}^{+l}{}' \left(\frac{1}{u - (m_1, m_2)} + \frac{1}{(m_1, m_2)} + \frac{u}{(m_1, m_2)^2} \right) \right) = \Phi_{k,l}(u)$$

heraus, wo der Index am zweiten Summenzeichen hier zu bedeuten hat, daß für $m_1 = 0$ in dem zu $m_2 = 0$ gehörenden Reihengliede der zweite und dritte Summand auszulassen ist, so ist hierdurch für jedes Paar endlicher positiver ganzer Zahlen k, l eine rationale Funktion $\Phi_{k,l}(u)$ gegeben. Für $\lim l = \infty$ erhalten wir in $\Phi_{k,\infty}(u)$ einen Bestandteil der absolut konvergenten Reihe (3) und damit für jedes k eine bestimmte Funktion. Diese Funktionen $\Phi_{k,\infty}(u)$ nähern sich für $\lim k = \infty$ der Funktion $\zeta(u)$ als Grenze an. Aus der Erklärung von $\Phi_{k,l}(u)$ folgt:

$$\Phi_{k,l}(u + \omega_2) - \Phi_{k,l}(u) = \sum_{m_1=-k}^{+k} \left(\frac{1}{u - (m_1, -l-1)} - \frac{1}{u - (m_1, l)} + \sum_{m_2=-l}^{+l}{}' \frac{\omega_2}{(m_1, m_2)^2} \right),$$

wo rechter Hand in einer endlichen Anzahl von $(4k + 2)$ Gliedern u auftritt. Für $\lim l = \infty$ wird die Summe dieser endlich vielen Glieder gleich 0, und man gewinnt als eine Eigenschaft der Funktion $\Phi_{k,\infty}(u)$:

$$\Phi_{k,\infty}(u + \omega_2) - \Phi_{k,\infty}(u) = \sum_{m_1=-k}^{+k} \left(\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\omega_2}{(m_1, m_2)^2} \right).$$

Die Konvergenz der rechts stehenden Reihe ist durch diese Gleichung mit Rücksicht auf die absolute Konvergenz der Reihe (3) selbstverständlich, kann aber auch leicht direkt dargetan werden. Für $\lim k = \infty$

konvergiert die linke und also die rechte Seite der letzten Gleichung gegen den Wert $\zeta(u+\omega_2)-\zeta(u)=\eta_2$. *Die zweite Periode η_2 des Integrals zweiter Gattung erster Stufe $\zeta(u)$, welche der Periode ω_2 von u entspricht, gestattet in ω_1, ω_2 die Darstellung:*

$$\frac{\eta_2}{\omega_2}=\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{(m_1,m_2)}\right)^2\right). \tag{7}$$

Die absolute Konvergenz der Reihe (3) S. 257 für $k=2$ war oben nicht beweisbar. Bei der in (7) vorgezeichneten Anordnung, bei welcher also zuerst bei stehendem m_1 über m_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summieren ist und hernach für m_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ summiert werden muß, wird indessen eine konvergente Reihe des in (7) angegebenen Summenwertes gewonnen. Es ist jetzt auch hinterher verständlich, daß die in Rede stehende Reihe nicht mehr absolut konvergent sein kann. Sie müßte ja im Falle der absoluten Konvergenz gegenüber den linearen Transformationen der Perioden invariant sein, während wir doch wissen, daß der Summenwert der Reihe (7) bei Ausübung der Transformation (5) S. 257 in:

$$\frac{\eta_2'}{\omega_2'}=\frac{\gamma\eta_1+\delta\eta_2}{\gamma\omega_1+\delta\omega_2}$$

übergeht. Durch Ausübung der speziellen Transformation $\omega_1'=\omega_2$ $\omega_2'=-\omega_1$ auf die Gleichung (7) oder auch durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie uns vorhin zur Gleichung (7) hinführte, gewinnt man übrigens die entsprechende Gleichung für die Periode η_1 von $\zeta(u)$:

$$\frac{\eta_1}{\omega_1}=\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{(m_1,m_2)}\right)^2\right). \tag{8}$$

Wir wollen hierbei nochmals besonders hervorheben, *daß zufolge der absoluten Konvergenz der Reihe* (3) *in den vorstehenden Entwicklungen ω_1, ω_2 irgendein primitives Periodenpaar unserer $\Gamma^{(u)}$ sein darf; natürlich sind die η_1, η_2 die „ihnen zugehörigen" Perioden des Integrals zweiter Gattung.*[1]

---

1) Die im Texte behandelten Teilbruchreihen für $\wp(u)$ und $\zeta(u)$ verdanken ihre absolute Konvergenz den Zusatzgliedern $\frac{1}{(m_1,m_2)^2}$ bzw. $\frac{1}{(m_1,m_2)}+\frac{u}{(m_1,m_2)^2}$, und dasselbe gilt bei dem Doppelprodukt für die σ-Funktion von den „konvergenzerzeugenden" Zusatzfaktoren:

$$e^{\frac{u}{(m_1,m_2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{(m_1,m_2)}\right)^2}.$$

Die Einführung dieser die Konvergenz bewirkenden Elemente geschah durch Weierstraß in der S. 56 namhaft gemachten Arbeit. Um die grundlegende Bedeutung dieses Schrittes zu erkennen, vgl. man die im übrigen sehr tiefdringende Unter-

§ 9. Die Funktionen des ringförmigen Bereiches nebst Anwendungen.

Neben den bisherigen Reihendarstellungen unserer elliptischen Funktionen erster Stufe sind auch noch „Fouriersche Reihen“ sowie mit ihnen verwandte Reihen und Produkte wichtig. Man kann diese Darstellungen aus den Teilbruchreihen entwickeln; doch führen die diesem Zwecke dienenden Reihenumformungen nicht in das innere Verständnis der neuen Darstellungen ein, so daß wir hier einen von den bisher aufgestellten Reihenentwicklungen gänzlich unabhängigen Weg gehen wollen, der unmittelbar an das Wesen unserer Funktionen anknüpft.

Wir denken ω_1, ω_2 als irgendein primitives Periodenpaar der $\Gamma^{(u)}$ gewählt und wollen die mit dem zugehörigen Parallelogrammnetz versehene u-Ebene vermittelst der Exponentialfunktion:

$$(1) \qquad t = e^{\frac{2i\pi u}{\omega_2}}$$

auf die t-Ebene abbilden. Als konformes Abbild gewinnen wir eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche F_∞ mit den beiden Verzweigungspunkten $t = 0$ und $t = \infty$. Die unendlich vielen beim einzelnen von 0 und ∞ verschiedenen t übereinanderliegenden Punkte der Fläche F_∞ entsprechen einem System äquivalenter Punkte u, $u \pm \omega_2$, $u \pm 2\omega_2$, $u \pm 3\omega_2, \cdots$. Die durch $u = 0$ und $u = \omega_2$ laufende Gerade und die zu ihr parallelen Geraden des Netzes liefern in der t-Ebene ein System konzentrischer Kreise um den Mittelpunkt $t = 0$ (vgl. Fig. 55); die Abbilder der Geraden des anderen Systems koinzidieren in der t-Ebene und liefern eine einzige logarithmische Spirale (vgl. Fig. 55), welche man als Verzweigungsschnitt für die F_∞ gebrauchen kann. Das erste Parallelogramm des Netzes (dasjenige der Ecken $0, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1$) ergibt im Abbilde den in Fig. 55 schraffierten Kreisring, welcher nach

---

suchung von G. Eisenstein „Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind“, Journ. f. Math. Bd. 35 (1847), S. 153 oder auch G. Eisensteins „Mathematische Abhandlungen“ (Berlin, 1847) S. 213. In dieser Abhandlung ist die spätere Weierstraßsche Theorie, insofern sie sich auf der Produktentwicklung der σ-Funktion und den Teilbruchreihen für $\zeta(u)$ usw. aufbaut, ziemlich vollständig vorausgenommen. Die Unvollkommenheit besteht jedoch darin, daß Eisenstein, da ihm eben die Weierstraßschen Zusatzfaktoren fehlen, die im Mittelpunkte stehende Größe, nämlich die Funktion $\sigma(u)$, nur durch ein „bedingt konvergentes“ Produkt darzustellen vermag. Übrigens gelten dieselben Bemerkungen auch von A. Cayley, der zwei Jahre vor Eisenstein eine verwandte Untersuchung „Mémoire sur les fonctions doublement périodiques“, Journ. de Math. Bd. 10 (1845) p. 385 veröffentlichte.

außen durch den „Einheitskreis" (Kreis mit dem Radius 1 um $t = 0$) der t-Ebene begrenzt ist; den Ecken des Parallelogramms entsprechen die durch (0), (ω_2), ... bezeichneten Punkte der Fig. 55.

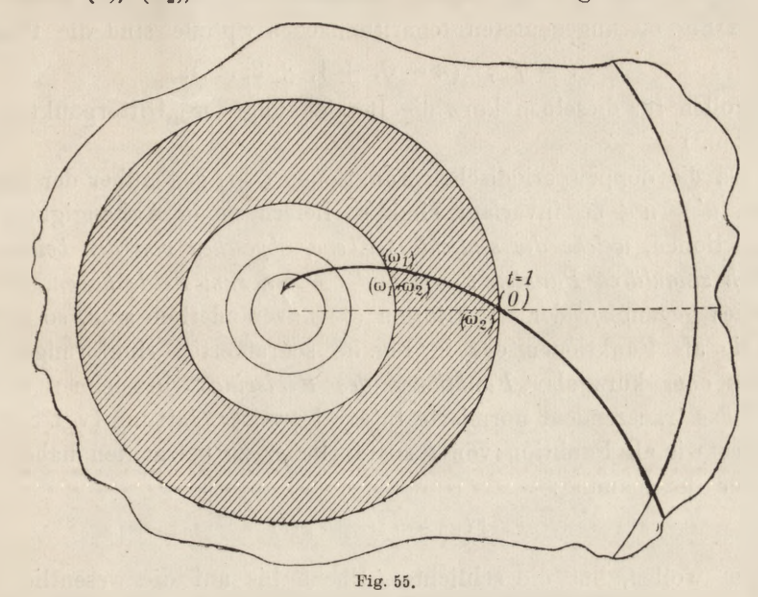


Fig. 55.

Um das Verhalten von t gegenüber den Substitutionen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ leicht bezeichnen zu können, führen wir die seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Funktionen vielfältig benutzte Exponentialfunktion des mit πi multiplizierten Periodenquotienten:

$$q = e^{\pi i \omega}$$

ein. Indem wir, wie früher, $\omega = \xi + i\eta$ schreiben, wird:

$$q = e^{-\pi\eta}\,(\cos\pi\xi + i\sin\pi\xi),$$

und also entnehmen wir aus dem Umstande, daß $\eta > 0$ ist, die für die Folge wichtige Tatsache, *daß der absolute Betrag der Zahl* q *kleiner als 1 ist:*

$$(2) \qquad |q| = e^{-\pi\eta} < 1.$$

Während nun t gegenüber der Substitution $u' = u + \omega_2$ invariant ist, liefert $u' = u + \omega_1$ auf t transformiert *die loxodromische Substitution:*

$$(3) \qquad t' = q^2 t$$

der beiden Fixpunkte $t = 0$ *und* $t = \infty$ (vgl. S. 71). Die Gruppe $\Gamma^{(u)}$ reduziert sich demnach bei Übergang zu t *auf die zyklische Gruppe* $\Gamma^{(t)}$ *der loxodromischen Substitutionen:*

$$t' = q^{2n} t, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Diese $\Gamma^{(t)}$ hat die Punkte $t = 0$ und $t = \infty$ zu Grenzpunkten; *der in Fig. 55 schraffierte Kreisring kann als ein Diskontinuitätsbereich der* $\Gamma^{(t)}$ *benutzt werden.* Die Schnittpunkte der konzentrischen Kreise mit der in Fig. 55 angedeuteten logarithmischen Spirale sind die Punkte:

$$t = q^{2n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

wir wollen für dieselben kurz die Bezeichnung der „Gitterpunkte" beibehalten.[1])

Da die doppeltperiodischen Funktionen $\psi(u)$ gegenüber der Substitution $u' = u + \omega_2$ invariant sind, so liefern sie in Abhängigkeit von t Funktionen, *welche die schlichte t-Ebene, abgesehen von den beiden wesentlich singulären Punkten* $t = 0$ *und* $t = \infty$, *zum Felde haben.* Da sie überdies gegenüber der Substitution (3) unveränderlich sind, so werden wir sie als Funktionen des in Fig. 55 schraffierten ringförmigen Bereiches oder kurz als *„Funktionen des Kreisrings"* bezeichnen dürfen. Auch das transzendent normierte Integral zweiter Gattung (vgl. S. 163), welches wir als Funktion von t ausführlicher zu betrachten haben und mit der Bezeichnung:

$$(4) \qquad \zeta(u) - \frac{\eta_2}{\omega_2} u = z(t)$$

belegen wollen, hat die schlichte t-Ebene bis auf die wesentlich singulären Stellen 0 und ∞ zum Felde. Dasselbe gehört insofern auch mittelbar zu den „Funktionen des Kreisringes", als gegenüber der Substitution (3) die Funktion $z(t)$ das Verhalten zeigt (vgl. S. 163):

$$(5) \qquad z(q^2 t) = z(t) - \frac{2i\pi}{\omega_2}.$$

Endlich können wir nach den Entwicklungen von S. 209 auch noch die σ-Funktion so mit einem Exponentialfaktor versehen, daß das Produkt gleichfalls bei Ausübung der Substitution $u' = u + \omega_2$ unveränderlich ist. Dieses Produkt wollen wir als Funktion von t mit der besonderen Bezeichnung:

$$(6) \qquad e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} + \frac{\pi i u}{\omega_2}} \sigma(u) = s(t)$$

belegen. Die Funktion $s(t)$ hat dann wieder dasselbe Feld wie die bisherigen und gehört insofern zu den Funktionen des Kreisringes, als gegenüber der Substitution (3) das besonders einfache Verhalten zutrifft:

$$(7) \qquad s(q^2 t) = -t^{-1} \cdot s(t),$$

1) Eigentlich sollte man, wie aus (3) hervorgeht, nicht q sondern q^2 als wesentliche Größe einführen; in der Tat ist q^2 weiterhin für die Funktionen *erster* Stufe immer die eigentliche Entwicklungsgröße. Daß Jacobi sich der Größe q bediente, hat, wie wir weiterhin noch darzulegen haben werden, seinen Grund darin, daß Jacobis Funktionen die elliptischen Funktionen der *zweiten* Stufe sind.

wie man leicht mit Hilfe der Legendreschen Relation (6) S. 160 nachweist.

Wir wenden nun auf die Funktionen des Kreisrings die allgemeinen Sätze über Darstellung durch unendliche Produkte (vgl. S. 56ff.) sowie durch Laurentsche Reihen (vgl. S. 39ff.) an.

Die außerhalb des Einheitskreises liegenden Nullpunkte von $s(t)$ sind die „Gitterpunkte" $q^{-2}, q^{-4}, q^{-6}, \cdots$. Da die Reihe:

$$|q|^2 + |q|^4 + |q|^6 + \cdots$$

zufolge (2) konvergiert, so liefert das Produkt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n}),$$

welches unbedingt konvergent ist, eine ganze transzendente Funktion der Höhe 0, das die erwähnten Nullpunkte mit $s(t)$ gemeinsam hat. Ebenso haben wir in:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^{-1}q^{2n})$$

eine Funktion, welche die ganze t-Ebene, abgesehen vom Punkte $t = 0$, zum Felde hat, daselbst überall endlich ist und dieselben im Innern des Einheitskreises gelegenen Nullpunkte wie $s(t)$ aufweist. Hiernach wird die Funktion:

$$f(t) = (t - 1)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^{-1}q^{2n})$$

dasselbe Feld und dieselben Nullpunkte wie $s(t)$ haben. Nun gilt weiter:

$$f(q^2t) = (q^2t - 1)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n+2}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^{-1}q^{2n-2}),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$f(q^2t) = -(1 - t^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^{-1}q^{2n}).$$

Die Funktion $f(t)$ zeigt also gegenüber der Substitution (3) das in (7) angegebene Verhalten von $s(t)$. Somit ist der Quotient von $s(t)$ und $f(t)$ auch gegenüber der Substitution (3) invariant und muß, da er in Abhängigkeit von u eine polfreie doppeltperiodische Funktion liefert, mit einer Konstanten identisch sein. Fassen wir die beiden absolut konvergenten Produkte in eines zusammen, so folgt:

$$s(t) = C \cdot (t - 1)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n})(1 - t^{-1}q^{2n}).$$

Nun folgt aus (1) und (6):

$$\lim_{u=0}\left(\frac{u}{t-1}\right) = \frac{\omega_2}{2i\pi}, \qquad \lim_{t=1}\left(\frac{s(t)}{t-1}\right) = \frac{\omega_2}{2i\pi}.$$

Die für $s(t)$ angesetzte Gleichung liefert also bei dem gleichen Grenzübergange:

$$\frac{\omega_2}{2i\pi} = C \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2.$$

Die Funktion $s(t)$ gestattet hiernach eine Darstellung in Gestalt des unbedingt konvergenten einfach unendlichen Produktes:

$$(8) \qquad s(t) = \frac{\omega_2}{2i\pi}(t-1) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-tq^{2n})(1-t^{-1}q^{2n})}{(1-q^{2n})^2},$$

welches mittelst der Gleichung (6) *auf* $\sigma(u)$ *übertragen nach einfacher Zwischenrechnung das unbedingt konvergente einfach unendliche Produkt:*

$$(9) \qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n}\cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}$$

für die σ*-Funktion liefert.*

Der in (8) unter dem Produktzeichen stehende Ausdruck kann noch so umgeformt werden:

$$\frac{\left(q^n t^{\frac{1}{2}} - q^{-n} t^{-\frac{1}{2}}\right)\left(q^n t^{-\frac{1}{2}} - q^{-n} t^{\frac{1}{2}}\right)}{(q^n - q^{-n})^2} = \frac{\sin\left(n\pi\omega + \frac{\pi u}{\omega_2}\right) \cdot \sin\left(n\pi\omega - \frac{\pi u}{\omega_2}\right)}{\sin^2 n\pi\omega}.$$

Die neue Produktdarstellung der σ-Funktion läßt sich also auch in die folgende Gestalt setzen:

$$\sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi\omega + \frac{\pi u}{\omega_2}\right) \cdot \sin\left(n\pi\omega - \frac{\pi u}{\omega_2}\right)}{\sin^2 n\pi\omega}.$$

Wir merken noch beiläufig die durch Logarithmieren und darauf folgende Differentiation dieser Gleichung sich ergebende Reihe für das Integral zweiter Gattung an:

$$(10) \quad \zeta(u) = \frac{\eta_2 u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2} + \frac{\pi}{\omega_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{\omega_2} + n\pi\omega\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{\omega_2} - n\pi\omega\right)\right].$$

Es ist dies diejenige Reihendarstellung von $\zeta(u)$, die man für gewöhnlich durch Umformung der Teilbruchreihe (3) S. 261, herleitet. Man benutzt dabei die bekannte Teilbruchreihe der ctg-Funktion und hat übrigens dieselbe Gliederanordnung durchzuführen, welche bei Ableitung der Gleichung (7) S. 263, benutzt wurde.

Weit wichtiger ist, daß wir nun auch die Laurentschen Reihen für die Darstellung der Funktionen des Kreisringes heranziehen. Die Funktion $z(t)$ hat in den Gitterpunkten $t = 1$, $q^{\pm 2}$, $q^{\pm 4}, \ldots$ Pole erster Ordnung, wird sich also für jeden ringförmigen Bereich der Fig. 55 in eine eindeutig bestimmte Laurentsche Reihe entwickeln lassen, die diesen

Ring zum Konvergenzbereich hat. Wir wollen den in Fig. 55 schraffierten Bereich B_0, den nach außen folgenden ringförmigen Bereich (dessen äußerer Rand durch $t = q^{-2}$ läuft) B_1 nennen; den aus beiden zusammengesetzten Ring nennen wir kurz $(B_0 + B_1)$. Da $(\zeta(u) - u^{-1})$ bei $u = 0$ analytisch bleibt, so gilt zufolge (1) dasselbe von

$$z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t}$$

bei $t = 1$. Diese Funktion gestattet also eine eindeutig bestimmte Laurentsche Entwicklung:

$$(11) \qquad z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n,$$

deren Konvergenzbereich der Ring $(B_0 + B_1)$ ist. Um die Koeffizienten c_n zu bestimmen, verstehen wir unter t einen in B_1 liegenden Punkt, so daß $|t| > 1$ gilt. Dann ist $q^2 t$ in B_0 gelegen, so daß $|q^2 t| < 1$ gilt und übrigens die für $q^2 t$ an Stelle von t gebildete letzte Gleichung rechts eine konvergente Reihe liefert:

$$z(q^2 t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1 - q^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n q^{2n}) t^n \cdot$$

Mit Benutzung von (5) folgt weiter:

$$z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{2i\pi}{\omega_2} + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} - \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-q^2 t} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n q^{2n}) t^n.$$

Da nun $|t| > 1$ und $|q^2 t| < 1$ gilt, so können wir die rechte Seite dieser Gleichung in folgender Art entwickeln:

$$z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} = -\frac{2i\pi}{\omega_2} \sum_{n=-\infty}^{-1} t^n - \frac{2i\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n} t^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n q^{2n}) t^n$$

oder unter Zusammenfassung gleich hoher Potenzen von t:

$$z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(c_n q^{2n} - \frac{2i\pi}{\omega_2}\right) t^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - \frac{2i\pi}{\omega_2}\right) q^{2n} t^n \cdot$$

Diese Reihe bezieht sich auf den Bereich B_1 und muß also wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Laurentschen Reihe in ihrem Konvergenzbereiche mit der Reihe (11) unmittelbar identisch sein. Also folgt:

$$c_n q^{2n} - \frac{2i\pi}{\omega_2} = c_n, \qquad c_n = \frac{2i\pi}{\omega_2} \frac{q^{-2n}}{1 - q^{-2n}} \quad \text{für} \quad n < 0,$$

$$\left(c_n - \frac{2i\pi}{\omega_2}\right) q^{2n} = c_n, \qquad c_n = -\frac{2i\pi}{\omega_2} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \quad \text{für} \quad n > 0.$$

Fassen wir die beiden Reihenglieder mit t^n und t^{-n} zusammen, so folgt:

$$z(t) + \frac{2i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{1}{1-t} = c_0 - \frac{2i\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (t^n - t^{-n}).$$

Ersetzen wir t durch t^{-1} (was auf Zeichenwechsel vor u hinausläuft), so tritt bei $z(t)$ und bei der rechts stehenden Reihe gleichfalls einfach ein Zeichenwechsel ein. Die Addition der entstehenden Gleichung zu letzter Gleichung liefert:

$$2c_0 = \frac{2i\pi}{\omega_2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t}{t-1}\right) = \frac{2i\pi}{\omega_2}.$$

Also haben wir das Ergebnis gewonnen: *Für die Funktion $z(t)$ gilt die im ringförmigen Bereiche $(B_0 + B_1)$ konvergente Laurentsche Entwicklung:*

$$(12) \qquad z(t) = \frac{\pi i}{\omega_2} \frac{t+1}{t-1} - \frac{2i\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (t^n - t^{-n}).$$

Führen wir u und damit die doppeltperiodischen Funktionen wieder ein, so folgt: *Das Integral zweiter Gattung erster Stufe läßt sich in folgende Fouriersche Reihe entwickeln:*

$$(13) \qquad \zeta(u) = \frac{\eta_2}{\omega_2} u + \frac{\pi}{\omega_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi u}{\omega_2} + \frac{4\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin \frac{2n\pi u}{\omega_2},$$

aus denen man durch Differentiation folgende Fouriersche Reihen für die elliptischen Funktionen erster Stufe gewinnt:

$$(14) \qquad \begin{cases} \wp(u) = -\dfrac{\eta_2}{\omega_2} + \left(\dfrac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi u}{\omega_2}} - \dfrac{8\pi^2}{\omega_2^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos \dfrac{2n\pi u}{\omega_2}, \\[2ex] \wp'(u) = -2\left(\dfrac{\pi}{\omega_2}\right)^3 \dfrac{\cos \dfrac{\pi u}{\omega_2}}{\sin^3 \dfrac{\pi u}{\omega_2}} + \dfrac{16\pi^3}{\omega_2^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2 q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin \dfrac{2n\pi u}{\omega_2}. \end{cases}$$

Der Konvergenzbereich der Reihen (13) und (14) in der u-Ebene entspricht dem über dem Ringe $(B_0 + B_1)$ liegenden Teile der Riemannschen Fläche F_∞; der Bereich ist also ein Parallelstreifen der u-Ebene, bestehend aus allen denjenigen Parallelogrammen, welche beiderseits an der durch $u = 0$ und $u = \omega_2$ hindurchlaufenden Geraden anliegen.[1])

1) Daß die durch Differentiation nach u entstehenden Reihen (14) denselben Konvergenzbereich haben wie die Reihe (14), unterliegt keinem Zweifel. Es handelt sich in (14) bei Umrechnung auf t um die Laurentschen Reihen der $\wp$ und $\wp'$ entsprechenden Funktionen des Kreisrings, welche $(B_0 + B_1)$ zum Konvergenzbereiche haben.

Zum Zwecke einer wichtigen Anwendung der Gleichung (13) entwickeln wir $\zeta(u)$ nach (2) S. 201 für die Umgebung von $u = 0$ nach Potenzen von u und tragen auch für $\operatorname{ctg} \frac{\pi u}{\omega_2}$ die Anfangsglieder der auf die gleiche Umgebung von $u = 0$ bezogenen Potenzreihe ein; es ergibt sich bei Zusammenfassung der Potenzreihen:

$$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 - \frac{\eta_2}{\omega_2}\right) u + \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 - \frac{1}{4} g_2\right) u^3 + \frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{2}{3^3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6 - \frac{1}{4} g_3\right) u^5 + \cdots$$

$$= \frac{4\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{2n\pi u}{\omega_2}.$$

Differenziert man einmal nach u und setzt sodann $u = 0$, so gewinnt man *für η_2 folgende konvergente einfach unendliche Reihe:*

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right). \tag{15}$$

Indem man drei bzw. fünf Male nach u differenziert und sodann $u = 0$ einträgt, folgen als *konvergente einfach unendliche Reihen für g_2 und g_3:*

$$\begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right), \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right). \end{cases} \tag{16}$$

Man kann zu diesen Darstellungen auch durch Umformungen der Doppelreihen (7) S. 263 und (5) S. 262 gelangen.

Da $s(t)$ in der ganzen t-Ebene, abgesehen von den beiden wesentlich singulären Punkten $t = 0$ und $t = \infty$, analytisch ist, so wird die Laurentsche Reihe dieser Funktion:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n$$

abgesehen von den beiden Punkten $t = 0$ und $t = \infty$ allenthalben konvergieren. Gegenüber der erzeugenden Substitution (3) der $\Gamma^{(t)}$ zeigt $s(t)$ das in (7) angegebene Verhalten; also gilt:

$$s(q^2 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n q^{2n})\, t^n = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n+1} t^n,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Einzigkeit der Laurentschen Entwicklung die Rekursionsformel:

$$c_{n+1} = -c_n q^{2n}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten ergibt. Es folgt für $n > 0$:

$$c_n = c_0 (-1)^n q^{n(n-1)}, \qquad c_{-n} = c_0 (-1)^n q^{n(n+1)},$$

und also gelangen wir unter zweckmäßiger Zusammenfassung der Glieder zu der Reihe:

$$s(t) = -c_0((t-1) - q^{1\cdot 2}(t^2 - t^{-1}) + q^{2\cdot 3}(t^3 - t^{-2}) - q^{3\cdot 4}(t^4 - t^{-3}) + \cdots).$$

Zur Bestimmung des von t unabhängigen Faktors $-c_0$ teilen wir diese Gleichung durch $(t-1)$ und setzen sodann $t=1$. Der links stehende Quotient nimmt zufolge (8) den Wert $\frac{\omega_2}{2i\pi}$ an; wir erhalten also zur Bestimmung von c_0 eine Gleichung, der wir die Gestalt geben:

$$(17) \qquad -\frac{1}{ic_0} = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 - 3q^{1\cdot 2} + 5q^{2\cdot 3} - 7q^{3\cdot 4} + 9q^{4\cdot 5} - \cdots).$$

Hier steht rechts eine für jede $\Gamma^{(u)}$ konvergente Reihe, die einen von 0 verschiedenen Summenwert haben muß, und für die wir unten noch andere Gestalten kennen lernen werden. Nennen wir den in (17) rechts stehenden Ausdruck als Funktion von ω_1, ω_2 kurz $\varphi(\omega_1 \omega_2)$, *so folgt nunmehr endgültig als Laurentsche Reihe für $s(t)$*

$$(18) \quad \varphi(\omega_1, \omega_2) \cdot s(t) = -i((t-1) - q^{1\cdot 2}(t^2 - t^{-1}) + q^{2\cdot 3}(t^3 - t^{-2}) - \cdots)$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit:

$$e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} - \frac{\pi i u}{\omega_2}} = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

führt zufolge (6) zur Funktion $\sigma(u)$ zurück. Führen wir auch rechts u wieder ein, *so ergibt sich also eine in der ganzen endlichen u-Ebene konvergente Fouriersche Reihe für die σ-Funktion:*

$$(19) \quad \varphi(\omega_1, \omega_2) \cdot \sigma(u) = 2e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{\omega_2},$$

wobei der endliche und von 0 verschiedene Wert $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ gegeben ist durch die Reihe:

$$(20) \quad \varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 - 3q^{1\cdot 2} + 5q^{2\cdot 3} - 7q^{3\cdot 4} + 9q^{4\cdot 5} - \cdots).$$

§ 10. Das System aller elliptischen Funktionen und die Ausartung derselben.

Nach S. 96 sollte es nicht nur unsere Aufgabe sein, den einzelnen Körper elliptischer Funktionen zu untersuchen, sondern zugleich einen Überblick über das System aller Körper elliptischer Funktionen zu gewinnen. Auf algebraischer Grundlage ist diese Aufgabe oben (S. 137 ff.) in der Weise gelöst, *daß wir für den einzelnen Körper elliptischer Funktionen den zugehörigen Wert der rationalen absoluten Invariante J als charakteristisch erkannten: Jedem Körper gehörte ein endlicher komplexer (oder reeller) Wert J zu, und jedem solchen Wert J entsprach eindeutig*

ein Körper elliptischer Funktionen. Hiermit ist bereits eine endgültige Lösung unserer zweiten Aufgabe gewonnen.

Nun fanden wir zweitens S. 175ff. einen *„Modul“* für den einzelnen Körper elliptischer Funktionen in dem *Quotienten* ω *des reduzierten Periodenpaares.* Dieser Modul war für jeden Körper ein eindeutig bestimmter endlicher komplexer Wert, dessen Bildpunkt in dem hierneben als Fig. 56 reproduzierten Doppeldreieck der Fig. 43, S. 179, gelegen war. Nach den Entwicklungen des vorliegenden Kapitels gilt aber auch hier die Umkehrung: *Jedem endlichen komplexen Werte* ω, *dessen Bildpunkt dem Doppeldreieck der Fig. 56 angehört*[1], *entspricht eindeutig ein Körper elliptischer Funktionen.* Die Aufgabe, den Überblick über das Gesamtsystem dieser Körper zu gewinnen, hat damit eine zweite endgültige Lösung gewonnen.

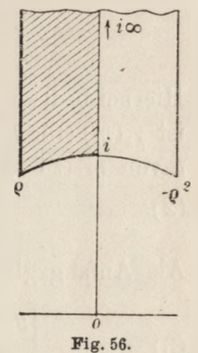


Fig. 56.

Auf Grund dieses Ergebnisses finden wir, daß nicht nur der Punkt ω des Doppeldreiecks eindeutig von J abhängt, *sondern daß auch umgekehrt J eine eindeutige Funktion des im Doppeldreiecke beliebig variabelen endlichen Moduls ω ist.* Wir wollen die absolute rationale Invariante J in dieser Abhängigkeit durch $J(\omega)$ bezeichnen und nennen sie als Funktion des Moduls ω kurz eine *„Modulfunktion“* oder genauer eine *„elliptische Modulfunktion“*.

Was die Beschaffenheit dieser Modulfunktion $J(\omega)$ angeht, so greifen wir zunächst auf die Darstellungen (16) S. 271 der rationalen Invarianten g_2, g_3 in ω_2 und q zurück. In diesen Gleichungen stehen rechts in den Klammern Reihen, die in jedem bestimmten, ganz im Innern des Einheitskreises der q-Ebene gelegenen Bereiche gleichmäßig konvergent sind. Jedes Glied der Reihen ist ebenda eine eindeutige analytische Funktion von q, so daß sich aus einem bekannten Satze der Funktionentheorie[2]) ergibt: *Die unter* (16) S. 271 *in den Klammern zur Darstellung von g_2 und g_3 dienenden Ausdrücke sind in jedem ganz im Innern des Einheitskreises der q-Ebene liegenden Bereiche eindeutige analytische Funktionen von q.*

1) Es gilt natürlich wieder die Bestimmung, daß nur diejenigen Randstücke dem Bereiche der Fig. 56 als zugehörig gelten, welche in der Figur stark markiert sind.

2) Der Satz, daß eine in einem gewissen Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe eindeutiger analytischer Funktionen ebendort selbst wieder eine eindeutige analytische Funktion darstellt, ist von Weierstraß in den Berliner Berichten vom 12. August 1880 veröffentlicht; s. auch Weierstraß „Werke“, Bd. 2, S. 201ff. Einen einfachen Beweis mittels Cauchyscher Methoden findet man bei „Osgood“ S. 303.

Ordnen wir die Reihen (16) S. 271 nach ansteigenden Potenzen von q an, so ergeben sich folgende Darstellungen:

$$(1) \quad \begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{m=1}^{\infty} \chi_3(m) q^{2m}\right), \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_5(m) q^{2m}\right). \end{cases}$$

Hierbei bedeuten $\chi_3(m)$ und $\chi_5(m)$ von m abhängige ganze Zahlen, und zwar ist $\chi_k(m)$ (für $k = 3$ und $k = 5$) die Summe der k^{ten} Potenzen aller Teiler t von m ($t = 1$ und $t = m$ mitgerechnet):

$$(2) \qquad \chi_k(m) = \sum_t t^k.$$

Als Anfangsglieder der Reihen (1) ergeben sich:

$$(3) \quad \begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20q^2 + 180q^4 + 560q^6 + \cdots\right), \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}q^2 - 77q^4 - \frac{1708}{3}q^6 - \cdots\right). \end{cases}$$

Für die Diskriminante $\varDelta = g_2^3 - 27g_3^2$ ergeben sich folgende Anfangsglieder der Potenzreihe nach q:

$$(4) \qquad \varDelta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2(1 - 24q^2 + 252q^4 - 1472q^6 + \cdots).$$

Gehört ω dem Doppeldreieck der Fig. 56 an, so gilt $|q| \leqq e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$. Doch beachte man sogleich (vgl. den Anfang von § 9, S. 264), daß sich die Entwicklungen (16) S. 271 auf irgendein primitives Periodenpaar ω_1, ω_2 der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ bezogen. Für jedes solche Paar ist der Periodenquotient ω eine endliche komplexe Zahl mit *positivem* imaginären Bestandteile, und also ist $|q| < 1$; einer weiteren Beschränkung unterliegt aber ω und damit auch q nicht. Es folgt also der für die weitere Fortsetzung unserer Untersuchung wichtige Satz: *In jedem bestimmten, ganz im Innern der „positiven ω-Halbebene“ (vgl. S. 186) gelegenen Bereiche sind g_2, g_3 und $\varDelta$ eindeutige analytische Funktionen von ω_2 und q und damit von ω_1 und ω_2, und zwar sind sie in diesen beiden Argumenten ω_1, ω_2 homogen von den Dimensionen $-4, -6, -12$.*

Kehren wir auf Grund der Gleichung (16) S. 124 von g_2, g_3 und $\varDelta$ zu J zurück, so ergibt sich: *Die Modulfunktion $J(\omega)$ ist in jedem bestimmten, ganz im Innern der ω-Halbebene gelegenen Bereiche (in dem, wie wir wissen, $\varDelta$ nirgends einen Nullpunkt hat) eine eindeutige überall analytische Funktion des Moduls ω; sie läßt sich ebenda als eindeutige Funktion von q in die konvergente Reihe entwickeln:*

$$(5) \qquad J = \frac{g_2^3}{\varDelta} = \frac{1}{1728}q^{-2} + \frac{31}{72} + \frac{1823}{16}q^2 + \cdots$$

Der Punkt $q = 0$ entspricht der an den unendlichfernen Punkt der ω-Ebene heranragenden Spitze des Doppeldreiecks der Fig. 56, S. 273, welche zunächst für die von unseren elliptischen Gebilden gelieferten ω unzugänglich ist, obschon jeder endliche, in der Umgebung jener Spitze liegende Punkt ω von den bei den Körpern elliptischer Funktionen auftretenden Periodenquotienten erreichbar ist. Wir erkennen jetzt, *daß die Modulfunktion $J(\omega)$ bis in den Punkt $q = 0$ fortsetzbar ist und daselbst in der „q^2-Ebene“ einen Pol erster Ordnung gewinnt.*[1])

Diesem Ergebnis folgend wollen wir fortan die „Spitze $\omega = i\infty$“ des Doppeldreiecks der Fig. 56 diesem Bereiche zurechnen. Der so ergänzte Bereich ist dann *durch die Modulfunktion $J(\omega)$ eindeutig auf die schlichte J-Ebene, unter Einschluß des Punktes $J = \infty$, bezogen.* Wir werden diese Abbildung unten noch genauer zu betrachten haben; doch notieren wir gleich hier einige Sätze, welche sich aus den bisherigen Entwicklungen unmittelbar ergeben.

Aus der Gleichung:

$$q^2 = e^{-2\pi\eta}(\cos 2\pi\xi + i \sin 2\pi\xi)$$

geht hervor, daß q^2 längs der Symmetrielinie des Doppeldreiecks der Fig. 56, S. 273 (imaginären ω-Achse zwischen $\omega = i\infty$ und $\omega = i$) reell und positiv ist, während q^2 längs der unseren Bereich links berandenden Geraden $\xi = -\frac{1}{2}$ reell und negativ ausfällt. Aus den Reihenentwicklungen folgt, daß längs beider Geraden J reell ist, und zwar ist jedenfalls in der Umgebung von $\omega = i\infty$ auf der ersten Geraden J positiv und auf der zweiten negativ. Nun wissen wir aber bereits, daß für $\omega = \varrho$ (äquianharmonischer Fall) g_2 und damit J verschwindet, während für $\omega = i$ (harmonischer Fall) $g_3 = 0$ und also $J = 1$ ist. Somit überträgt sich die imaginäre ω-Achse zwischen i und $i\infty$ auf die positive reelle J-Achse von $J = 1$ bis $J = \infty$, die von $\omega = \varrho$ nach $i\infty$ laufende Gerade $\xi = -\frac{1}{2}$ aber auf die negative reelle J-Achse von $J = 0$ bis $J = -\infty$ (vgl. Fig. 57, wo die in den Ecken des schraffierten Elementardreiecks stattfindenden Werte J angegeben sind).

Fig. 57.

Zwei bezüglich der imaginären Achse symmetrisch liegende Punkte ω liefern konjugiert komplexe Werte q und also konjugiert komplexe Werte J. Aber zwei auf dem vom Einheitskreise der ω-Ebene gelieferten Rande symmetrisch zur imaginären ω-Achse liegende Punkte ω des Doppeldreiecks (von denen nur der

1) Wir erinnern daran, daß q^2 die richtige Entwicklungsgröße für die elliptischen Funktionen erster Stufe ist (vgl. Note S. 266).

links liegende diesem Bereiche zugerechnet wird) liefern ein und dieselbe Gruppe $\Gamma^{(u)}$ und also den gleichen Wert J. Dieser Wert ist also seinem konjugiert komplexen Werte gleich, d. h. er ist reell. Wir finden somit: *Der Rand des schraffierten Elementardreiecks der Fig. 56 (und damit auch derjenige des freien Dreiecks) überträgt sich auf die reelle J-Achse, das schraffierte Dreieck selbst überträgt sich auf die „positive J-Halbebene“, das freie auf die „negative J-Halbebene“.*[1])

Wir haben hiermit volle Aufklärung gewonnen über die gegenseitige Beziehung jener beiden Größen, des unbeschränkt veränderlichen J und des im Doppeldreieck beliebig variablen ω, welche uns das Gesamtsystem aller Körper elliptischer Funktionen zu überblicken gestatteten. Wünschenswert bleibt allerdings, daß wir die letzten Entwicklungen auch noch nach der algebraischen Seite ergänzen. In der Tat können wir ja die Veränderungen von J dadurch hervorrufen, *daß wir die drei im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte* e_1, e_2, e_3 *der Riemannschen Fläche* F_2 *unter Wahrung ihrer Relation:*

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

beliebigen Lagenänderungen unterwerfen. Natürlich darf man dabei in jedem Falle unter den durch lineare Transformationen von z ineinander überführbaren Flächen F_2 eine möglichst bequeme zur Berechnung des zugehörigen Wertes von J herausgreifen.

Wir lenken insbesondere die Aufmerksamkeit auf *die symmetrischen Flächen* F_2. Dieselben entsprechen den S. 247 betrachteten Gruppen $\Gamma^{(u)}$, die durch eine Transformation zweiter Art $\overline{T}$ in sich überführbar sind; die zugehörigen Punkte ω sind die Randpunkte des schraffierten Elementardreiecks der Fig. 56, die den Punkten der reellen J-Achse entsprechen.

Ist erstlich ω rein imaginär, so haben wir ein Periodenrechteck, und die drei Punkte e_1, e_2, e_3 liegen auf einer Geraden, die wir zur reellen Achse der z-Ebene wählen. Wir bleiben mit Fig. 39, S. 173, in Übereinstimmung, wenn wir etwa:

$$e_1 = -1, \qquad -1 < e_3 = e \leqq 0, \qquad e_2 = 1 - e$$

setzen. Die Darstellungen der g_2, g_3 in den e_1, e_2, e_3:

$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$$

ergeben also im fraglichen Falle:

$$g_2 = 4(e^2 - e + 1), \quad g_3 = 4(e^2 - e),$$

so daß $g_3 = g_2 - 4$ gilt und g_2 genau einmal alle reellen Werte des

1) Die Benennungen entsprechen, wie bei der „positiven ω-Halbebene“, den Vorzeichen der imaginären Bestandteile der komplexen Werte J.

Intervalles $4 \leqq g_2 < 12$ durchläuft, wenn e sein Intervall $0 \geqq e > -1$ beschreibt. Hierbei durchläuft J, gegeben durch:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27(g_2 - 4)^2},$$

genau einmal das Intervall aller endlichen reellen Zahlen $J \geqq 1$. Nehmen wir den Grenzwert $e = -1$ hinzu, der $g_2 = 12$ und $J = \infty$ liefert, so *artet die F_2 durch Zusammenfall der beiden Verzweigungspunkte e_1 und e_3 in eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit „zwei“ Verzweigungspunkten $e_2 = 2$ und ∞ aus, die dementsprechend dem Geschlechte $p = 0$ angehört.*

Indem wir uns vorbehalten, auf diese Ausartung der F_2 sogleich näher einzugehen, knüpfen wir vorerst an den harmonischen Fall $\omega = i$ an, dem wir eben die Verzweigungspunkte $e_1 = -1$, $e_2 = +1$, $e_3 = 0$ entsprechen ließen. Um von hieraus eine weitere stetige Lagenänderung der Verzweigungspunkte vorzunehmen, setzen wir:

$$e_1 = -\cos\vartheta + i\sin\vartheta, \quad e_2 = \cos\vartheta + i\sin\vartheta, \quad e_3 = -2i\sin\vartheta$$

und lassen den Winkel ϑ stetig das Intervall $0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ durchlaufen.[1]) Nun liefert die S. 168 ff. behandelte Abbildung der Fläche F_2 auf die u-Ebene ein rhombisches Periodenparallelogramm, und ω bewegt sich auf dem im Kreisbogendreieck der Fig. 42, S. 176, gelegenen Quadranten des Einheitskreises der ω-Ebene. Für $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ haben wir den äquianharmonischen Fall. Beschreibt der Winkel ϑ mit dem Werte 0 beginnend das Teilintervall $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{6}$, so durchläuft:

$$J = \frac{(1 - 4\sin^2\vartheta)^3}{(1 - 4\sin^2\vartheta)^3 + 27\sin^2\vartheta}$$

die positiven reellen Werte von $J = 1$ bis $J = 0$ genau einmal, und ω beschreibt das Zwölftel seines Einheitskreises von $\omega = i$ bis $\omega = \varrho$. Für den Rest des Intervalles $\frac{\pi}{6} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ wird $|e_3| > |e_1|$. Dann aber wird (bei Gebrauch der Bezeichnungen von S. 167 ff.) $|\omega_3| < |\omega_1|$, entgegen den Vorschriften von S. 178, welche auf das schraffierte Drittel der Fig. 42, S. 176, als Bereich für die „reduzierten“ ω führte. Wir müssen

1) Drehen wir die z-Ebene um ihren Nullpunkt durch einen rechten Winkel, so gelangen wir jetzt zum Falle zweier reellen und zweier konjugiert komplexen Verzweigungspunkte. Es möchte scheinen, daß bei der Betrachtung des Textes symmetrische Riemannsche Flächen mit *zwei* Paaren bezüglich der reellen Achse symmetrisch gelegener Verzweigungspunkte nicht zur Geltung kommen. Indessen läuft durch vier so gelegene Punkte immer ein Kreis hindurch; indem wir diesen aber durch eine geeignete lineare Substitution von z zur reellen Achse machen, gelangen wir zum ersten Falle des Textes zurück.

jetzt die Indizes 1, 2, 3 in richtiger Weise permutieren oder die S. 176 eingeführte lineare Transformation:

$$\omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = -\omega_1 - \omega_2$$

der Perioden ausführen, damit ω' den Rand des Doppeldreiecks der Fig. 56, S. 273, von $\omega = \varrho$ gegen $\omega = i\infty$ beschreibt, wenn ω den Sextanten des Einheitskreises von $\omega = \varrho$ gegen den Punkt $\omega = -1$ durchläuft. Für die Berechnung der absoluten Invarianten J ist eine Permutation der Indizes bei e_1, e_2, e_3 ohne Folge. Man stellt aus dem obigen Ausdrucke von J leicht fest, daß J vom Werte 0 beginnend gerade einmal alle negativen reellen Werte beschreibt, wenn ϑ von $\frac{\pi}{6}$ aus das Intervall $\frac{\pi}{6} \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ durchläuft. *Nehmen wir auch hier den Grenzwert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hinzu, so wird wieder $J = \infty$, und wir gelangen aufs neue durch Zusammenfall zweier Verzweigungspunkte zu einer zweiblättrigen Fläche des Geschlechtes* 0.

Die Ausartung der F_2 in eine Fläche des Geschlechts $p = 0$ haben wir von den symmetrischen Fällen aus in zwei Arten erreicht, die einfach darauf hinauslaufen, daß wir den Punkt ∞ der J-Ebene einmal in Richtung der positiven, sodann in Richtung der negativen reellen J-Achse erreichen, oder (was auf dasselbe hinausläuft) daß wir zur Spitze $i\infty$ des schraffierten Dreiecks der Fig. 56, S. 273, entweder längs der imaginären ω-Achse oder längs des linken Randes gehen. Statt dessen kann man in der J-Ebene auch irgendeinen anderen Weg zum Punkte ∞ einschlagen, der dann einen bestimmten Weg des Punktes q^2 zum Nullpunkte der q^2-Ebene und eine bestimmte Annäherung bis zur Spitze $i\infty$ des oft genannten Doppeldreiecks liefert. In algebraischer Gestalt läuft diese Maßregel darauf hinaus, daß wir einen der Verzweigungspunkte, etwa e_1, bei irgendeiner endlichen, von 0 verschiedenen Stelle, z. B. bei $z = 1$, fixieren, dann aber e_2 und e_3 unter Obacht auf $e_2 + e_3 = -1$ auf irgendwelchem Wege bei $z = -\frac{1}{2}$ zum Zusammenfall bringen. Wir erhalten dann am Schlusse eine zweiblättrige Fläche, welche nur noch die beiden Verzweigungspunkte 1 und ∞ hat und demnach wieder zum Geschlechte 0 gehört.

Es handelt sich hier um dieselbe Ausartung, welche wir S. 243 bei den Gruppen $\Gamma^{(u)}$ kennen lernten; die ausgeartete $\Gamma^{(u)}$ war die zyklische Gruppe aller Substitutionen $u' = u + m_2\omega_2$, der Diskontinuitätsbereich derselben ein geeigneter „Parallelstreifen“ der u-Ebene. *Die Funktionen dieser ausgearteten $\Gamma^{(u)}$ haben nur noch die „eine“ Periode ω_2; es sind also die einfach-periodischen Funktionen, in welche die elliptischen Funktionen nunmehr ausgeartet sind.*

Dieses Ergebnis wird durch die Entwicklungen von S. 268ff. unmittelbar bestätigt. *Im Falle der Ausartung, d. h. für* $q = 0$, *werden zufolge* (15) S. 271 *und* (14) S. 270 *die Funktionen* $\wp(u)$ *und* $\wp'(u)$ *folgende trigonometrische Funktionen:*

$$(6)\qquad \begin{cases} \wp(u) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \sin^{-2}\frac{\pi u}{\omega_2}, \\ \wp'(u) = -2\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^3 \cos\frac{\pi u}{\omega_2} \cdot \sin^{-3}\frac{\pi u}{\omega_2}, \end{cases}$$

das Integral zweiter Gattung wird:

$$(7)\qquad \zeta(u) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 u + \frac{\pi}{\omega_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2},$$

und die Sigmafunktion geht zufolge (19) *und* (20) S. 272 *in die Gestalt über:*

$$(8)\qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi}\, e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 u^2} \sin\frac{\pi u}{\omega_2}.$$

Auch algebraisch ist die Natur der Ausartung sofort verständlich. Das bisherige Integral erster Gattung u ist im Falle der Ausartung elementar und wird durch Logarithmen darstellbar. Dasselbe bildet die geeignet zerschnittene Fläche F_2 auf jenen Parallelstreifen der u-Ebene ab, den wir als Diskontinuitätsbereich der ausgearteten $\Gamma^{(u)}$ einführten. Die algebraischen Funktionen der F_2 werden dabei umgekehrt zu Exponentialfunktionen von u mit der Periode ω_2.

Fünftes Kapitel.

Die elliptischen Modulfunktionen erster Stufe und ihre inversen Funktionen.

Die Haupteigenschaft der soeben betrachteten Funktion $J(\omega)$ des Moduls ω gründet sich auf die Gleichungen (6) S. 262, denen zufolge g_2 und g_3 und also auch $J(\omega)$ gegenüber irgendwelchen „linearen Transformationen" der Perioden ω_1, ω_2 unveränderlich sind. Von hieraus gewinnt man den deutlichsten Einblick in die Natur dieser Modulfunktion $J(\omega)$, nämlich dadurch, daß man genau wie im vorigen Kapitel eine geometrisch-gruppentheoretische Betrachtung, und zwar jetzt über die gesamten „linearen Transformationen" der Perioden voranstellt.

Auf dieser Grundlage werden wir den allgemeinen Begriff einer *„elliptischen Modulfunktion erster Stufe"* aufstellen können, wobei sich die vereinzelten im vorigen Kapitel in dieser Hinsicht schon betrachteten Abhängigkeiten in eine allgemeine funktionentheoretische Auffassung einordnen werden. Der Name „elliptische Modulfunktion" ist

von R. Dedekind eingeführt.[1]) Die grundlegenden Arbeiten Kleins über Modulfunktionen und ihre Verwendung in der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen beginnen 1878.[2]) In umfassender Weise ist das ganze Gebiet in dem S. 94 genannten Werke von Klein und Fricke behandelt. Wir geben weiterhin nur diejenigen Entwicklungen, welche für das Verständnis der Theorie der elliptischen Funktionen unentbehrlich sind.

Indem wir die Perioden ω_1, ω_2 innerhalb gewisser Grenzen als willkürlich variabel auffassen, werden nun auch die elliptischen Funktionen selber in ihrer Abhängigkeit von ω_1, ω_2 und damit *als Funktionen dreier Argumente* u, ω_1, ω_2 zu betrachten sein. Bei dieser Auffassung werden wir die Aufmerksamkeit auf zwei gewisse schon seit längerem bekannte Differentiationsprozesse zu lenken haben, welche uns insbesondere zur Kenntnis einer wichtigen partiellen Differentialgleichung für die σ-Funktion hinführen.

Auf der gleichen Grundlage erwachsen gewisse lineare Differentialgleichungen, denen die Perioden als Funktionen der rationalen Invarianten genügen. Wir gelangen hierbei zu den den elliptischen Modulfunktionen inversen Funktionen und werden aus jenen Differentialgleichungen wichtige analytische Darstellungen dieser inversen Funktionen gewinnen.

§ 1. Die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ und ihre Erweiterung durch eine Spiegelung.

Die „linearen Transformationen" der Perioden ω_1, ω_2 liefern für den Modul der Körper elliptischer Funktionen, d. i. für den Periodenquotienten ω *die ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1:*

$$(1) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Um einen ersten Überblick über alle Substitutionen (1) zu gewinnen, bemerken wir, daß sie den gesamten Lösungen der zweiten Gleichung (1) in ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen, wobei jedoch

1) Siehe Dedekinds Erläuterungen zu zwei nachgelassenen Fragmenten Riemannscher Untersuchungen, dessen erstes aus dem September 1852 stammt, in Riemanns „Werken", S. 427 ff. (Leipzig, 1876). Weiter kommt in Betracht Dedekinds „Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", Journ. f. Math., Bd. 83 (1877), S. 265.

2) Siehe insbesondere die Abhandlung „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen 5. Grades", Math. Ann. Bd. 14 (1878) S. 111 sowie die mehr programmatisch gehaltene Note „Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen", Math. Ann. Bd. 17 (1879) S. 62.

zwei Lösungen, die durch gleichzeitigen Zeichenwechsel aller vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ineinander übergehen, ein und dieselbe Substitution (1) liefern.

Ist $\gamma = 0$, so folgt aus $\alpha\delta = 1$ sofort $\alpha = \delta = \pm 1$, und wir dürfen nach dem eben Gesagten $\alpha = \delta = +1$ setzen; β bleibt als ganze Zahl willkürlich wählbar, *so daß wir den Werten* $\cdots, -2, -1, 0, +1, +2, \cdots$ *von* β *entsprechend eine einfach unendliche Reihe von Substitutionen* (1) *mit* $\gamma = 0$ *finden.*

Ist γ nicht gleich 0, so dürfen wir $\gamma > 0$ annehmen. Für $\gamma = 1$ sind α und δ willkürlich wählbar, worauf $\beta = \alpha\delta - 1$ wird. *Also haben wir für irgendein Zahlenpaar* α *und* $\gamma = 1$ *den Werten* $\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$ *von* δ *entsprechend wieder eine einfach unendliche Reihe von Substitutionen* (1).

Ist $\gamma > 1$, so ist die Zahl α notwendig relativ prim zu γ, da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein muß. Wählen wir α als *beliebige* zu γ teilerfremde ganze Zahl, so können wir mittelst einiger Elementarsätze über die „Kongruenzen der ganzen Zahlen" beweisen, *daß zum gewählten Zahlenpaar* α, γ *wieder eine einfach unendliche Reihe von Substitutionen* (1) *gehört.* Zwei Zahlen a und b, deren Differenz durch γ teilbar ist, heißen nach dem „Modul" γ oder kurz modulo γ kongruent, was man mittelst des Zeichens $\equiv$ der Kongruenz durch:

$$a \equiv b, \qquad (\text{mod. } \gamma)$$

ausdrückt. Jede ganze Zahl ist modulo γ mit einem bestimmten unter den γ Divisionsresten $0, 1, 2, \cdots, \gamma - 1$ kongruent. Zwei ganze Zahlen sind mod. γ dann und nur dann kongruent, wenn sie dem gleichen unter den Divisionsresten $0, 1, \cdots, \gamma - 1$ kongruent sind. Man bilde nun mit der zu γ relativ primen Zahl α die $(\gamma - 1)$ ganzen Zahlen $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \cdots, (\gamma - 1)\alpha$. Keine unter ihnen ist mod. γ mit 0 kongruent; auch sind keine zwei verschiedene unter ihnen miteinander kongruent, da aus $\mu\alpha \equiv \nu\alpha$, (mod. γ) sofort $(\mu - \nu)\alpha \equiv 0$, (mod. γ) folgen würde, und also mit Rücksicht auf die gegen γ teilerfremde Zahl α notwendig $(\mu - \nu)$ durch γ teilbar sein müßte. Bei dieser Sachlage erweisen sich die $(\gamma - 1)$ Zahlen $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \cdots, (\gamma - 1)\alpha$ notwendig in irgendeiner Reihenfolge mit den $(\gamma - 1)$ Divisionsresten $1, 2, \cdots, \gamma - 1$ modulo γ als kongruent. Eine und nur eine Zahl der ersteren Reihe, etwa $\delta_0\alpha$, ist insbesondere mit 1 kongruent:

$$\alpha\delta_0 \equiv 1, \qquad (\text{mod. } \gamma).$$

Ist $\nu\gamma$ ein beliebiges Multiplum von γ und setzt man $\delta = \delta_0 + \nu\gamma$, so ist auch $\alpha\delta \equiv 1$, (mod. γ). Ist umgekehrt δ irgendeine dieser Kongruenz genügende ganze Zahl, so folgt aus $\alpha\delta - \alpha\delta_0 \equiv \alpha(\delta - \delta_0) \equiv 0$, (mod. γ), daß δ in der Gestalt $\delta = \delta_0 + \nu\gamma$ enthalten sein muß. Der

ganzzahlige Quotient von $(\alpha\delta - 1)$ und γ heiße nun β, der von $(\alpha\delta_0 - 1)$ und γ aber β_0; dann gilt einfach $\beta = \beta_0 + \nu\alpha$, und wir finden den Satz: *Zu einem beliebigen Paare relativer Primzahlen α und $\gamma > 1$ gibt es in der Tat eine einfach unendliche Reihe zugehöriger Substitutionen* (1) *mit $\beta = \beta_0 + \nu\alpha$ und $\delta = \delta_0 + \nu\gamma$, wo ν alle ganzen Zahlen $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ zu durchlaufen hat.*

Auf die Substitutionen (1) wollen wir nun die S. 126ff. allgemein für lineare Substitutionen ausgeführten Rechnungen anwenden; doch wollen wir für die Substitutionen (1) nicht das damalige Symbol S benutzen, sondern $\omega' = V(\omega)$ schreiben, da die Symbole S, T und U für gewisse spezielle Substitutionen (1) vorbehalten werden sollen.

Für die Kombination zweier Substitutionen V_1, V_2 gelten die im Anschluß an (2) und (3) S. 127 ausgesprochenen Regeln. Aus der Gleichung (2) S. 127 folgt insbesondere, daß die aus V_1 und V_2 zusammengesetzte Substitution $V_2 \cdot V_1$ wiederum ganzzahlig und von der Determinante 1 ist: *Die gesamten Substitutionen* (1), *unter denen zu jeder Substitution $V = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ natürlich auch ihre inverse $V^{-1} = \begin{pmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$ auftritt, bilden eine Gruppe, die wir als die Gruppe des Moduls ω oder kurz als die „Modulgruppe" benennen und durch $\Gamma^{(\omega)}$ bezeichnen.* Natürlich gehört auch die „identische Substitution" $V_0 = 1$ oder ausführlich $V_0 = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ der $\Gamma^{(\omega)}$ an.

Jede Substitution V transformiert die reelle ω-Achse in sich. Wir haben auch bereits S. 186 festgestellt, *daß durch jede Substitution $\omega' = V(\omega)$ die „positive ω-Halbebene" in sich transformiert wird, und damit natürlich auch die negative Halbebene.* Wir ziehen nun auch die S. 71ff. entwickelte Einteilung der Substitutionen in elliptische, parabolische, hyperbolische und loxodromische heran, sowie die Veranschaulichung der einzelnen Substitution durch ihre Bahn- und Niveaukurven. Ist $\gamma = 0$, so hat die Substitution (1) die Gestalt $\omega' = \omega + \beta$; sie bedeutet eine Translation in Richtung der reellen ω-Achse und stellt eine parabolische Substitution des Fixpunktes $\omega = \infty$ dar. Ist $\gamma \gtrless 0$, so hat V die im Endlichen liegenden Fixpunkte:

$$\frac{1}{2\gamma}\left(\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}\right), \tag{2}$$

und der Multiplikator m der Normalgestalt (8) S. 70 von V berechnet sich leicht zu:

$$m = \left(\frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Wir erkennen auf Grund der Festsetzungen von S. 71 sofort: *Ist $\alpha + \delta = 0$, so gilt $m = -1$, und V ist „elliptisch" von der Periode 2*

(vgl. S. 128); *ist* $|\alpha + \delta| = 1$, *so gilt* $m = \varrho$ *oder* ϱ^2, *und* V *ist „elliptisch“ von der Periode 3; ist* $|\alpha + \delta| = 2$, *so fallen die Fixpunkte zusammen, und* V *ist „parabolisch“; ist endlich* $|\alpha + \delta| > 2$, *so ist* m *reell, positiv und von 1 verschieden, womit sich* V *als „hyperbolisch“ erweist.* Hieraus geht weiter hervor: *Loxodromische Substitutionen sind in der Modulgruppe* $\Gamma^{(\omega)}$ *nicht enthalten.*

Die Fixpunkte einer elliptischen Substitution V sind zwei endliche, bezüglich der reellen ω-Achse symmetrisch liegende Punkte. Die Schar der durch diese Punkte laufenden Kreise sind die Niveaukurven; die orthogonale Kreisschar, in der sich die reelle ω-Achse findet, liefert die Bahnkurven. Der Fixpunkt einer parabolischen Substitution V ist ein rationaler Punkt der reellen ω-Achse (den Punkt $\omega = \infty$ eingerechnet). Die reelle Achse und alle sie im Fixpunkte berührenden Kreise liefern die Bahnkurven, die zu ihnen orthogonalen Kreise die Niveaukurven. Da $(\alpha + \delta)^2 - 4$ für $|\alpha + \delta| > 2$ niemals ein Quadrat ist, so sind die Fixpunkte einer hyperbolischen Substitution V stets zwei irrationale reelle Punkte, die die Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung, nämlich der zur Substitution gehörenden Gleichung (7) S. 70 sind. Hier liefern die durch die beiden Fixpunkte laufenden Kreise, unter ihnen die reelle ω-Achse, die Bahnkurve und wie immer die zu ihnen orthogonale Kreisschar die Niveaukurven.

Gehen wir von den Substitutionen (1) wieder zu den „linearen Transformationen“ der Perioden zurück, so entsprechen der einzelnen Substitution (1) immer die beiden *„homogenen Substitutionen“*:

$$(4)\quad \begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \\ \omega_1' = -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2, & \omega_2' = -\gamma\omega_1 - \delta\omega_2, \end{cases}$$

ein Umstand, den wir schon oben in Betracht zu ziehen hatten (z. B. S. 185). *Auch diese homogenen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 bilden in ihrer Gesamtheit, wie man leicht feststellt, eine Gruppe; wir wollen sie im Anschluß an die bisherige Sprechweise als die „homogene Modulgruppe“* $\Gamma^{(\omega)}$ *bezeichnen; auf sie ist die ursprüngliche* $\Gamma^{(\omega)}$ *einzweideutig bezogen.*

Grundsätzliche Bedeutung hat eine Erweiterung der ursprünglichen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ durch eine gewisse *„Spiegelung“*. Unter den linearen Substitutionen „zweiter Art“ (Kreisverwandtschaften mit Umlegung der Winkel), die wir S. 73ff. allgemein betrachteten, wurden insbesondere die „Spiegelungen“ oder „Inversionen“ an Kreisen ausführlich untersucht. Die einzelne solche Spiegelung stellten wir damals in der Gestalt (5) S. 76 dar, ihr „Inversions- oder Symmetriekreis“ ist durch (6) S. 76 gegeben. Jeder Punkt dieses Kreises bleibt bei der Spiegelung fest;

im übrigen tauscht dieselbe das Äußere des Symmetriekreises mit dem Innern aus, und zwar nach dem S. 74 besprochenen Gesetze der „Transformation durch reziproke Radien". Ist der Symmetriekreis insbesondere eine Gerade, so wird die Substitution eine „Spiegelung" an dieser Geraden im elementaren Sinne.

Eine Spiegelung dieser letzteren Art, nämlich diejenige an der imaginären ω-Achse, möge nun eingeführt werden. Ist $\bar{\omega}$ der zu $\omega = \xi + i\eta$ konjugiert komplexe Wert $\bar{\omega} = \xi - i\eta$, so ist jene Spiegelung durch die Substitution zweiter Art $\omega' = -\bar{\omega}$ gegeben; wir wollen sie durch das Symbol $\bar{V}_0$ bezeichnen:

(5) $$\omega' = \bar{V}_0(\omega) = -\bar{\omega}.$$

Transformieren wir nach den S. 128 allgemein besprochenen Grundsätzen die Substitution $V = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ der $\Gamma^{(\omega)}$ mittelst der Substitution zweiter Art $\bar{V}_0$, so gewinnen wir mit Rücksicht auf die Realität der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus V die Substitution:

$$V' = \bar{V}_0 V \bar{V}_0^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha, & -\beta\\ -\gamma, & \delta\end{pmatrix},$$

welche offenbar wieder in der $\Gamma^{(\omega)}$ enthalten ist. *Es ist durch das Entsprechen von V und V' eine umkehrbar eindeutige Beziehung der $\Gamma^{(\omega)}$ auf sich selbst gegeben oder, mit anderen Worten, die Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ wird durch die Substitution $\bar{V}_0$ in sich selbst transformiert* (vgl. S. 129):

(6) $$\bar{V}_0 \Gamma^{(\omega)} \bar{V}_0^{-1} = \Gamma^{(\omega)}.$$

Man bilde nun das durch $\Gamma^{(\omega)} \bar{V}_0$ zu bezeichnende System aller Substitutionen zweiter Art:

(7) $$\omega' = \bar{V}(\omega) = V\bar{V}_0(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \delta}$$

für alle Substitutionen V von $\Gamma^{(\omega)}$. Bezeichnen wir wie soeben $\bar{V}_0 V_k \bar{V}_0^{-1}$ mit V_k', so gilt für die Kombination irgendwelcher Substitutionen $V, \bar{V}$ mit Rücksicht auf die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes (vgl. S. 127), das auch bei Substitutionen zweiter Art bestehen bleibt:

$$(V_1\bar{V}_0)\cdot(V_2\bar{V}_0) = V_1\cdot(\bar{V}_0 V_2 \bar{V}_0^{-1}) = V_1 V_2',$$
$$V_1\cdot(V_2\bar{V}_0) = (V_1 V_2)\bar{V}_0, \quad (V_1\bar{V}_0)\cdot V_2 = V_1\cdot(\bar{V}_0 V_2) = (V_1 V_2')\bar{V}_0.$$

Es folgt: *Die gesamten Substitutionen erster und zweiter Art V und $\bar{V}$ bilden wieder eine Gruppe, die wir als die durch die Spiegelung $\bar{V}_0$ erweiterte Modulgruppe oder kurz als die „Modulgruppe zweiter Art" benennen und durch:*

$$\bar{\Gamma}^{(\omega)} = \Gamma^{(\omega)} + \Gamma^{(\omega)}\bar{V}_0$$

bezeichnen; dabei gilt die Regel, daß zwei Substitutionen gleicher Art

kombiniert immer eine Substitution „erster“ Art liefern, zwei solche ungleicher Art aber eine Substitution zweiter Art.

Unter den Substitutionen zweiter Art der erweiterten $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ wollen wir noch alle diejenigen aufsuchen, welche die Periode 2 haben. Aus (7) ergibt sich:

$$\overline{V}^2(\omega) = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\,\omega - \beta\,(\alpha - \delta)}{\gamma\,(\alpha - \delta)\,\omega + (\delta^2 - \beta\gamma)}.$$

Soll hier die identische Substitution $V_0 = 1$ vorliegen, so muß:

$$\alpha^2 - \beta\gamma = \delta^2 - \beta\gamma = \pm 1, \quad \beta\,(\alpha - \delta) = 0, \quad \gamma(\alpha - \delta) = 0$$

zutreffen. Zufolge der zweiten Gleichung (1) sind diese Forderungen für $\alpha = \delta$ sämtlich erfüllt, und zwar die erste mit dem oberen Zeichen. Wäre auch $\alpha - \delta \lessgtr 0$ zulässig, so müßte $\beta = \gamma = 0$ sein, worauf die zweite Gleichung (1) in der Gestalt $\alpha\delta = 1$ nur die beiden Lösungen $\alpha = \delta = \pm 1$ zuläßt, die zu $\alpha = \delta$ zurückführen. *Die in der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ enthaltenen Substitutionen zweiter Art der Periode 2 sind diejenigen von der Gestalt:*

$$(8) \qquad \omega' = \frac{\alpha\overline{\omega} - \beta}{\gamma\overline{\omega} - \alpha}, \quad \alpha^2 - \beta\gamma = 1;$$

sie erweisen sich sämtlich als Spiegelungen, und zwar hat man für $\gamma = 0$, d. h. für $\omega' = -\overline{\omega} + \beta$, die Symmetriegerade $2\xi = \beta$ und für $|\gamma| > 0$ den Symmetriekreis der Gleichung:

$$\gamma\,(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha\xi + \beta = 0,$$

die man mit Hilfe der zweiten Gleichung (8) auch so umgestalten kann:

$$(9) \qquad \left(\xi - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2.$$

Es handelt sich also hier um den Kreis des Radius $|\gamma|^{-1}$ mit dem reellen rationalen Punkte $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ als Mittelpunkte.

§ 2. Das Dreiecksnetz der ω-Halbene und der Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe.

Da die Spiegelung $\overline{V}_0$ die einzelne der beiden ω-Halbebenen in sich überführt, so wird überhaupt jede Substitution der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ die positive ω-Halbebene und ebenso die negative wieder in sich transformieren. Geht ein Punkt ω durch irgendeine Substitution der $\Gamma^{(\omega)}$ in ω' über, so wird durch ebendiese Substitution der zu ω bezüglich der reellen Achse symmetrische Punkt $\overline{\omega}$ in den zu ω' symmetrischen $\overline{\omega}'$ übergeführt. Die Betrachtungen, welche sich auf die Herstellung eines „Diskontinuitätsbereiches“ der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ beziehen (vgl. S. 233), gestalten

sich demnach in beiden Halbebenen symmetrisch, und es wird also ausreichend sein, wenn wir die Untersuchung für die positive ω-Halbebene durchführen.

Allgemein gilt zunächst folgende Erklärung: *Zwei Punkte ω, von denen der eine in den anderen durch eine Substitution von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ übergeht, heißen bezüglich der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ „äquivalent"; gehört diese Substitution der ersten Art an, so sind beide Punkte auch bereits bezüglich der ursprünglichen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalent.* Die reellen Punkte ω, unter ihnen auch der Punkt ∞, bilden die Randpunkte der positiven ω-Halbebene. Wir versuchen zunächst für die Innenpunkte der Halbebene einen *Diskontinuitätsbereich der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$* zu gewinnen und verstehen darunter *einen aus Innenpunkten bestehenden Bereich, der für jeden inneren Punkt der ω-Halbebene einen und nur einen bezüglich der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ äquivalenten Punkt aufweist* (vgl. S. 233).

Zu diesem Ziele führt uns nun äußerst leicht das System aller Symmetriekreise der in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ enthaltenen Spiegelungen (8) S. 285. Wir schicken hierbei folgende Betrachtung voraus. Ist $\overline{V}_k$ irgendeine der Spiegelungen und bedeutet V für den Augenblick irgendeine Substitution erster oder zweiter Art von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, so ist die durch Transformation mittelst V aus $\overline{V}_k$ hervorgehende Substitution:

$$V\overline{V}_k V^{-1} = \overline{V}_k'$$

erstlich in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ enthalten und hat zweitens die Periode 2, d. h. sie ist wieder eine Spiegelung. Jeder Punkt desjenigen Kreises, in welchen der Symmetriekreis von $\overline{V}_k$ durch V übergeführt wird, erweist sich als Fixpunkt von $\overline{V}_k'$; dieser Kreis ist also der Symmetriekreis von $\overline{V}_k'$. Jeder Symmetriekreis der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ wird demnach vermittelst irgendeiner Substitution dieser Gruppe wieder in einen Symmetriekreis übergeführt. Bei dieser Transformation durch V erhalten wir natürlich auch wieder alle Symmetriekreise. Um nämlich irgendeinen beliebig vorgeschriebenen zu gewinnen, haben wir ja nur von dessen Spiegelung $\overline{V}_l$ zur Spiegelung $V^{-1}\overline{V}_l V$ zu gehen, deren Symmetriekreis dann eben durch V in denjenigen von $\overline{V}_l$ übergeht: *Das System aller Symmetriekreise der in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ enthaltenen Spiegelungen wird durch jede Substitution der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ in sich transformiert.*

Um uns ein Bild von diesem Kreissystem zu schaffen, zeichnen wir in der ω-Halbebene zunächst alle unter diesen Kreisen enthaltenen Symmetriegeraden $2\xi = \beta$, wo β alle ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ zu durchlaufen hat. Alle übrigen Spiegelungen haben $|\gamma| > 0$, und wir dürfen, da die Koeffizienten der einzelnen Substitution noch einem ge-

meinsamen Zeichenwechsel unterworfen werden können, γ als positive ganze Zahl wählen. Ist $\gamma = 1$, so ist α als ganze Zahl willkürlich wählbar, während $\beta = \alpha^2 - 1$ gilt; wir erhalten also alle Kreise des Radius 1 um die ganzzahligen Punkte $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Ist $\gamma = 2$, so ist, damit β ganzzahlig ausfällt, α auf die ungeraden ganzen Zahlen einzuschränken; es schließen sich also die Kreise der Radien $\frac{1}{2}$ um die Punkte $\omega = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \cdots$ an.

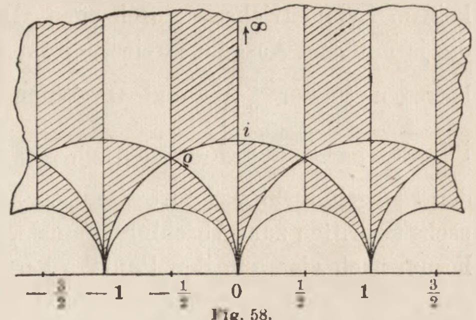


Fig. 58.

Bis hierher ist das Kreissystem, soweit es der positiven Halbebene angehört, in Fig. 58 entworfen, die man sich nach rechts und links hin entsprechend fortgesetzt zu denken hat. Wir erblicken, daß diese Kreise ein System von *Kreisbogendreiecken* eingrenzen, und finden unter denselben insbesondere jenes Elementardreieck der Ecken $\omega = i$, $\omega = \varrho$ und $\omega = i\infty$ und der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$, welches mit dem ihm rechts benachbarten Dreiecke den im vorigen Kapitel oft genannten Bereich der „reduzierten“ Periodenquotienten ω lieferte. Wir wollen jenes Dreieck der Ecken $i, \varrho, i\infty$ (mit Rücksicht auf einen sogleich einzuleitenden Spiegelungsprozeß) als „Ausgangsdreieck“ bezeichnen und stellen sogleich den Satz fest: *Kein Symmetriekreis einer Spiegelung von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ kann in das Innere des Ausgangsdreiecks eindringen.* Dies ist für die in Fig. 58 gezeichneten Kreise unmittelbar ersichtlich; alle übrigen aber haben Radien $\leqq \frac{1}{3}$, und da ihre Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen, so können sie eben das Ausgangsdreieck nicht erreichen.

Man mache sich nun mit Hilfe der Fig. 58 deutlich, daß das mit einer Schraffierung versehene Ausgangsdreieck durch die Spiegelungen an seinen drei Seiten gerade genau in die drei benachbarten freien Dreiecke übergeführt wird. Es ist ja auch schon wegen der Invarianz des Systems aller Symmetriekreise gegenüber den Substitutionen von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ einleuchtend, daß die Seiten des Ausgangsdreiecks durch jene Spiegelungen wieder in Symmetriekreise der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ übergehen. Zugleich folgt auch aus diesem Prinzipe, daß keines der drei neuen Dreiecke von irgendeinem weiteren Symmetriekreise durchzogen werden kann; es würde ja andernfalls, wenn wir die Spiegelung rückgängig machen, auch ein in das Ausgangsdreieck eindringender Symmetriekreis gefunden werden.

Nun geht offenbar auch jedes der neuen Dreiecke, z. B. dasjenige

mit den Ecken i, ϱ und 0, durch die Spiegelungen an seinen drei Seiten in drei benachbarte, in der Figur schraffierte, Dreiecke über (von denen eins natürlich das Ausgangsdreieck ist); und es sind auch die Seiten dieser Dreiecke Symmetriekreise der $\Gamma^{(\omega)}$, und ihr Inneres wird von keinem Symmetriekreis durchzogen. Die Winkel aller neuen Dreiecke, die ja mit dem Ausgangsdreieck direkt oder indirekt kreisverwandt sind, betragen immer $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ und 0. Wenn wir demnach zunächst um die Punkte $\omega = i$ und $\omega = \varrho$ herum, wo die Winkel $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{3}$ vorliegen, den Spiegelungsprozeß fortsetzen, so muß derselbe hier nach vier bzw. sechs Schritten zum Abschluß kommen, d. h. wir gelangen um den Punkt i herum nach vier, um den Punkt ϱ herum nach sechs Spiegelungen zum Ausgangsdreieck zurück.

Setzen wir nun den hiermit eingeleiteten Spiegelungsprozeß weiter fort, so bleiben die vorstehenden Angaben in allen wesentlichen Punkten erhalten. Jedes auf diese Weise erreichbare Kreisbogendreieck ist von Symmetriekreisen der $\Gamma^{(\omega)}$ begrenzt, und kein Symmetriekreis kann durch sein Inneres dringen. Das Dreieck hat, wie das Ausgangsdreieck, die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$; der Scheitelpunkt des letzteren Winkels ist ein rationaler reeller Punkt ω (alle Symmetriekreise (9) S. 285 schneiden die reelle ω-Achse in rationalen Punkten), und das Dreieck liegt im übrigen ganz innerhalb der positiven ω-Halbebene.

Um das Ergebnis des fortgesetzten Spiegelungsprozesses der Anschauung zugänglich zu machen, bemerken wir zunächst, daß das ganze System der Symmetriekreise durch die Translation $\omega' = \omega + 1$ in sich übergeführt wird. Haben wir demnach die aus dem System der Symmetriekreise entstehende Figur in dem durch $-1 \leqq \xi \leqq 0$ bestimmten Parallelstreifen der ω-Halbebene gewonnen, so brauchen wir sie in den übrigen sich rechts und links anschließenden Parallelstreifen der Breite 1 nur kongruent zu wiederholen. Weiter beachte man, daß die sechs, um den Punkt $\omega = \varrho$ herumliegenden Kreisbogendreiecke der Fig. 58 ein größeres von „Halbkreisen" eingegrenztes Dreieck der Winkel 0 und der Ecken bei $\omega = 0, -1$ und $i\infty$ zusammensetzen. Dieses größere Dreieck kann auf drei Arten in sich selbst gespiegelt werden, und die drei Symmetriekreise dieser Spiegelungen sind einfach die drei durch $\omega = \varrho$ ziehenden Symmetriekreise der Fig. 58, welche die Unterteilung des Dreiecks in die sechs kleineren Dreiecke liefern. Man überzeuge sich an der Hand der Fig. 59, daß überhaupt jedes von drei

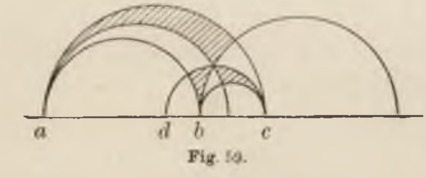


Fig. 59.

Halbkreisen begrenzte Dreieck mit Winkeln 0 und Ecken auf der reellen ω-Achse immer drei und nur drei Spiegelungen in sich zuläßt und durch Eintragen der drei Symmetriekreise in sechs kleinere Dreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$ eingeteilt wird. Der einzelne dieser drei Symmetriekreise läuft durch eine Ecke des gegebenen Dreiecks und schneidet die Gegenseite unter rechtem Winkel. Wir wollen diese drei Symmetriekreise, insoweit sie dem Dreieck angehören, als dessen „Höhe" bezeichnen; ihre Fußpunkte nennen wir die Seitenmitten, ihren gemeinsamen Schnittpunkt den Mittelpunkt des Dreiecks. Spiegeln wir übrigens das Dreieck an einer seiner Seiten, z. B. an der in Fig. 59 mit $a\,b$ bezeichneten, so erhält das benachbarte Dreieck als dritte Ecken den in der Figur mit d bezeichneten Punkt; für die beiden längs $a\,b$ benachbarten Dreiecke liefert also der Symmetriekreis $c\,d$ die beiden zur gemeinsamen Seite $a\,b$ gehörenden „Höhen".

Auf Grund dieser Ergebnisse wollen wir nun den Spiegelungsprozeß unmittelbar an das von drei „Halbkreisen" begrenzte Dreieck der Winkel 0 und der Ecken $0, -1, i\infty$ anknüpfen und stellen aus ihm zunächst durch Spiegelung am unteren Halbkreise das in Fig. 60 schraffierte Dreieck der Ecken $0, -\frac{1}{2}, -1$ her. Reihen wir dasselbe dem oberen Dreieck an, so bleiben vom in Rede stehenden Parallelstreifen der positiven ω-Halbebene zunächst unten noch zwei Halbkreisflächen offen. In diesen finden erstlich zwei Spiegelbilder des eben gewonnenen schraffierten Dreiecks längs seiner unteren beiden Seiten Platz. In den dann noch unbedeckt bleibenden vier Halbkreisflächen zwischen dem bisher gewonnenen Netze der Dreiecke und der reellen ω-Achse finden vier weitere in Fig. 60 auch noch gezeichnete und schraffierte Dreiecke Platz, sofern wir an allen vier eben noch offenen Kreisen zugleich je ein neues Dreieck durch Spiegelung erzeugen. Die Anzahl der noch offenen Halbkreisflächen an der reellen Achse ist aber auf 8 gestiegen. *Nach n solchen Schritten haben wir, das ursprüngliche Dreieck mitgezählt, im ganzen 2^n Dreiecke erhalten, welche unseren Streifen der positiven ω-Halbebene schlicht und ohne Lücke bis auf 2^n der reellen ω-Achse anliegende noch unbedeckt bleibende Halbkreisflächen überdecken.*

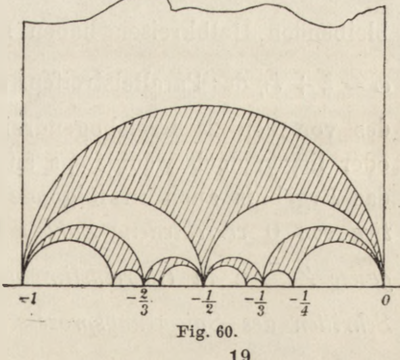


Fig. 60.

Einen Halbkreis, der in den beiden reellen Punkten $\omega = a$ und $\omega = b$ auf der reellen Achse senkrecht aufsteht, wollen wir mit (a, b) bezeichnen. Unter den acht nach *drei* Schritten des Spiege-

lungsprozesses an der reellen Achse noch unbedeckt bleibenden Halbkreisen liegt der Halbkreis $(-\frac{1}{4}, 0)$ am rechten Endpunkte 0 des Parallelstreifens. Nach dem Gesetze der Transformation durch reziproke Radien zeigt man sofort, daß nach *vier* Schritten der Halbkreis $(-\frac{1}{5}, 0)$ und allgemein nach n Schritten der Halbkreis $\left(-\frac{1}{n+1}, 0\right)$ am rechten Ende die Kette der 2^n noch offen bleibenden Halbkreise abschließt. Es gilt der Satz, *daß dieser Halbkreis (mit seinem am linken Ende symmetrischen Halbkreise* $\left(-1, -\frac{n}{n+1}\right)$*) der größte unter den 2^n Halbkreisen ist.* Dies kann man in folgender Weise zeigen: Zunächst sind je zwei bezüglich des Mittelpunktes $\omega = -\frac{1}{2}$ symmetrisch liegende unter den 2^n Halbkreisen einander gleich, da der eine das Spiegelbild des andern bezüglich der „Geraden" $(-\frac{1}{2}, i\infty)$ ist. Die 2^{n-1} Halbkreise zwischen $\omega = -\frac{1}{2}$ und $\omega = 0$ werden nun durch den Punkt $\omega = -\frac{1}{3}$ in zwei Reihen zu je 2^{n-2} Halbkreisen zerlegt, von denen die links liegende Reihe, d. h. die zwischen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$, durch die Spiegelung am Halbkreise $(-1, -\frac{1}{3})$ (gemeinsame „Höhe" zweier Dreiecke der Figur 60) in die rechts liegende übergeht. Jeder Halbkreis wird hierbei aus dem Innern des Symmetriekreises $(-1, -\frac{1}{3})$ nach dem Äußeren geworfen und also aus einem kleineren in einen größeren transformiert. Der größte Kreis gehört also der Kette zwischen $-\frac{1}{3}$ und 0 an. Diese wird nun wieder durch den Punkt $-\frac{1}{4}$ in zwei Ketten zu je 2^{n-3} Halbkreisen zerlegt, von denen die links liegende Kette in die rechts liegende durch Spiegelung am Symmetriekreise $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ übergeht; dieser letzteren Kette gehört also wieder der größte Kreis an. In derselben Art schließt man weiter, bis endlich nur noch die beiden Kreise $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right)$ und $\left(-\frac{1}{n+1}, 0\right)$ vorliegen, deren erster durch Spiegelung am Kreise $\left(-\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n+1}\right)$ in den größeren zweiten übergeht. Unsere Behauptung ist damit bestätigt.

Die beiden größten unter den 2^n an der reellen Achse noch frei bleibenden Halbkreisen haben somit die Radien $\frac{1}{2n+2}$. Alle Punkte $\omega = \xi + i\eta$ des Parallelstreifens mit $\eta \geqq \frac{1}{2n+2}$ sind sonach in das Innere des von den 2^n Kreisbogendreiecken gebildeten Netzes hineingezogen oder liegen doch wenigstens auf dem Rande dieses Netzes. Man kann das Ergebnis auch in folgende Gestalt kleiden: *Wählt man eine positive von 0 verschiedene Zahl ε beliebig klein und bestimmt sodann eine ganze Zahl n in Übereinstimmung mit $n \geqq -1 + \frac{1}{2\varepsilon}$, so wird nach n Schritten des Spiegelungsprozesses ein Netz von 2^n Dreiecken gewonnen*

sein, dem jedenfalls alle Punkte $\omega = \xi + i\eta$ *des Parallelstreifen mit* $\eta \geqq \varepsilon$ *angehören.*

Man wolle nun jedes der 2^n Dreiecke durch seine drei „Höhen" in die sechs Teildreiecke zerlegen, was einfach dadurch geschehen kann, daß man für je zwei benachbarte Dreiecke, die also eine Seite und zwei Ecken gemein haben, den die beiden dritten Ecken verbindenden zur reellen ω-Achse orthogonalen Halbkreis zeichnet. Überdies soll in allen Parallelstreifen der ω-Halbebene in kongruenter Weise der Spiegelungs-

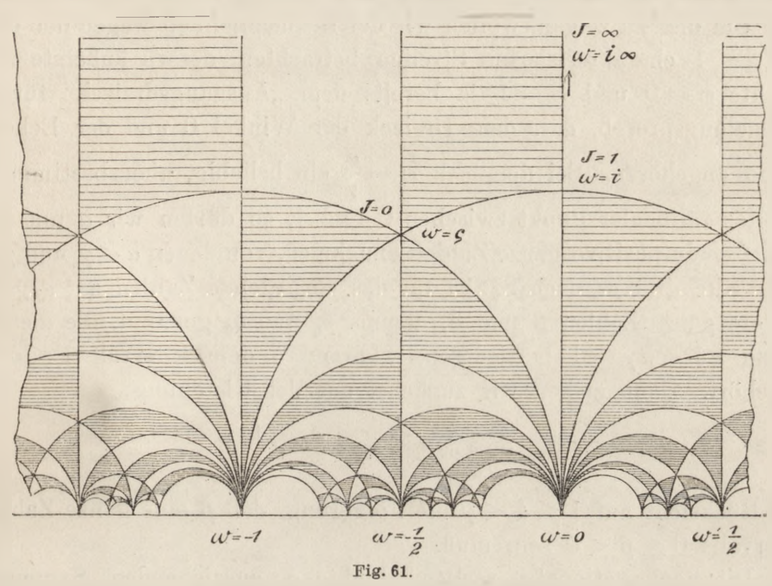


Fig. 61.

prozeß und die Unterteilung der Dreiecke vollzogen werden. *Jeder Streifen wird dann nach n Schritten des Prozesses* $3 \cdot 2^{n+1}$ *Dreiecke der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$ *tragen, und diese Dreiecke ordnen sich überall schlicht und ohne Lücke in der* ω*-Halbebene aneinander derart, daß nach dem* n^{ten} *Schritte im einzelnen Parallelstreifen an der reellen Achse anliegend noch eine Kette von* 2^n *Halbkreisflächen, deren Radien* $\leqq \frac{1}{2n+2}$ *sind, unbedeckt bleibt.* Fig. 61 möge eine Anschauung von der Natur des entstehenden Dreiecksnetzes vermitteln; die Eintragungen $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$ beziehen sich auf die Modulfunktion $J(\omega)$, auf welche wir bald zurückkommen. Ist aber irgendein bestimmter Innenpunkt der ω-Halbebene $\omega = \xi + i\eta$ fixiert, so ist man nach den vorstehenden Ergebnissen sicher, daß man nach $n \geqq -1 + \frac{1}{2\eta}$ Schritten des Spiegelungsprozesses das Dreiecksnetz so weit entwickelt hat, daß der gewählte Punkt ω dem Netze angehört.

Der Spiegelungsprozeß ist nicht abschließbar. Bei jedem Schritte wird die Anzahl der an der reellen Achse anliegenden, noch unbedeckt bleibenden Halbkreisflächen im einzelnen Parallelstreifen auf das Doppelte erhöht; und beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Schritt gewinnt das Dreiecksnetz im Parallelstreifen 2^n neue Spitzen in rationalen reellen Punkten ω. Wir können sogar leicht zeigen, *daß jeder beliebig gewählte reelle rationale Punkt ω sicher nach einer leicht angebbaren endlichen Anzahl von Schritten vom Dreiecknetz als eine Spitze desselben erreicht wird.*

Um dies zu zeigen, wollen wir der Bequemlichkeit wegen den durch $0 \leqq \xi \leqq 1$ charakterisierten Streifen betrachten, dessen äußerste reelle Punkte $\omega = 0$ und $\omega = 1$ ja bereits dem „Ausgangsdreieck" für den Spiegelungsprozeß, d. i. dem Dreieck der Winkel 0 und der Ecken 0, $1, i\infty$ angehören. Sei demnach $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ ein beliebig, aber bestimmt gewählter rationaler Punkt zwischen 0 und 1, so dürfen wir α und γ als teilerfremde positive ganze Zahlen annehmen, von denen $\alpha < \gamma$ und $\gamma > 1$ gilt. Nun gibt es nach S. 281 für das vorliegende Zahlenpaar α, γ zwei weitere ganze Zahlen β und δ, damals β_0 und δ_0 genannt, die die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ befriedigen, während δ dem Intervall $1 \leqq \delta < \gamma$ angehört. Dann ziehen wir zunächst aus der Gleichung:

$$\beta = \frac{\alpha\delta - 1}{\gamma} = \alpha\frac{\delta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}$$

mit Rücksicht auf $1 \leqq \delta < \gamma$ die Folgerung, daß β eine ganze Zahl des Intervalls $0 \leqq \beta < \alpha$ sein muß.

Die vom „rationalen reellen" Punkte ∞ ausziehenden „Symmetriekreise" zerfallen nun in zwei Arten (vgl. Fig. 61). Ein solcher der einen Art besteht aus zwei Seiten von Dreiecken des Netzes der Fig. 61 und hat zur Gleichung $\xi = \nu$, unter ν irgendeine ganze Zahl verstanden; eine solcher der anderen Art besteht aus vier Dreiecksseiten und hat die Gleichung $2\xi = 2\nu + 1$. Letztere sind im Dreiecksnetze der Fig. 60, auf welches wir den Spiegelungsprozeß ja zunächst bezogen, „Dreieckshöhen", erstere aber Dreiecksseiten. Transformieren wir nun die „Symmetriekreise" $\xi = \nu$ mittelst der Substitution:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

so erhalten wir eine einfach unendliche Schar von Symmetriehalbkreisen:

$$(1) \qquad \left(\frac{\alpha}{\gamma}, \ \frac{\beta + \nu\alpha}{\delta + \nu\gamma}\right), \quad (\nu = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots),$$

welche sämtlich vom vorgelegten rationalen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ ausziehen und die an diesen Punkt heranreichenden Dreiecke der Winkel 0 eingrenzen.

Man betrachte nun die beiden zu $\nu = 0$ und $\nu = -1$ gehörenden benachbarten Halbkreise (1). Aus:

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta} = \frac{1}{\gamma\delta}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} = -\frac{1}{\gamma(\gamma-\delta)}$$

folgt mit Rücksicht auf $0 < \delta < \gamma$, daß der erste Halbkreis links und der zweite rechts vom rationalen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ liegt. Sie grenzen somit das erste unter den Dreiecken mit der Spitze $\frac{\alpha}{\gamma}$ ein, welches man beim Spiegelungsprozeß erreicht. Die dritte Seite dieses Dreiecks ist der Halbkreis $\left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}\right)$, dessen Radius:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} - \frac{\beta}{\delta}\right) = \frac{1}{2\delta(\gamma-\delta)} \geq \frac{2}{\gamma^2}$$

ist; hierbei gilt das Gleichheitszeichen nur für $\gamma = 2\delta$, mithin nur für $\gamma = 2$, da γ und δ relativ prim sind. Schließen wir den Fall $\gamma = 2$ zunächst aus, so gibt es im fraglichen Dreieck Punkte $\omega = \xi + i\eta$ mit $\eta > 2\gamma^{-2}$. Ein solcher Punkt liegt aber im *Innern* des durch n Spiegelungen erreichten Dreiecksnetzes, d. h. unser in Rede stehendes Dreieck gehört zu den 2^n Dreiecken, welche wir nach n Schritten des Prozesses erhalten, sobald nur:

$$\frac{1}{2n+2} \leq \frac{2}{\gamma^2}, \quad n \geq \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 1$$

gilt. Verstehen wir unter $E(a)$ die größte ganze Zahl, welche nicht größer als die reelle Zahl a ist, so genügen wir dieser Bedingung, wenn wir $n = E\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)$ setzen. Das Ergebnis, das wir sogleich auch auf alle übrigen Parallelstreifen mit beziehen, gilt dann auch für $\gamma = 2$ und $\gamma = 1$: *Ist $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ ein beliebiger, auf seine kleinste Benennung gebrachter rationaler Bruch, so wird der reelle rationale Punkt $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ spätestens nach $E\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)$ Schritten des Spiegelungsprozesses als Spitze des bis dahin erzeugten Dreiecksnetzes erreicht.*

Wir kehren zum Dreiecksnetze der Fig. 61 zurück und weisen nochmals darauf hin, daß die „Symmetriegeraden" desselben teils aus zwei, teils aus vier Dreiecksseiten aufgebaut erscheinen. Beschreiben wir irgendeine andere gegen die reelle ω-Achse senkrechte Gerade G etwa von einem Punkte $\omega = \xi + i\eta$ mit $\eta > 1$ aus, so haben wir zu unterscheiden, ob der Fußpunkt von G ein rationaler Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ oder irrational ist. G durchläuft im obersten Dreieck der Winkel 0 (vgl. Fig. 61) drei der kleineren Teildreiecke, im nächsten zwei oder drei, in allen folgenden zwei, drei oder vier Teildreiecke (s. auch Fig. 59). Wir erkennen sofort:

Hat die gegen die reelle Achse senkrecht verlaufende Gerade G einen rationalen Fußpunkt $\frac{\alpha}{\gamma}$, *so ist die Anzahl der von ihr durchschrittenen Dreiecke des Netzes der Fig. 61 notwendig kleiner als* $\left(3 + 4\,E\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)\right)$, *und sie erreicht in der Spitze* $\frac{\alpha}{\gamma}$ *des letzten Dreiecks die reelle Achse.* Ist umgekehrt die Anzahl der von G durchlaufenen Dreiecke endlich, so gibt es unter ihnen ein letztes, in dessen Spitze somit G die reelle Achse erreichen muß. Eine solche Spitze ist aber immer ein rationaler Punkt ω; also folgt: *Hat die gegen die reelle* ω*-Achse senkrecht verlaufende Gerade einen irrationalen Fußpunkt, so ist die Anzahl der von G durchlaufenen Dreiecke nicht endlich.* Wir kommen hierauf unten noch etwas ausführlicher zurück.

Nachdem nunmehr die Natur des Dreiecksnetzes der Fig. 61 ausführlich behandelt ist, können wir die Frage nach dem Diskontinuitätsbereiche zunächst der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ sofort beantworten. Ist irgendein bestimmter innerer Punkt $\omega = \xi + i\eta$ der Halbebene gewählt, *so können wir ihn durch Umkehrung des Spiegelungsprozesses in einen bezüglich* $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ *äquivalenten Punkt des Ausgangsdreiecks der Ecken* $\omega = i, \varrho, i\infty$ *transformieren;* auch ist es nicht schwer, für die Anzahl der hierzu erforderlichen Spiegelungen aus ξ und η eine endliche obere Schranke zu berechnen. Das Ausgangsdreieck weist demnach sicher einen mit $\omega = \xi + i\eta$ äquivalenten Punkt auf.

Andrerseits wird das Ausgangsdreieck durch irgendeine Substitution von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ in ein Dreieck des Netzes übergeführt. Soll letzteres mit dem Ausgangsdreieck wieder identisch sein, so muß die Substitution die Spitze $i\infty$ zum Fixpunkte haben und also eine der beiden Gestalten $\omega' = \omega + \beta$, $\omega' = -\bar{\omega} + \beta$ aufweisen. Da sie auch die Ecke $\omega = i$ zum Fixpunkt haben muß, so ist $\beta = 0$; und da sie endlich drittens auch $\omega = \varrho$ in sich transformieren muß, so ist $\omega' = -\bar{\omega}$ unbrauchbar. *Eine von der identischen verschiedene Substitution der Gruppe* $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ *transformiert das Ausgangsdreieck in ein von ihm verschiedenes Dreieck des Netzes.*

Ein Innenpunkt des Ausgangsdreiecks wird demnach durch eine von der identischen verschiedene Substitution der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ stets in einen Innenpunkt eines anderen Dreiecks übergeführt. Ein Randpunkt wird freilich durch die Spiegelung an der betreffenden Seite wieder in einen Punkt des Ausgangsdreiecks transformiert; aber dieser Punkt ist mit dem ersten identisch. Die Ecken i und ϱ werden auch noch durch elliptische Substitutionen (ϱ auch noch durch eine weitere Spiegelung) in Punkte des Ausgangsdreiecks, aber dabei doch wieder nur in sich

selbst transformiert: *Keine zwei verschiedenen Punkte des Ausgangsdreiecks können somit bezüglich* $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ *äquivalent sein.*

Wir wollen weiterhin auch noch die bei $\omega = \infty$ gelegene Spitze des Ausgangsdreiecks diesem als zugehörig betrachten. Dieselbe ist bezüglich $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ mit allen rationalen reellen Punkten ω äquivalent. Das Ergebnis ist dann so auszusprechen: *Für die positive ω-Halbebene unter Einschluß der reellen rationalen Randpunkte bildet das Kreisbogendreieck der Ecken i, ϱ, $i\infty$ einen Diskontinuitätsbereich der erweiterten Modulgruppe* $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$.

Zu einem Diskontinuitätsbereiche der ursprünglichen Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ führt endlich folgende Überlegung. Ist der vorhin willkürlich gewählte Punkt $\omega = \xi + i\eta$ mit einem Randpunkte ω' des Ausgangsdreiecks äquivalent, so ist ω' mit ω immer auch bereits bezüglich der $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalent. Hätten wir nämlich zunächst vom Spiegelungsprozeß eine Substitution *zweiter* Art:

$$\omega' = \overline{V}(\omega)$$

gewonnen, die ω in ω' transformiert, so wird die Spiegelung $\overline{V}_0$ an der bzw. an einer der beiden Seiten des Ausgangsdreiecks, welche ω' enthalten, sofort eine Substitution *erster* Art $\overline{V}_0\overline{V}$ liefern, welche ω in ω' transformiert:

$$\omega' = \overline{V}_0(\omega') = \overline{V}_0\overline{V}(\omega).$$

Ist hingegen ω' ein Innenpunkt des Ausgangsdreiecks, so ist die in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ enthaltene Substitution, welche ω in ω' überführt, eindeutig bestimmt. Sie ist von der ersten Art und also in $\Gamma^{(\omega)}$ enthalten, wenn auch schon ω in einem schraffierten Dreiecke des Netzes lag, die ja alle untereinander *direkt* kreisverwandt sind. Lag indessen ω in einem freien Dreieck, so ist zwar noch nicht ω', wohl aber der mit ω' bezüglich der imaginären ω-Achse symmetrisch gelegene Innenpunkt des benachbarten Dreiecks mit ω in bezug auf $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalent. Diese Sachlage führt zu dem Ergebnis: *Für die positive ω-Halbebene unter Einschluß der reellen rationalen Randpunkte wird ein Diskontinuitätsbereich der ursprünglichen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ geliefert durch dasjenige Doppeldreieck, welches aus den beiden zur imaginären Achse symmetrisch liegenden „Elementardreiecken" der Ecken i, ϱ, $i\infty$ und i, $-\varrho^2$, $i\infty$ zusammengesetzt ist; von den Randpunkten gelten indessen nur diejenigen des links liegenden schraffierten Dreiecks dem Doppeldreieck als zugehörig.* Wir sind hiermit zu dem im vorigen Kapitel oft genannten Bereiche der „reduzierten" Periodenquotienten zurückgeführt, der zum ersten Male in Fig. 43, S. 179 zur Darstellung kam.

§ 3. Die erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe.

Für die Spiegelungen an den drei Seiten des Ausgangsdreiecks der Ecken $i, \varrho, i\infty$ wollen wir die symbolischen Bezeichnungen $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}$ einführen; und zwar sei:

$$(1) \qquad \overline{S}(\omega) = \frac{1}{\overline{\omega}}, \qquad \overline{T}(\omega) = -\overline{\omega} - 1, \qquad \overline{U}(\omega) = -\overline{\omega},$$

d. h. $\overline{U}$ ist die S. 284 mit $\overline{V}_0$ bezeichnete Spiegelung an der imaginären ω-Achse, $\overline{S}$ diejenige am Einheitskreise usw. Wir wissen (vgl. S. 294 u. f.), daß das Ausgangsdreieck durch irgendeine Substitution erster oder zweiter Art V von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ in ein bestimmtes Dreieck des Netzes übergeführt wird, dem dann diese und auch nur diese Substitution V von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ eindeutig zugehört. Würde nämlich das Ausgangsdreieck auch noch durch V' in dasselbe Dreieck, wie durch V, übergeführt, so würde $V^{-1}V'$ das Ausgangsdreieck in sich transformieren und also nach S. 294 gleich der identischen Substitution 1 sein, was zu $V' = V$ hinführt.

Die umkehrbar eindeutige Beziehung der Dreiecke des Netzes auf die Substitutionen von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ gestattet, dem einzelnen Dreiecke das Symbol V seiner Substitution als „Namen" zu erteilen. Das Ausgangsdreieck erhält dabei den Namen „1", die drei ihm benachbarten Dreiecke die Namen $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}$. Ist V wieder eine beliebige Substitution erster oder zweiter Art von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, so beschreibt $\omega' = V(\omega)$ das Dreieck „V", falls ω das Ausgangsdreieck beschreibt. Tritt ω stetig etwa in das mit „1" benachbarte Dreieck $\overline{U}$ hinüber, so wandert ω' in das mit „V" homolog benachbarte Dreieck, welches somit aus dem Dreiecke $\overline{U}$ durch die Substitution V und also aus dem Dreieck 1 durch $V\overline{U}$ hervorgeht.

Analog finden wir überhaupt, daß mit einem beliebigen Dreiecke V immer die drei Dreiecke $V\overline{S}$, $V\overline{T}$, $V\overline{U}$, benachbart sind. Mit dem Dreiecke $\overline{S}$ sind demnach beispielsweise benachbart die Dreiecke $\overline{S}^2 = 1$, $\overline{S}\,\overline{T}$, $\overline{S}\,\overline{U}$, mit $\overline{S}\,\overline{T}$ die folgenden Dreiecke $\overline{S}\,\overline{T}\,\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{T}^2 = \overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{T}\,\overline{U}$. Durch Übergang zu benachbarten Dreiecken können wir aber vom Dreieck 1 aus zu jedem Dreieck hingelangen. Demnach wird sich jede Substitution von $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ in Gestalt eines „Produktes" aus Faktoren $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}$ darstellen lassen; und zwar brauchen wir zufolge der Gleichungen $\overline{S}^2 = 1$, $\overline{T}^2 = 1$, $\overline{U}^2 = 1$ hierbei nur solche „Produkte" zuzulassen, bei denen niemals zwei aufeinanderfolgende Faktoren gleich sind. Wir können das Ergebnis auch dahin aussprechen, *daß $\overline{S}$, $\overline{T}$ und $\overline{U}$ erzeugende Substitutionen der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ seien.*

Die Substitutionen der Modulgruppe *erster* Art $\Gamma^{(\omega)}$ werden von denjenigen symbolischen Produkten aus Faktoren $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}$ geliefert, die

gerade Faktorenanzahl haben. Indem wir die Faktoren zu Paaren zusammenziehen, ergibt sich, daß wir ein System von erzeugenden Substitutionen für $\Gamma^{(\omega)}$ in den drei Substitutionen:

$$S = \bar{U}\bar{T}, \qquad T = \bar{S}\bar{U}, \qquad U = \bar{T}\bar{S}$$

gewonnen haben, wenn wir mit ihnen auch ihre inversen Substitutionen:

$$S^{-1} = \bar{T}\bar{U}, \qquad T^{-1} = \bar{U}\bar{S}, \qquad U^{-1} = \bar{S}\bar{T}$$

mitgegeben denken. Übrigens ist $T^{-1} = T$, da wir in T die elliptische Substitution der Periode zwei mit dem Fixpunkte $\omega = i$ vor uns haben; weiter ist $U^{-1} = U^2$, da U die elliptische Substitution der Periode drei mit dem Fixpunkte $\omega = \varrho$ ist. Zufolge (1) haben die Substitutionen S, T und U die Gestalten:

$$S(\omega) = \omega + 1, \qquad T(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \qquad U(\omega) = \frac{\omega + 1}{-\omega}.$$

Aus $\bar{S}^2 = 1, \ldots$ folgt unter Rücksicht auf das für unsere symbolischen Produkte gültige assoziative Gesetz:

$$UTS = \bar{T}\bar{S} \cdot \bar{S}\bar{U} \cdot \bar{U}\bar{T} = 1.$$

Hiernach läßt sich U aus S und T erzeugen:

$$U^{-1} = TS, \qquad U = U^{-2} = (TS)^2,$$

und wir entnehmen aus der Periode 3 von U die zwischen S und T bestehende Beziehung $(TS)^3 = 1$. *Die ursprüngliche Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ besitzt als ein System von erzeugenden Substitutionen die beiden:*

$$S(\omega) = \omega + 1, \qquad T(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \tag{2}$$

zwischen denen die Relation besteht:

$$TSTSTS = 1; \tag{3}$$

mit S ist natürlich S^{-1} als gegeben anzusehen; zufolge (3) *kann man sogar S^{-1} in der Gestalt:*

$$S^{-1} = TSTST$$

durch S und T darstellen.

Die symbolischen Produkte aus Faktoren S und T, welche zur Darstellung der Substitutionen V von $\Gamma^{(\omega)}$ dienen[1]), brauchen zufolge der Relation $T^2 = 1$ Faktoren T immer nur in ersten Potenzen zu enthalten. Es gilt also für V eine Darstellung[2]):

$$V = S^{m_1} T S^{m_2} T S^{m_3} \cdots T S^{m_\nu},$$

wo die Exponenten m ganze Zahlen sind, von denen man $m_2, m_3, \cdots,$

1) Wir erinnern daran, daß für diese Produkte das kommutative Gesetz *nicht* gilt.

2) Diese Darstellung von V ist zufolge der Relation (3) nicht eindeutig bestimmt.

$m_{\nu-1}$ als von 0 verschieden vorauszusetzen hat. In nichtsymbolischer Gestalt läßt sich demnach die Substitution $\omega' = V(\omega)$ der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ so schreiben:

$$\omega' = m_1 - \cfrac{1}{m_2 - \cfrac{1}{m_3 - \cdots \quad - \cfrac{1}{\omega + m_\nu}}},$$

so daß der Erzeugung von V durch S und T explizite *eine Kettenbruchentwicklung der Substitution* $\omega' = V(\omega)$ entspricht.

Als „*homogene*" Substitutionen S und T wollen wir die beiden folgenden bezeichnen:

$$(4) \qquad \begin{cases} (S) & \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \\ (T) & \omega_1' = \omega_2 \qquad\quad\;\; \omega_2' = -\omega_1. \end{cases}$$

Die „zweite Potenz" T^2 dieser homogenen Substitution T ist:

$$\omega_1' = -\omega_1, \qquad \omega_2' = -\omega_2$$

und wird zweckmäßig durch das Symbol „-1" bezeichnet. Der einzelnen nichthomogenen Substitution V entsprechen immer zwei homogene, die wir folgerecht durch $+V$ und $-V = +V \cdot T^2$ zu bezeichnen haben. Es ergibt sich hieraus, *daß die homogene Modulgruppe* $\Gamma^{(\omega)}$ *durch die beiden in* (4) *gegebenen Substitutionen* S *und* T *erzeugbar ist.*

Die homogene $\Gamma^{(\omega)}$ liefert uns die gesamten „linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2" und damit auch zugleich alle Parallelogrammteilungen der u-Ebene, welche bei einer einzelnen Gruppe $\Gamma^{(u)}$ des vorigen Kapitels möglich sind (vgl. S. 183 und S. 235). Die Wirkung, welche die Substitutionen $S^{\pm 1}$ auf ein gerade vorliegendes Parallelogrammnetz ausüben, wird durch Fig. 62 veranschaulicht. Von dem durch Schraffierung hervorgehobenen Parallelogramm der Ecken 0, ω_2 $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 bleibt die Seite $(0, \omega_2)$ liegen, während die Gegenseite in ihrer Richtung entweder um die Periode $+\omega_2$ (für S^{+1}) oder um die Periode $-\omega_2$ (für S^{-1}) verschoben wird. S^m erfordert dann einfach die $|m|$-malige Ausführung dieser Gestaltsänderung in der einen oder anderen Richtung.

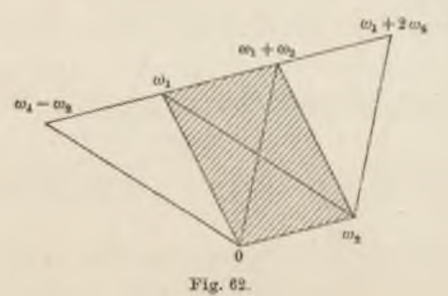


Fig. 62.

Bei Ausübung von T bleibt das Parallelogrammnetz unverändert, und es werden nur die Perioden anders bezeichnet. Übt man aber demnächst wieder S oder eine Potenz von S aus, so läuft dies einfach darauf hinaus, daß nun die vorhin um den Punkt $u = 0$ gedrehte Parallelogrammseite (s. Fig. 62) unverändert bleibt, während die ihr gegenüber-

liegende Seite in ihrer Richtung eine entsprechende Verschiebung um ein Periodenmultiplum erfährt. Es geht hieraus hervor, *daß wir z. B. vom Parallelogramm der reduzierten Perioden zu jedem anderen Parallelogramm der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ gelangen können, indem wir abwechselnd immer eine der beiden von $u = 0$ ausziehenden Parallelogrammseiten festhalten und die Gegenseite in ihrer Richtung um ein Periodenmultiplum verschieben, wobei jeweils die dritte und vierte Seite eine entsprechende Drehung um die Endpunkte der fest liegenden Seite erfahren.*

§. 4. Die elliptischen Modulfunktionen erster Stufe.

Die über die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ gewonnenen Resultate gestatten uns, die Natur der Modulfunktion $J(\omega)$ genauer zu beschreiben und allgemein den Begriff einer „elliptischen Modulfunktion erster Stufe" aufzustellen. Wir rekapitulieren zunächst die Eigenschaften von $J(\omega)$, die bereits oben S. 273 ff. aufgefunden wurden.

Die Funktion $J(\omega)$ ist in jedem bestimmten, im Innern der ω-Halbebene gelegenen Bereiche eine eindeutige, daselbst überall analytische Funktion, welche die Eigenschaft hat, gegenüber jeder Substitution der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ invariant zu sein [vgl. (6) S. 262]:

(1) $$J\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = J(\omega).$$

Da sie hiernach insbesondere gegenüber der Substitution S invariant ist, so ist sie bereits in jedem bestimmten Bereiche im Innern des Einheitskreises der q^2-Ebene, wenn dieser Bereich nur den Nullpunkt dieser Ebene nicht enthält, eindeutig und überall analytisch.

Die Entwicklungsgröße:

(2) $$q^2 = e^{2\pi i\omega}$$

ist selbst gegenüber S invariant und bildet einen einzelnen Parallelstreifen der Dreiecksteilung der ω-Halbebene auf die Fläche des Einheitskreises der q^2-Ebene ab. Von der Art dieser Abbildung möge Fig. 63 eine Anschauung vermitteln. Die Spitze $i\infty$ des Streifens findet ihr Bild im Nullpunkte $q^2 = 0$, wobei die außerordentliche Kleinheit des Abbildes vom Doppeldreieck „1" der ω-Halbebene beachtenswert ist[1]). Die übrigen Dreiecke ragen mit Spitzen an die „rationalen" Punkte[2]) des Einheitskreises der q^2-Ebene heran, und es gilt für die Art, wie die

1) Dieser Umstand ist für numerische Berechnungen höchst wichtig, insofern Potenzreihen nach $q^2 = e^{2\pi i\omega}$, falls man ω auf das Doppeldreieck 1 beschränkt, wegen der rapiden Abnahme der Beträge $|q^2|, |q^4|, \ldots$ gut konvergieren.

2) Gemeint sind damit die Punkte des Einheitskreises, deren Amplituden zu π in einem rationalen Verhältnis stehen.

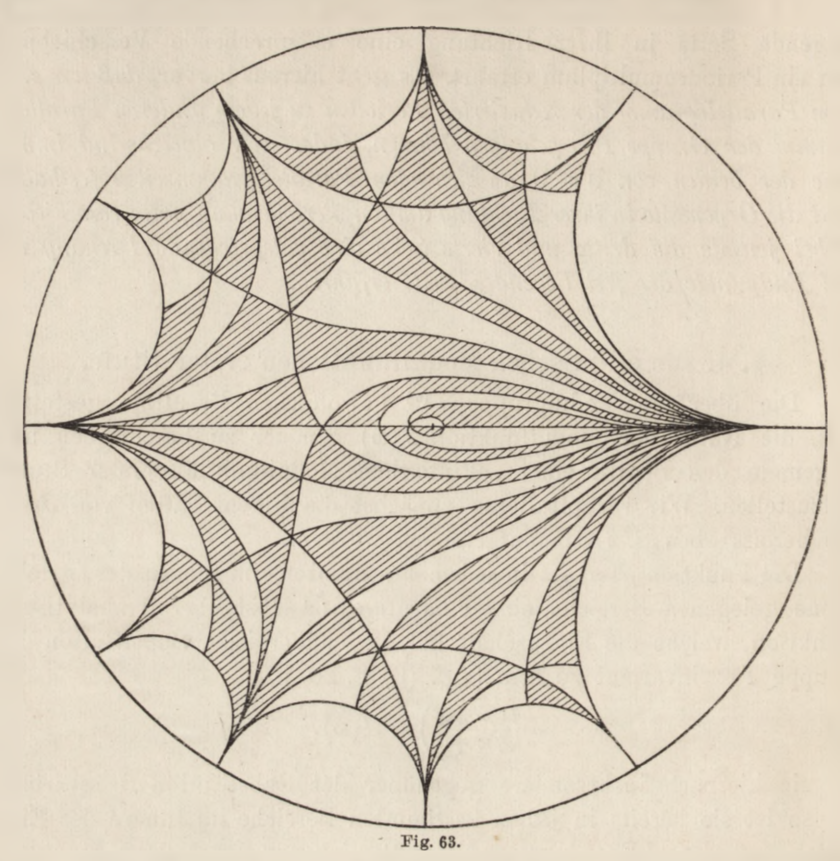


Fig. 63.

Radien des Einheitskreises das neue Dreiecksnetz durchschreiten, die leicht erkennbare Übertragung der Sätze von S. 293 ff. Die für $|q| < 1$ konvergente Reihendarstellung:

$$12^3 \cdot J = \frac{1}{q^2} + 744 + 196884 q^2 + \cdots \tag{3}$$

zeigte überdies, daß J in den Nullpunkt der q^2-Ebene und damit in die Spitze des Doppeldreiecks 1 der ω-Halbebene fortsetzbar ist und daselbst den Wert ∞ annimmt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft war die, daß $J(\omega)$ im Diskontinuitätsbereiche der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$, der ja mit dem Doppeldreieck der Fig. 56, S. 273, identisch ist, jeden komplexen Wert einmal und nur einmal annimmt. Durch $J(\omega)$ wurde jenes Doppeldreieck auf die schlichte und vollständige J-Ebene abgebildet. Dabei übertrugen sich die drei zu den Spiegelungen $\overline{T}, \overline{S}, \overline{U}$ gehörenden Seiten des Elementardreiecks auf die reelle J-Achse, und zwar auf die durch $J \leqq 0$ bzw. $0 \leqq J \leqq 1$ und $J \geqq 1$ charakterisierte Strecken. Die Spiegelung $\overline{U}$ und damit (zufolge

(1)) überhaupt jede Substitution zweiter Art der $\Gamma^{(\omega)}$ transformiert J in seinen konjugiert komplexen Wert $\bar{J}$:

$$J\left(\frac{\alpha\bar{\omega}-\beta}{\gamma\bar{\omega}-\delta}\right)=\bar{J}(\omega). \tag{4}$$

Das schraffierte Elementardreieck liefert im Abbild die „positive“ J-Halbebene, das freie die „negative“ Halbebene.

Wir wollen nun zunächst (was oben noch nicht geschah) darauf hinweisen, daß die Abbildung des einzelnen Dreiecks auf eine der J-Halbebenen in den Ecken des Dreiecks aufhört, konform zu sein. Ein Winkel des Scheitelpunktes $\omega=\varrho$ wird im Abbild verdreifacht, ein solcher des Scheitelpunktes $\omega=i$ aber verdoppelt. Da $J(\varrho)=0$ und $J(i)=1$ ist, so folgt nach früheren allgemeinen Sätzen: *Die Funktion J hat im Punkte $\omega=\varrho$ einen Nullpunkt dritter Ordnung, und $(J-1)$ hat im Punkte $\omega=i$ einen Nullpunkt zweiter Ordnung.* Die Umgebung des Nullpunktes der q^2-Ebene überträgt sich konform auf die Umgebung des Punktes ∞ der J-Ebene. Als Funktion von ω hat jedoch J in derselben Art wie q^2 *bei $\omega=\infty$ einen wesentlich singulären Punkt,* was nach S. 29 und 52 ja nicht ausschließt, daß J bei spezieller Annäherung an den Punkt ∞ gleichwohl einen Grenzwert hat.

Als wesentlich neu tritt uns nun die aus (1) hervorgehende Tatsache entgegen, *daß jedes Doppeldreieck des zur $\Gamma^{(\omega)}$ gehörenden, die ω-Halbebene schlicht und vollständig bedeckenden Netzes wiederum ein konformes Abbild der schlichten und vollständigen J-Ebene ist;* bezüglich $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalente Punkte tragen ja in der Tat zufolge (1) gleiche Funktionswerte $J(\omega)$.

Besonders wichtig werden daraufhin die Betrachtungen von S. 294 über die gegen die reelle ω-Achse senkrecht verlaufenden Geraden G, d. h. über die Art, wie diese Geraden das Dreiecksnetz durchdringen. Ist der Fußpunkt der Geraden rational, so verbleibt dieselbe, wenn wir sie gegen die reelle Achse durchlaufen, zuletzt in einem bestimmt angebbaren Dreiecke, dessen Spitze der rationale Fußpunkt von G ist: *Längs einer gegen die reelle ω-Achse senkrecht verlaufenden Geraden G mit „rationalem“ Fußpunkt finden Werte J statt, die gegen den rationalen Punkt hin einen Grenzwert haben, nämlich den Wert ∞.* Wenn also auch der rationale Punkt ω, wie der ihm äquivalente Punkt ∞, als *wesentlich singulär* für $J(\omega)$ zu bezeichnen ist, so dürfen wir doch den bei der vollzogenen Annäherung eintretenden Grenzwert ∞ als Wert von $J(\omega)$ im rationalen Punkte betrachten.

Hat demgegenüber G einen irrationalen Fußpunkt, so ist die Anzahl der längs G aufgereihten Dreiecke des Netzes nicht endlich. Hieraus allein folgt freilich noch nicht, daß nun $J(\omega)$ gegen den Fußpunkt

von G hin keiner Grenze zustreben könne; denn z. B. eine Gerade, die sich etwa von $\omega = i$ unter einem von 0 verschiedenen spitzen Winkel von der reellen Achse fort gegen $\omega = \infty$ erhebt, durchläuft auch unendlich viele Dreiecke, bildet sich aber in der q^2-Ebene auf eine logarithmische Spirale um den Nullpunkt ab und liefert also für J eine Grenze, nämlich ∞.

Anders liegt es jedoch mit unserer Geraden G eines irrationalen Fußpunktes. Man beachte, daß G unendlich viele Dreiecke der Winkel 0, welche das Netz der Fig. 60, S. 289 zusammensetzen, durchschreitet; beim Eintritt in ein solches Dreieck ist J reell und $\geqq 1$. Im Innern des Dreiecks (vgl. Fig. 59, S. 288) laufen aber vom „Mittelpunkte" nach den beiden äußeren Ecken (a und c in Fig. 59) zwei Kreisbogen mit reellen $J \leqq 0$; einen dieser Bogen muß G vor Verlassen des Dreiecks überschreiten, so daß dann eben auch ein reeller Wert $J \leqq 0$ eintritt. Umständlicher ist der Nachweis von reellen Werten des Intervalles $0 \leqq J \leqq 1$ längs G. Man nehme an, daß die Gerade G mit dem irrationalen Fußpunkte ω_0 im Augenblicke das Doppeldreieck „V" durchschreite. Dann wird durch V^{-1} das betreffende Stück von G in den Diskontinuitätsbereich „1" zurückgeworfen; und die gesamte Gerade G geht hierbei in einen zur reellen ω-Achse senkrechten Halbkreis von endlichem Radius über, der die Halbebene vom Punkte $V^{-1}(\infty)$ nach $V^{-1}(\omega_0)$ durchsetzt. Dieser Halbkreis muß vom Doppeldreieck „1" aus in der Richtung auf $V^{-1}(\omega_0)$, nachdem er eine begrenzte Anzahl von Doppeldreiecken „S^ν" durchschritten hat, die Kette dieser Doppeldreiecke S^ν verlassen; und in dem Augenblick ist J reell und im Intervalle $0 \leqq J \leqq 1$ gelegen. Es liegen demnach auf G unbegrenzt viele Punkte sowohl mit reellem $J \leqq 0$, als auch mit reellem $J \geqq 1$, wie auch schließlich unendlich viele Punkte mit reellem J des Intervalls $0 \leqq J \leqq 1$: *Längs einer gegen die reelle ω-Achse senkrecht verlaufenden Geraden G mit „irrationalem" Fußpunkte schwankt der Wert von $J(\omega)$ unaufhörlich und nähert sich keiner Grenze.*

Während demnach $J(\omega)$ in jedem Innenpunkte der positiven ω-Halbebene sich analytisch verhält, ist jeder reelle Punkt ω ein wesentlich singulärer für diese Funktion, und es ist auf keine Weise möglich, bei analytischer Fortsetzung von $J(\omega)$ einen reellen Punkt ω in das Innere eines Konvergenzkreises der dabei auftretenden Potenzreihen hineinzuziehen. Die Peripherie des Konvergenzkreises für die Potenzreihenentwicklung von $J(\omega)$ in der Umgebung eines Innenpunktes ω_0 der positiven Halbebene wird vielmehr die reelle ω-Achse berühren, so daß die Konvergenzradien verschwindend klein werden, wenn sich ω_0 irgendeinem reellen Punkte ω annähert. Die reelle ω-Achse, als aus lauter wesentlich singulären Punkten zusammengesetzt, ist also nach S. 30

als eine *„natürliche Grenze“* von $J(\omega)$ zu bezeichnen, über welche hinaus diese Funktion nicht fortsetzbar ist, und auf welcher nur noch den *rationalen* Punkten „Grenzwerte“ der Funktion $J(\omega)$ zugehören: *Das Feld* F *der Funktion $J(\omega)$ ist die schlichte und vollständige positive ω-Halbebene ohne die Randpunkte (die reelle ω-Achse).*

Für J, als Funktion von q^2 aufgefaßt, gelten ganz entsprechende Sätze. Die Peripherie des Einheitskreises besteht aus lauter wesentlich singulären Punkten dieser Funktion, wobei allerdings bei radialer[1]) Annäherung an einen „rationalen“ Punkt der Grenzwert $J = \infty$ eintritt. Die Peripherie des Konvergenzkreises der Reihe (3) (Einheitskreis der q^2-Ebene) ist also zugleich eine *„natürliche Grenze“* der durch diese Reihe dargestellten Funktion von q^2, *deren Feld* F *somit die Innenfläche des fraglichen Kreises ist.*

Wir betrachten weiter die konforme Abbildung des Feldes der Funktion $J(\omega)$ auf die J-Ebene. Jedes Elementardreieck des Netzes der ω-Halbebene ergibt ein „Halbblatt“ der J-Ebene, und zwar das einzelne schraffierte Dreieck unseres in Fig. 61, S. 291, skizzierten Netzes ein „positives“ J-Halbblatt, jedes freie Dreieck ein „negatives“ Halbblatt. Diese unendlich vielen Halbblätter hat man sich längs ihrer drei durch die Punkte $J = 0$, 1 und ∞ abgeteilten Randstücke aneinander geheftet zu denken (immer ein positives Halbblatt an ein negatives) genau in der Weise, wie es der Zusammenhang der Dreiecke des Netzes vorschreibt. Es entsteht als konformes Abbild der ω-Halbebene über der J-Ebene und damit als *Feld der zu $J(\omega)$ inversen Funktion $\omega(J)$ eine unendlich-blättrige Fläche F_∞, die nur an den Stellen $J = 0$, 1 und ∞ Verzweigungspunkte aufweist, und die wie ihr Original, die ω-Halbebene, einen „einfach-zusammenhängenden“ Bereich darstellt; und zwar liegen bei $J = 0$ lauter 3-blättrige Verzweigungspunkte übereinander, bei $J = 1$ lauter 2-blättrige und schließlich bei $J = \infty$ lauter ∞-blättrige.*

In dieser Fläche F_∞ ist $\omega(J)$ eine eindeutige Funktion des Ortes, welche den unendlich vielen Blättern entsprechend unendlich viele „Zweige“ besitzt, die durch Fortsetzung um die Verzweigungspunkte herum auseinander hervorgehen. *Dabei ist irgendeiner dieser Zweige $\omega'(J)$ durch einen Anfangszweig $\omega(J)$ in der Gestalt:*

$$\omega'(J) = \frac{\alpha\omega(J) + \beta}{\gamma\omega(J) + \delta} \tag{5}$$

darstellbar, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante 1 *sind; und wir*

1) Man sieht übrigens (durch Rückgang auf die ω-Halbebene und den Punkt $\omega = i\infty$) leicht, daß der Grenzwert $J = \infty$ eintritt auch bei Annäherung längs einer regulären Kurve, welche den „rationalen“ Punkt des Einheitskreises der q^2-Ebene unter einem von 0 verschiedenen Winkel (gegen diesen Kreis) erreicht.

erhalten die gesamten Zweige, wenn wir $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ *alle Substitutionen der Modulgruppe* $\Gamma^{(\omega)}$ *durchlaufen lassen.*

Indem wir die charakteristischen Eigenschaften von $J(\omega)$ zusammenfassen, gelangen wir zum allgemeinen Begriff einer Modulfunktion: *Als eine „elliptische Modulfunktion erster Stufe" bezeichnen wir jede analytische Funktion von* ω, *welche die schlichte positive* ω*-Halbebene (ohne den Rand) zum Felde hat, gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe* $\Gamma^{(\omega)}$ *invariant ist und beim Grenzübergang* $\lim \omega = i\infty$ *sich als eine Funktion von* q^2 *erweist, die im Nullpunkte der* q^2*-Ebene analytisch ist oder einen Pol endlicher Ordnung aufweist.*

Eine solche Funktion ist, in Abhängigkeit von J aufgefaßt, natürlich eine eindeutige Funktion des Ortes in der eben konstruierten F_∞, welche ja ein eindeutiges Abbild der positiven ω-Halbebene ist. Da indessen übereinanderliegende Punkte in dieser F_∞ Punkten der ω-Halbebene entsprechen, die bezüglich der $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalent sind, so wird unsere fragliche Funktion von J in übereinanderliegenden Punkten der F_∞ stets die gleichen Werte annehmen; sie ist demnach *eine eindeutige Funktion von J.* Dabei ist sie in der ganzen J-Ebene, unter Einschluß des Punktes $J = \infty$ (der dem Nullpunkte der q^2-Ebene entspricht), abgesehen von Polen, überall analytisch. Eine solche Funktion ist aber nach S. 61 eine rationale Funktion von J: *Jede elliptische Modulfunktion erster Stufe ist rational in der speziellen Funktion* $J(\omega)$ *dieser Art darstellbar; und umgekehrt ist jede rationale Funktion von* $J(\omega)$ *als Funktion von* ω *aufgefaßt auch eine elliptische Modulfunktion erster Stufe.*

Vergleichen wir hiermit den S. 125 im Anschluß an Gleichung (18) daselbst aufgestellten Satz, so erkennen wir, *daß die gesamten absoluten rationalen Invarianten der biquadratischen binären Verzweigungsform, als Funktionen von* ω *aufgefaßt, uns gerade unsere gesamten Modulfunktionen erster Stufe liefern.*

§ 5. Die elliptischen Modulformen erster Stufe.

Die beiden ganzen rationalen Invarianten g_2 und g_3 der Verzweigungsform waren in den Perioden ω_1, ω_2 nach S. 262 durch die in der ω-Halbebene unbedingt konvergenten Reihen:

$$(1)\quad g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^4, \qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^6$$

darstellbar, wo (m_1, m_2) eine Abkürzung für $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ ist. Weiteren Aufschluß über die Natur dieser Funktionen erhielten wir durch

die Darstellungen (16) S. 271 und (3) S. 274, von denen die letzteren hier reproduziert seien:

$$(2)\quad \begin{cases} g_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20q^2 + 180q^4 + 560q^6 + \ldots\right), \\ g_3(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}q^2 - 77q^4 - \frac{1708}{3}q^6 - \ldots\right); \end{cases}$$

diese nach Potenzen von q^2 fortschreitenden Reihen waren für $|q| < 1$ konvergent. Hiernach sind $\omega_2^4 \cdot g_2$ und $\omega_2^6 \cdot g_3$ im Innern der ω-Halbebene eindeutige und überall analytische Funktionen, die sich auch noch für $\lim \omega = i\infty$ als Funktionen von q^2 im Nullpunkte der q^2-Ebene analytisch verhalten. Als eine Haupteigenschaft der Funktionen g_2, g_3 der Perioden ω_1, ω_2 folgten aus der unbedingten Konvergenz der Reihen (1) die Gleichungen (6) S. 262, welche zum Ausdruck bringen, daß diese Funktionen gegenüber den Substitutionen der homogenen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ invariant sind.

Im Anschluß hieran stellen wir sogleich folgende allgemeine Erklärung auf: *Als eine „elliptische Modulform erster Stufe" wollen wir jede homogene Funktion ganzzahliger Dimension d der ω_1, ω_2 bezeichnen, die, mit ω_2^{-d} multipliziert, als analytische Funktion von ω die positive ω-Halbebene (ohne den Rand) zum Felde hat, die gegenüber den Substitutionen der homogenen Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ invariant ist, und die schließlich, wieder mit ω_2^{-d} multipliziert, für den Grenzübergang* $\lim \omega = i\infty$ *als Funktion von q^2 im Nullpunkte der q^2-Ebene analytisch bleibt oder doch nur einen Pol besitzt.* Die Dimension d muß geradzahlig sein, da die Substitution $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$ in der $\Gamma^{(\omega)}$ enthalten ist und also ihr gegenüber die Modulform unveränderlich sein soll. Ist die Modulform im Innern der ω-Halbebene polfrei und hat sie für $\lim \omega = i\infty$ einen endlichen Grenzwert, so heißt sie eine *„ganze" Modulform erster Stufe;* hierher gehören insbesondere die Modulformen $g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $g_3(\omega_1, \omega_2)$ der Dimensionen -4 und -6. Wir werden gleich erkennen, daß überhaupt jede ganze Modulform erster Stufe von *negativer* geradzahliger Dimension ist; wir setzen demnach sogleich $d = -2\nu$ und benutzen für eine einzelne ganze Form dieser Dimension allgemein die Bezeichnung $g_\nu(\omega_1, \omega_2)$.

Es ist nun zunächst einleuchtend, *daß die Modulformen „nullter" Dimension einfach mit den Modulfunktionen erster Stufe identisch sind, sowie daß ferner der Quotient irgend zweier Modulformen gleicher Dimension wieder eine „Modulfunktion" erster Stufe darstellt.* Insbesondere wird also auch der Quotient zweier ganzer Formen $g_\nu'(\omega_1, \omega_2)$ und $g_\nu(\omega_1, \omega_2)$ gleicher Dimension -2ν eine Modulfuntion erster Stufe und damit eine rationale Funktion von J sein, deren Nullpunkte und Pole von den Null-

punkten des Zählers g'_ν bzw. des Nenners g_ν geliefert werden, soweit sich dieselben nicht bei Bildung des Quotienten fortheben. Daraus folgt umgekehrt, daß alle ganzen Modulformen $g'_\nu(\omega_1,\omega_2)$ der Dimension -2ν durch eine unter ihnen $g_\nu(\omega_1,\omega_2)$ in der Gestalt:

(3) $$g'_\nu(\omega_1,\omega_2) = g_\nu(\omega_1,\omega_2)\cdot R(J(\omega))$$

mittels rationaler Funktionen von J darstellbar sind; und umgekehrt ist offenbar auch jedes solche Produkt $g_\nu \cdot R(J)$ eine ganze Modulform g'_ν, wenn sich nur die sämtlichen Pole von $R(J)$ im Produkte $g_\nu \cdot R(J)$ gegen Nullpunkte von $g_\nu(\omega_1,\omega_2)$ fortheben.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich ein wichtiger Satz über die Anzahl der Nullpunkte einer ganzen Form $g_\nu(\omega_1,\omega_2)$ im Diskontinuitätsbereiche der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$. In der Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ besitzen wir eine besondere Modulform $g_6(\omega_1,\omega_2)$, *welche im Innern der ω-Halbebene nirgends verschwindet*, und deren Verhalten im Nullpunkte der q^2-Ebene, d. i. für $\lim \omega = i\infty$, aus der schon S. 274 mitgeteilten Reihenentwicklung:

(4) $$\Delta(\omega_1,\omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2(1 - 24q^2 + 252q^4 - 1472q^6 + \cdots)$$

hervorgeht. Δ hat demnach im Nullpunkte der q^2-Ebene selber einen Nullpunkt erster Ordnung: Insofern nun die bei $\omega = i\infty$ gelegene Ecke unseres Doppeldreiecks der Fig. 56, S. 273 (Diskontinuitätsbereiches der $\Gamma^{(\omega)}$) sich gerade auf die schlichte und vollständige Umgebung des Nullpunktes der q^2-Ebene abbildet, dürfen wir sagen, *daß Δ oder genauer $\omega_2^{12}\cdot\Delta$ „im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma^{(\omega)}$ gemessen" einen Nullpunkt erster Ordnung in der Ecke $i\infty$ besitze.* Soll demnach $\Delta\cdot R(J)$ eine *ganze* Form $g_6(\omega_1,\omega_2)$ sein, so darf $R(J)$ nur einen Pol erster Ordnung, und zwar bei $J=\infty$, haben und stellt demnach eine lineare ganze Funktion $(AJ+B)$ von J dar. *Jede ganze Modulform $g_6(\omega_1,\omega_2)$ der Dimension -12 ist hiernach in der Gestalt:*

$$\Delta\cdot(AJ+B) = Ag_2^3 + B\Delta = (A+B)g_2^3 - 27Bg_3^2$$

oder, wenn wir $A+B=a$, $-27B=b$ setzen, in der Gestalt:

(5) $$g_6(\omega_1,\omega_2) = ag_2^3 + bg_3^2$$

darstellbar, unter a und b Konstante verstanden; und umgekehrt haben wir für irgend zwei endliche Konstante a und b in (5) *stets eine ganze Modulform der Dimension -12 vor uns.*

Es ist nun einleuchtend, daß $\Delta\cdot(AJ+B)$ in der J-Ebene einen und nur einen Nullpunkt erster Ordnung hat, und daß man diesen Nullpunkt, wenn man das Verhältnis der Konstanten A und B zweckmäßig wählt, an jede vorgeschriebene Stelle der J-Ebene bringen kann. Wir gewinnen den Satz: *Eine ganze Modulform erster Stufe $(-12)^{\text{ter}}$ Dimen-*

sion hat „im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma^{(\omega)}$ gemessen“ einen und nur einen Nullpunkt erster Ordnung; wir können die Lage desselben willkürlich vorschreiben und bestimmen dadurch die Modulform $g_6(\omega_1, \omega_2)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig. Der Erläuterung bedürfen hierbei jedoch noch die Punkte $\omega = i$ und $\omega = \varrho$.

Ist zunächst ω_0 ein endlicher von den Punkten $\omega = i$ und $\omega = \varrho$ verschiedener Punkt des Diskontinuitätsbereiches der $\Gamma^{(\omega)}$, und ist $J(\omega_0) = J_0$, so ist die Umgebung von ω_0 konform auf diejenige von J_0 abgebildet. Die Form $A\varDelta \cdot (J - J_0)$ hat demnach im Punkte ω_0 ihren Nullpunkt erster Ordnung. Weiter hat in der Ecke $i\infty$, wie wir feststellten, die Form $A \cdot \varDelta$ einen Nullpunkt, der „im Diskontinuitätsbereich gemessen“ von der ersten Ordnung ist. Auch die Umgebung von $\omega_0 = \varrho$ ist nicht mehr konform auf die Umgebung von $J = 0$ bezogen, liefert vielmehr über der J-Ebene eine dreiblättrige Windungsfläche (S. 303) mit dem Verzweigungspunkte $J = 0$. Die Form $A\varDelta \cdot J$ hat in der schlichten J-Ebene und also „im Diskontinuitätsbereich gemessen“ bei ϱ einen Nullpunkt *erster* Ordnung und eben deshalb in der dreiblättrigen Windungsfläche[1]) und also in der ω-Halbebene bei $\omega_0 = \varrho$ einen Nullpunkt *dritter* Ordnung. In entsprechender Weise findet man, daß $A\varDelta \cdot (J - 1)$ im Punkte $\omega_0 = i$ der ω-Halbebene einen Nullpunkt *zweiter* Ordnung besitzt. Hiermit ist in Übereinstimmung, daß $\varDelta \cdot J = g_2^3$ die *dritte* Potenz der ganzen Modulform $g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $\frac{1}{27}\varDelta \cdot (J - 1) = g_3^2$ die *zweite* Potenz der ganzen Modulform $g_3(\omega_1, \omega_2)$ ist. Wir ziehen umgekehrt die Folgerung: *Die Modulform $g_2(\omega_1, \omega_2)$ hat in der ω-Halbebene bei $\omega = \varrho$ (und damit natürlich auch in allen mit ϱ äquivalenten Punkten) einen einfachen Nullpunkt, so daß sie „im Diskontinuitätsbereiche gemessen“ in der fraglichen Ecke einen Nullpunkt der gebrochenen Ordnung $\frac{1}{3}$ aufweist, ohne übrigens noch einen weiteren Nullpunkt in jenem Bereiche zu besitzen.* In entsprechender Weise folgt für g_3: *Die Modulform $g_3(\omega_1, \omega_2)$ hat in der ω-Halbebene bei $\omega = i$ (und damit in allen mit i äquivalenten Punkten) einen einfachen Nullpunkt; „im Diskontinuitätsbereich gemessen“ hat sie also in der Ecke i einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$, ohne übrigens in diesem Bereiche noch einen weiteren Nullpunkt aufzuweisen.*[2])

1) S. hierzu die Entwicklungen S. 28 ff.

2) Die Angaben über die Lage der Nullpunkte von g_2 und g_3, welche mit der algebraischen Theorie in Übereinstimmung sind (vgl. S. 178 ff), lassen sich leicht an den Reihen (1) bestätigen. Beispielsweise können wir die Reihe für g_2 durch Zusammenfassung der Glieder zu je dreien in die Gestalt kleiden:

$$(6)\quad g_2(\omega_1, \omega_2) = 20 \sum_{m_1, m_2}{}' \left\{ \left(\frac{1}{(m_1, m_2)}\right)^4 + \left(\frac{1}{(-m_2, m_1 - m_2)}\right)^4 + \left(\frac{1}{(-m_1 + m_2, -m_1)}\right)^4 \right\}.$$

Der Faktor 60 in (1) rechter Hand ist hier durch 20 ersetzt, weil wir in (6) rechter

Es soll jetzt eine beliebige ganze Modulform erster Stufe $g_\nu(\omega_1, \omega_2)$ der geradzahligen Dimension -2ν dargestellt werden. Man beachte zu diesem Zwecke, daß die Ausdrücke:

$$1,\ g_2,\ g_3\ g_2^2,\ g_2 g_3,\ g_2^2 g_3$$

in den ω_1, ω_2 die Dimensionen $0, -4, -6, -8, -10$ und -14 haben. Wir können uns unter diesen Ausdrücken demnach einen bestimmten, etwa durch $g_2^\varkappa g_3^\lambda$ zu bezeichnenden, so wählen, daß das Produkt $g_2^\varkappa g_3^\lambda \cdot g_\nu$ eine durch 12 teilbare Dimension -12μ bekommt; man hat einfach diejenige Zahlenkombination $\varkappa, \lambda$ zu wählen, für welche $(2\varkappa + 3\lambda + \nu)$ ein Multiplum von 6 wird:

$$2\varkappa + 3\lambda + \nu = 6\mu.$$

Mittels der besonderen Form Δ^μ der Dimension -12μ läßt sich die ganze Modulform $g_2^\varkappa g_3^\lambda g_\nu$ alsdann zufolge eines oben aufgestellten Satzes in der Gestalt:

$$g_2^\varkappa g_3^\lambda \cdot g_\nu = \Delta^\mu \cdot R(J)$$

mit Hilfe einer rationalen Funktion von J darstellen.

Ist nun erstlich $R(J)$ mit einer Konstanten C identisch, so folgt:

$$g_\nu = C \cdot \Delta^\mu g_2^{-\varkappa} g_3^{-\lambda}.$$

Schließen wir den Fall einer identisch verschwindenden oder auch nur mit einer Konstanten identischen Form g_ν aus[1]), so ist C von 0 verschieden und also muß, da g_ν polfrei sein soll, $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ sein und $\mu > 0$ zutreffen. *Die Form $g_\nu(\omega_1, \omega_2)$ ist in diesem Falle, abgesehen von einem konstanten Faktor, eine Potenz von Δ mit positivem ganzzahligen Exponenten μ und hat als solche einen einzigen Nullpunkt der Ordnung $\mu = \frac{\nu}{6}$ im Diskontinuitätsbereiche der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$; ihre Dimension ist $-2\nu = -12\mu$, d. h. eine „negative" ganze Zahl.*

Ist die Funktion $R(J)$ nicht konstant, so hat sie mindestens einen Pol, der durch einen Nullpunkt von Δ^μ aufgehoben werden muß. Also ist $\mu > 0$, die Pole von $R(J)$ dürfen nur bei $J = \infty$ liegen, und ihre Zahl muß $\leqq \mu$ sein, d. h. $R(J)$ ist eine ganze Funktion höchstens μ^{ten} Grades. Es ergibt sich demnach für g_ν die Darstellung:

$$(7) \qquad g_\nu = \Delta^\mu g_2^{-\varkappa} g_3^{-\lambda} (A_0 J^\mu + A_1 J^{\mu-1} + \cdots + A_\mu)$$

Hand, sobald diese Summe wieder auf *alle* Paare nicht zugleich verschwindender Zahlen m_1, m_2 bezogen wird, jedes Glied der Reihe (1) dreimal erhalten. Nun gilt aber:

$$\frac{1}{-m_2\varrho + m_1 - m_2} = \frac{\varrho}{m_1\varrho + m_2}, \quad \frac{1}{(-m_1 + m_2)\varrho - m_1} = \frac{\varrho^2}{m_1\varrho + m_2},$$

so daß für $\omega = \varrho$ jedes einzelne Glied der Reihe (6) und also auch die Summe aller Glieder verschwindet.

1) Für $\nu = 0$ entspricht eine beliebige Konstante, für $\nu \neq 0$ die Konstante 0 der Begriffserklärung einer ganzen Modulform.

mit $\mu > 0$, wobei die rechts stehende ganze Funktion für $\varkappa > 0$ den Faktor J und für $\lambda > 0$ den Faktor $(J-1)$ haben muß, da g_ν polfrei ist. Für $\varkappa > 0$, $\lambda > 0$ muß demnach $\mu \geqq 2$ sein; da übrigens $\varkappa = 0, 1, 2$ und $\lambda = 0, 1$ gilt, so ist in jedem Falle:

$$\nu = 6\mu - 2\varkappa - 3\lambda > 0,$$

d. h. g_ν hat wieder *negative* Dimension -2ν. Die in (7) rechts stehende ganze Form hat „im Diskontinuitätsbereiche" der $\Gamma^{(\omega)}$ Nullpunkte in der Gesamtordnung:

$$\mu - \frac{\varkappa}{3} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\nu}{6}$$

und ist durch Angabe dieser Nullpunkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Ist $\varkappa > 0$, so können wir den Faktor $g_2^{-\varkappa}$ gegen den in (7) rechts nun auftretenden Faktor $\varDelta J = g_2^3$ fortheben; ebenso können wir für $\lambda = 1$ den Faktor g_3^{-1} gegen den jetzt auftretenden Faktor $\varDelta(J-1) = 27 g_3^2$ fortheben. Der noch übrig bleibende Faktor ist:

$$\varDelta^{\mu-\sigma}\left(A_0 J^{\mu-\sigma} + A_1' J^{\mu-\sigma-1} + \cdots + A_{\mu-\sigma}'\right),$$

wo $\sigma = 0, 1$ oder 2 ist; derselbe kann auf Grund der Relationen (16) und (15) S. 124 in eine ganze rationale Funktion der g_2, g_3 von der Dimension $-12(\mu - \sigma)$ in den ω_1, ω_2 umgeschrieben werden. Setzen wir die bei Fortheben von $g_2^{-\varkappa}$ und $g_3^{-\lambda}$ noch übrig gebliebenen Potenzen von g_2, g_3 hierzu, so ergibt sich für g_ν eine ganze rationale Funktion der g_2, g_3 von der Dimension -2ν in den ω_1, ω_2. Wir gelangen zur Darstellung:

$$g_\nu(\omega_1, \omega_2) = \sum_{l,m} C_{l,m} g_2^l g_3^m, \tag{8}$$

wo l und m ganze nicht-negative Zahlen sind, die wegen der Dimension in den ω_1, ω_2 der Relation:

$$2l + 3m = \nu \tag{9}$$

genügen. Diese Darstellung schließt den oben erledigten Fall, daß g_ν gleich $C \cdot \varDelta^\mu$ ist, mit ein: *Eine ganze Modulform erster Stufe $g_\nu(\omega_1, \omega_2)$ ist von negativer geradliniger Dimension, hat im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma^{(\omega)}$ Nullpunkte in der Gesamtordnung $\frac{\nu}{6}$ und ist durch die Lage dieser Nullpunkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; sie läßt sich mittels der g_2, g_3 in der Gestalt* (8) *darstellen, wo die l, m nicht-negative ganze, der Relation* (9) *genügende Zahlen sind, und es ist umgekehrt offenbar jeder solche Ausdruck* (8) *eine ganze Modulform erster Stufe.*

Für $\nu = 1$ hat die Gleichung (9) keine Lösungen in nicht-negativen ganzen Zahlen; für $\nu = 2, 3, 4, 5$ liegt je nur eine einzige Lösung vor, und erst für $\nu = 6$ haben wir die beiden Lösungen $l = 3$, $m = 0$ und $l = 0$, $m = 2$: *Ganze Modulformen erster Stufe $(-2)^{ter}$ Dimension existieren*

nicht, für die Dimensionen — 4, — 6, — 8 und — 10 liegt bis auf konstante Faktoren je nur eine einzige ganze Modulform vor, nämlich g_2, g_3, g_2^2 *und* $g_2 g_3$; *erst bei der Dimension* — 12 *tritt eine Formenschar mit beweglichem Nullpunkte:*

$$C_1 g_2^3 + C_2 g_3^2 \tag{10}$$

auf.

Letzten Endes wolle man noch die vorstehenden Entwicklungen mit den Gleichungen (13) und (14) S. 123 sowie der damaligen Überlegung in Vergleich stellen. Wir erkennen sofort: *Die ganzen rationalen Invarianten der biquadratischen binären Verzweigungsform liefern uns, in Abhängigkeit von den Perioden* ω_1, ω_2 *betrachtet, gerade genau unsere gesamten ganzen elliptischen Modulformen erster Stufe.*

§ 6. Die Perioden η_1, η_2 als Funktionen der ω_1, ω_2. Produktentwicklung der Diskriminante.

Auf Grund der aufgestellten Sätze können wir eine Produktentwicklung der Diskriminante gewinnen, welche späterhin vielfach gebraucht wird. Wir haben zu dem Zwecke an die Perioden η_1, η_2 des Integrals zweiter Gattung erster Stufe anzuknüpfen, deren Eigenschaften zunächst zu rekapitulieren sind.

Die erste Definition dieser Perioden η_1, η_2 ist durch die Gleichungen (2) S. 158 gegeben. Die daselbst benutzten Querschnitte Q_1, Q_2 der Riemannschen Fläche F_2 lieferten uns ein Paar primitiver Perioden ω_1, ω_2 und zusammengehörig damit ein Periodenpaar η_1, η_2 des Normalintegrals zweiter Gattung. In (6) S. 160 fanden wir, daß diese beiden Periodenpaare durch die nach Legendre benannte Relation:

$$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2 i \pi \tag{1}$$

verknüpft sind. Aus der Definition mittelst der Querschnitte geht zugleich hervor, daß, wenn wir (unter Wechsel des Querschnittsystems) von ω_1, ω_2 durch eine „lineare Transformation“ zu irgendeinem anderen Paare primitiver Perioden:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2.$$

übergehen, dann eben auch die η_1, η_2 die gleiche Substitution erfahren müssen, damit wir in:

$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2, \qquad \eta_2' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2$$

wieder die zu ω_1', ω_2' gehörenden Perioden des Integrals zweiter Gattung vor uns haben. Man sagt, um dies auszudrücken, *daß sich die* η_1, η_2 *mit den* ω_1, ω_2 *„kogredient“ substituieren.* Mit Rücksicht auf $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ geht hieraus hervor, daß der Ausdruck $(\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1)$ gegenüber den kogredienten Substitutionen invariant ist, was die Relation (1) bestätigt.

Eine wesentliche Ergänzung finden diese Ansätze in den Gleichungen (8) und (7) S. 263. Dieselben lehren, *daß die η_1, η_2 im Bereiche der positiven ω-Halbebene als eindeutige Funktionen* $(-1)^{ter}$ *Dimension der* ω_1, ω_2 *aufzufassen sind.* Die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Reihen erkannten wir als bedingt konvergent. Dem entspricht, daß diese Funktionen $\eta_1(\omega_1, \omega_2)$, $\eta_2(\omega_1, \omega_2)$ gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ eben nicht invariant sind, sondern sich mit den ω_1, ω_2 kogredient substituieren. Vermittelst der Entwicklungsgröße q^2 fanden wir für η_2 die in (15) S. 271 angegebene unbedingt konvergente einfach unendliche Reihe, aus der wir unter Zuhilfenahme der Legendreschen Relation (1) eine entsprechende Reihe für η_1 ableiten können; diese Darstellungen, welche den analytischen Charakter unserer beiden Funktionen $\eta_1(\omega_1, \omega_2)$, $\eta_2(\omega_1, \omega_2)$ einleuchtend kennzeichnen, sind:

$$(2)\quad \begin{cases} \eta_1 = -\dfrac{2i\pi}{\omega_2} + \dfrac{\pi^2\omega_1}{3\omega_2^2}\left(1 - 24\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \\ \eta_2 = \dfrac{\pi^2}{3\omega_2}\left(1 - 24\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right). \end{cases}$$

Diese Reihen stehen nun im nahen Zusammenhange mit dem unendlichen Produkte $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$, von dem wir S. 267 erkannten, daß es für irgendein primitives Periodenpaar, d. h. im Innern der positiven ω-Halbebene unbedingt konvergent ist. Wir wollen mittels dieses Produktes sogleich die im Innern der ω-Halbebene überall eindeutige endliche homogene Funktion $(-12)^{ter}$ Dimension der ω_1, ω_2:

$$(3)\quad \psi(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 \left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right)^{24}$$

herstellen, welche für $\lim \omega = i\infty$ als Funktion von q^2 analytisch bleibt und im Nullpunkte der q^2-Ebene selber einen Nullpunkt erster Ordnung aufweist. Gegenüber der erzeugenden Substitution S der homogenen Modulgruppe (vgl. (4) S. 298) bleibt $\psi(\omega_1, \omega_2)$ offenbar invariant:

$$\psi(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \psi(\omega_1, \omega_2);$$

denn S ändert weder ω_2 noch q^2. Wenn wir demnach zeigen können, daß $\psi(\omega_1, \omega_2)$ auch gegenüber der zweiten Erzeugenden T der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ invariant ist, so haben wir in $\psi(\omega_1, \omega_2)$ eine ganze Modulform erster Stufe $(-12)^{ter}$ Dimension, deren Nullpunkt in der Spitze $i\infty$ des Diskontinuitätsbereiches liegt. Dann aber kann $\psi(\omega_1, \omega_2)$ nach den Sätzen von S. 308 ff. von der Diskriminante Δ nur um einen konstanten Faktor abweichen.

Um zu diesem Ziele zu gelangen und die Verbindung mit den Gleichungen (2) herzustellen, bilden wir den Logarithmus der in (3) erklärten Funktion:

$$(4)\qquad \log\psi(\omega_1,\omega_2) = 12\log 2\pi - 12\log\omega_2 + 2\pi i\omega + 24\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^{2n}).$$

Wir können und wollen hierbei das einzelne Glied der unendlichen Reihe $\log(1-q^{2n})$ in dem in Betracht kommenden Bereiche $|q^2|<1$ dadurch eindeutig festlegen, daß die Funktion $\log(1-q^{2n})$ im Nullpunkte der q^2-Ebene selber verschwinden soll. Dann hängt die Vieldeutigkeit von $\log\psi(\omega_1,\omega_2)$ allein noch am Gliede $-12\log\omega_2$. Indessen ist nicht mehr nötig, hier zur Erzielung der Eindeutigkeit von $\log\psi(\omega_1,\omega_2)$ etwa eine beschränkende Festsetzung über die Beweglichkeit von ω_2 zu treffen, da wir durch Differentiation nach ω_1 und ω_2 sogleich wieder zu eindeutigen Ausdrücken gelangen.

Die in (4) rechts stehende Reihe ist gliedweise differenzierbar[1]; wir gewinnen, indem wir die Gleichung (4) in bezug auf ω_1 und ω_2 differenzieren:

$$\frac{\partial\log\psi(\omega_1,\omega_2)}{\partial\omega_1} = \frac{2\pi i}{\omega_2}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$\frac{\partial\log\psi(\omega_1,\omega_2)}{\partial\omega_2} = -\frac{12}{\omega_2}-\frac{2\pi i\omega_1}{\omega_2^2}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right).$$

Zufolge (2) ist also der Zusammenhang der Funktion $\psi(\omega_1,\omega_2)$ mit den Perioden η_1,η_2 der folgende:

$$(5)\qquad \frac{\partial\log\psi(\omega_1,\omega_2)}{\partial\omega_1} = \frac{6i}{\pi}\eta_2,\qquad \frac{\partial\log\psi(\omega_1,\omega_2)}{\partial\omega_2} = -\frac{6i}{\pi}\eta_1.$$

Diese Gleichungen gelten für irgendein primitives Periodenpaar ω_1,ω_2, wobei η_1,η_2 die ihnen zugehörigen Perioden des Integrals zweiter Gattung sind. Bilden wir dieselben also für das gleichfalls primitive Paar $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1$, so treten an Stelle von η_1,η_2 die Perioden $\eta_1' = \eta_2$, $\eta_2' = -\eta_1$, und wir erhalten die Gleichungen:

$$\frac{\partial\log\psi(\omega_2,-\omega_1)}{\partial\omega_2} = -\frac{6i}{\pi}\eta_1,\qquad \frac{\partial\log\psi(\omega_2,-\omega_1)}{\partial\omega_1} = \frac{6i}{\pi}\eta_2.$$

Der Vergleich derselben mit den Gleichungen (5) ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial\omega_1}\log\left(\frac{\psi(\omega_2,-\omega_1)}{\psi(\omega_1,\omega_2)}\right) = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial\omega_2}\log\left(\frac{\psi(\omega_2,-\omega_1)}{\psi(\omega_1,\omega_2)}\right) = 0,$$

so daß der hier unter dem Logarithmus stehende Quotient sowohl von ω_1 als ω_2 unabhängig und also einer Konstanten C gleich ist:

$$\psi(\omega_2,-\omega_1) = C\psi(\omega_1,\omega_2).$$

---

1) Vgl. „Osgood", S. 103 und 303.

Zur Bestimmung von C tragen wir $\omega_1 = i$, $\omega_2 = 1$ ein, was den im Innern der Halbebene gelegenen Punkt $\omega = i$ liefert. Hier ist ψ zufolge (3) von 0 verschieden und endlich, so daß:

$$C = \frac{\psi(1, -i)}{\psi(i, +1)}$$

gilt. Nun ist aber die Dimension von ψ durch 4 teilbar, so daß

$$\psi(i\omega_1, i\omega_2) = \psi(\omega_1, \omega_2)$$

zutrifft. Setzen wir hier $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -i$, so folgt $\psi(i, 1) = \psi(1, -i)$, und also ist $C = 1$, so daß $\psi(\omega_1, \omega_2)$ tatsächlich gegenüber der Substitution T invariant ist. Wir haben damit in $\psi(\omega_1, \omega_2)$ eine ganze Modulform erster Stufe $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension mit dem Nullpunkt in der Spitze $i\infty$ erkannt, so daß wir mit einer neuen Konstanten c den Ansatz gewinnen:

$$\psi(\omega_1, \omega_2) = c\,\Delta(\omega_1, \omega_2).$$

Nun fanden wir bereits S. 274 als Reihenentwicklung von Δ:

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 (1 - 24q^2 + 252q^4 - 1472q^6 + \cdots).$$

Das Anfangsglied der Entwicklung von $\psi(\omega_1, \omega_2)$ nach Potenzen von q^2 ist aber zufolge (3) eben auch $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2$; somit ist $c = 1$, d. h. die Funktion $\psi(\omega_1, \omega_2)$ ist mit $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ identisch. *Die Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ gestattet als Modulform erster Stufe die in jedem Innenbereich der positiven ω-Halbebene unbedingt und gleichmäßig konvergente Produktentwicklung:*

(6) $$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})\right)^{24};$$

die Gleichungen (5) *aber liefern als Darstellungen der Perioden η_1, η_2 des Normalintegrals zweiter Gattung erster Stufe in der Diskriminante Δ:*

(7) $$\eta_1 = \frac{\pi i}{6} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}, \qquad \eta_2 = -\frac{\pi i}{6} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}.$$

§ 7. Differentiationsprozesse zur Herstellung von Modulformen.

Die Ausübung der Differentiation irgendeiner Funktion von ω_1, ω_2 in bezug auf ω_1, ω_2 bezeichnen wir durch die Symbole $\frac{\partial}{\partial \omega_1}, \frac{\partial}{\partial \omega_2}$. Übt man eine Substitution der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$:

(1) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

aus, deren inverse Substitution:

$$\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_2', \quad \omega_2 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'$$

ist, so substitutieren sich die Differentiationssymbole nach folgender Regel:

(2) $$\frac{\partial}{\partial \omega_1'} = \delta \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \gamma \frac{\partial}{\partial \omega_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \omega_2'} = -\beta \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial \omega_2}.$$

Handelt es sich insbesondere um eine Funktion $f(\omega_1, \omega_2)$, die gegenüber der vorgelegten Substitution unveränderlich ist: $f(\omega_1', \omega_2') = f(\omega_1, \omega_2)$, so erfahren die ersten Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \omega_1}, \frac{\partial f}{\partial \omega_2}$ bei Übergang zu den ω_1', ω_2' dieselbe Substitution (2) wie die Differentiationssymbole. Die beiden durch $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\delta, -\gamma\\ -\beta, \alpha\end{pmatrix}$ gegebenen Substitutionen heißen zueinander *„kontragredient"*; somit gilt der Satz: *Die beiden partiellen ersten Ableitungen einer gegenüber der Substitution* (1) *unveränderlichen Funktion erfahren bei Ausübung dieser Substitution die zu den* ω_1, ω_2 *bzw. der Substitution* (1) *„kontragrediente" Substitution.*

Die Beziehung der beiden zueinander „kontragredienten" Substitutionen ist die, *daß die Verbindung der* ω_1, ω_2 *und der Differentiationssymbole:*

(3) $$\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}$$

einen „Differentiationsprozeß" vorschreibt, welcher auf eine gegenüber (1) *invariante Funktion angewandt ein gleichfalls gegenüber dieser Substitution invariantes Ergebnis liefert;* denn aus (1) und (2) folgt unmittelbar:

$$\omega_1' \frac{\partial}{\partial \omega_1'} + \omega_2' \frac{\partial}{\partial \omega_2'} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

so daß, wenn $f(\omega_1', \omega_2') = f(\omega_1, \omega_2)$ gilt, eben auch:

$$\omega_1' \frac{\partial f(\omega_1', \omega_2')}{\partial \omega_1'} + \omega_2' \frac{\partial f(\omega_1', \omega_2')}{\partial \omega_2'} = \omega_1 \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial f(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

zutrifft. Ist $f(\omega_1, \omega_2)$, wie dies bei den Modulformen vorliegt, homogen in den ω_1, ω_2 und etwa von der Dimension d, so ist dies Ergebnis selbstverständlich, da dann zufolge des Eulerschen Satzes von den homogenen Funktionen die Gleichung gilt:

$$\omega_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_2} = d \cdot f(\omega_1, \omega_2).$$

Die ersten Ableitungen aller Modulformen erfahren gegenüber der Substitution (1) die gleiche Substitution (2), sie sind also nach der schon S. 310 benutzen Sprechweise als „kogredient" zu bezeichnen. Hieraus folgt der bekannte Satz, *daß die „Funktionaldeterminante" irgend zweier Modulformen erster Stufe wieder einen gegenüber der Modulgruppe* $\Gamma^{(\omega)}$ *invarianten Ausdruck liefert.* Man erkennt in dieser Determinante leicht wieder eine *Modulform* und stellt deren Dimension zu $(d_1 + d_2 - 2)$ fest, wenn d_1 und d_2 die Dimensionen der gegebenen Formen sind.

Waren die letzteren ganze Modulformen, so ist auch ihre Funktionaldeterminante polfrei und stellt also eine *ganze Modulform* dar.

Es sollen zunächst die Funktionaldeterminanten der Formen g_2, g_3 und Δ untersucht werden. Wir schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = g_6(\omega_1, \omega_2),$$

insofern hierdurch infolge der vorausgeschickten Bemerkungen eine ganze Modulform erster Stufe der Dimension -12 erklärt ist. Auf Grund der Relation $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ folgert man hieraus mittelst einfacher Determinantensätze:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = -3g_2^2 g_6, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = -54 g_3 g_6.$$

Zur Bestimmung von g_6 formen wir die letzte Gleichung unter Benutzung des Eulerschen Satzes von den homogenen Funktionen in:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & g_2 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & 3\Delta \end{vmatrix} = \tfrac{27}{2}\,\omega_2 g_3 g_6$$

um und ziehen die Potenzreihen nach q^2 unserer Formen heran. Aus (2) und (4) S. 305 ff. folgt, daß die Entwicklung von $3\Delta \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}$ mit der Potenz q^4 beginnt, während $\frac{i}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{17} q^2$ das Anfangsglied der Potenzreihe von $g_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}$ ist. Da g_3 für $q^2 = 0$ von 0 verschieden ist, so muß die Form g_6 ihren einen im Diskontinuitätsbereich der $\Gamma^{(\omega)}$ auftretenden Nullpunkt in der Ecke $i\infty$ haben, und also ist diese Form bis auf einen konstanten Faktor mit Δ identisch. Setzen wir demnach $g_6 = c\Delta$, berechnen auch für die rechte Seite der letzten Gleichung das Anfangsglied der Entwicklung nach q^2 und setzen dasselbe dem Anfangsgliede der linken Seite gleich, so folgt:

$$-\frac{i}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{17} q^2 = \frac{27}{2}\,\omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \frac{1}{216} \cdot c \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2,$$

woraus sich $c = -\frac{2i}{3\pi}$ ergibt. *Die drei Funktionaldeterminanten der Modulformen erster Stufe g_2, g_3, Δ sind demnach:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = -\frac{2i}{3\pi}\Delta, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = \frac{2i}{\pi} g_2^2 \Delta, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = \frac{36 i}{\pi} g_3 \Delta.$$

Neben dem Differentiationsprozeß (3), auf den wir unten nochmals zurückkommen, ist ein zweiter „Differentiationsprozeß" wichtig, den wir unter Vorbehalt einer unwesentlichen Abänderung durch:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}$$

erklären; es handelt sich also einfach um die Funktionaldeterminante zweier Formen, von denen die erste noch unbestimmt ist, während wir Δ als zweite Form wählen. Auf eine Modulform angewandt ergibt dieser Prozeß wieder eine Modulform. Dies Sachverhältnis bleibt unverändert, wenn wir das vorstehende Differentiationssymbol mit Δ^{-1} multiplizieren, wodurch dasselbe unter Benutzung von (7) S. 313 die Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = \frac{6}{\pi i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2} \\ -\eta_2, & \eta_1 \end{vmatrix} = \frac{6}{\pi i}\left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}\right).$$

Für das rechts in der Klammer stehende Symbol wollen wir die Bezeichnung D_η einführen:

$$(4) \qquad D_\eta = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}$$

und können dann für diesen Prozeß auch umgekehrt die Darstellung als Funktionaldeterminante:

$$(5) \qquad D_\eta = \frac{\pi i}{6 \Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}$$

benutzen. Die Invarianz des Symboles D_η ebenso wie diejenige des unter (3) eingeführten Symboles, für welches wir im Anschluß an (4) die Abkürzung:

$$(6) \qquad D_\omega = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}$$

gebrauchen wollen, ist übrigens auch unmittelbar einleuchtend, insofern sich ja die η_1, η_2 mit den ω_1, ω_2 kogredient (vgl. S. 310) und also zu den $\frac{\partial}{\partial \omega_1}, \frac{\partial}{\partial \omega_2}$ kontragredient substituieren.

Die beiden Symbole D_ω und D_η kann man auch in algebraische Gestalt umrechnen, wobei man von der Erwägung auszugehen hat, daß die Modulformen rationale Funktionen von g_2 und g_3 sind und also g_2 und g_3 an Stelle der ω_1, ω_2 als unabhängige Variable eingeführt werden können. Es ist zu setzen:

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial \omega_1} = \frac{\partial}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \omega_2} = \frac{\partial}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} + \frac{\partial}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \omega_2},$$

wodurch zunächst D_ω die Gestalt:

$$D_\omega = \omega_1\left(\frac{\partial}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}\right) + \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} + \frac{\partial}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial \omega_2}\right),$$

$$D_\omega = D_\omega(g_2)\frac{\partial}{\partial g_2} + D_\omega(g_3)\frac{\partial}{\partial g_3}$$

annimmt. Nun liefert ja D_ω für eine Modulform einfach die „Homogeneitätsrelation“:

$$D_\omega(g_2) = -4g_2, \quad D_\omega(g_3) = -6g_3.$$

Die algebraische Gestalt des Prozesses D_ω ist also:

(8) $$D_\omega = -4g_2\frac{\partial}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial}{\partial g_3}.$$

Aus der Gestalt (5) von D_η finden wir mit Rücksicht auf (7) und die Relation $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ mittelst des Multiplikationstheorems der Determinanten:

$$D_\eta = \frac{\pi i}{6\Delta}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial g_2}, & \frac{\partial}{\partial g_3}\\ 3g_2^2, & -54g_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2}\\ \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2}\end{vmatrix}.$$

Setzen wir den schon oben bestimmten Wert der Funktionaldeterminante von g_2 und g_3 ein, so folgt *als algebraische Gestalt des Differentiationsprozesses D_η*:

(9) $$D_\eta = -6g_3\frac{\partial}{\partial g_2} - \tfrac{1}{3}g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3}.$$

Die hieraus sofort hervorgehenden Gleichungen:

(10) $$D_\eta(g_2) = -6g_3, \quad D_\eta(g_3) = -\tfrac{1}{3}g_2^2, \quad D_\eta(\Delta) = 0$$

bestätigen mit Rücksicht auf (5) die obigen Angaben über die Funktionaldeterminanten der g_2, g_3, Δ. Als weiteres Beispiel betrachten wir $D_\eta(J)$, wofür wir unter Rücksicht auf $\log J = 3\log g_2 - \log\Delta$ gewinnen:

$$D_\eta(J) = J D_\eta(\log J) = 3J D_\eta(\log g_2) - J D_\eta(\log\Delta)$$

$$D_\eta(J) = \frac{3g_2^2}{\Delta}D_\eta(g_2) - \frac{J}{\Delta}D_\eta(\Delta).$$

Mit Rücksicht auf (10) folgt:

(11) $$D_\eta(J) = -18\frac{g_2^2 g_3}{\Delta}.$$

Benutzen wir übrigens die transzendente Gestalt (4) von D_η und beachten, daß J eine Funktion des Periodenquotienten ω allein ist, so ergibt sich:

$$D_\eta(J) = \left(\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial\omega_1} + \eta_2\frac{\partial\omega}{\partial\omega_2}\right)\frac{dJ}{d\omega} = \left(\frac{\eta_1}{\omega_2} - \frac{\omega_1\eta_2}{\omega_2^2}\right)\frac{dJ}{d\omega}$$

und also mit Benutzung der Legendreschen Relation (1) S. 310:

(12) $$D_\eta(J) = 2i\pi\frac{dJ}{-\omega_2^2\cdot d\omega}.$$

Hier tritt im Nenner das Differential:

$$(13)\qquad -\omega_1^2\cdot d\omega = \omega_1\cdot d\omega_2 - \omega_2\cdot d\omega_1$$

auf; *der invariante Charakter dieses Differentials „zweiter Dimension" ist auch wieder unmittelbar einleuchtend,* insofern ja die $d\omega_1$, $d\omega_2$ sich zu den ω_1, ω_2 kogredient substituieren.

Auf Grund der Gleichung (11) können wir übrigens *mittelst des Prozesses D_η aus der Modulfunktion erster Stufe J die drei Modulformen g_2, g_3 und Δ berechnen;* wie man leicht zeigt, gelten die Darstellungen:

$$(14)\quad g_2=\frac{[D_\eta(J)]^2}{12\,J(J-1)},\quad g_3=-\frac{[D_\eta(J)]^3}{216\,J^2(J-1)},\quad \Delta=\frac{[D_\eta(J)]^6}{1728\,J^4(J-1)^3}.$$

Zu weiteren wichtigen Folgerungen gibt die Anwendung der Differentiationsprozesse auf die Perioden ω_1, ω_2 und η_1, η_2 selbst Anlaß. Wir gewinnen hierbei Differentialgleichungen, denen die Perioden in bezug auf die „Invarianten" g_2, g_3 genügen. Wir kommen hierauf unten ausführlich zurück.

§ 8. Die doppeltperiodischen Funktionen erster Stufe als Funktionen dreier Argumente.

Während wir früher die elliptischen Funktionen eines gegebenen Moduls ω oder einer gegebenen absoluten Invariante J zu einem „Körper" zusammenfaßten und unsere Betrachtungen wesentlich auf die Funktionen eines einzelnen solchen Körpers richteten, eröffnen uns die letzten Entwicklungen über Modulfunktionen die Möglichkeit, *alle diese Körper elliptischer Funktionen erster Stufe zusammen zu betrachten, indem wir u, ω_1 und ω_2 zugleich in den bekannten Gebieten als willkürlich variabel annehmen.* Dabei erscheinen die σ, ζ, $\wp$, $\wp'$, ... als *eindeutige Funktionen dreier Argumente u, ω_1, ω_2,* was wir schon oben durch die ausführliche Schreibweise:

$$(1)\qquad \sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\quad \zeta(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\quad \wp(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\ \ldots$$

zum Ausdruck brachten.

In Abhängigkeit von ω_1, ω_2 zeigen die Funktionen (1) nach S. 258 ff. insoweit durchweg das Verhalten von Modulformen erster Stufe, als sie gegenüber den Substitutionen der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ invariant sind. Gegenüber den Translationen der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ bleiben sie entweder invariant (elliptische Funktionen erster Stufe im engeren Sinne $\wp$, $\wp'$, ...), oder sie zeigen ein charakteristisches kovariantes Verhalten (σ-Funktion, Integral ζ sowie übrigens die elliptischen Funktionen zweiter und dritter Art (vgl. S. 217)). Um dies Sachverhältnis gruppentheoretisch zu formulieren, bilden wir durch Kombination jeder Substitution von $\Gamma^{(\omega)}$ mit

jeder von $\Gamma^{(\omega)}$ *die etwa durch* $\Gamma^{(u,\omega)}$ *zu bezeichnende Gruppe aller ternären Substitutionen:*

$$(2)\qquad \begin{cases} u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ \omega_1' = \qquad \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' = \qquad \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases}$$

wo die $m_1, m_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ die bekannte Bedeutung haben. *Gegenüber den Substitutionen dieser ternären Gruppe* $\Gamma^{(u,\omega)}$ *sind dann eben die elliptischen Funktionen erster Stufe erster Art durchweg invariant, während diejenigen der zweiten und dritten Art (unter ihnen die σ-Funktion) sowie das Integral ζ in bekannter Weise kovariant sind.*

Weiter ergibt sich aus der Produktentwicklung (1) S. 258 der σ-Funktion und aus den Teilbruchreihen (2) und (3) S. 260 für $\wp$, $\wp'$ und ζ, *daß diese Funktionen in ihren drei Argumenten homogen sind, und zwar sind die Dimensionen von $\sigma, \zeta, \wp, \wp'$ bzw.* $1, -1, -2, -3$. Dem entspricht es, daß wir z. B. für die Funktionen $\wp$ und $\wp'$ in den Fourierschen Reihen (14) S. 270 Darstellungen von $\omega_2^2 \cdot \wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$ und $\omega_2^3 \cdot \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$ in den „beiden" Argumenten $\frac{u}{\omega_2}$ und q^2 allein gewinnen konnten.[1])

Der analytische Charakter unserer Funktionen geht besonders einleuchtend aus der Darstellung (19) S. 272 der σ-Funktion hervor, welcher wir die Gestalt geben können:

$$(3)\qquad \frac{\pi}{\omega_2}\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_2}\right)^2 \omega_2\eta_2} \cdot \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)} \sin\frac{(2n+1)\pi u}{\omega_2}}{1 - 3q^{1\cdot 2} + 5q^{2\cdot 3} - 7q^{3\cdot 4} + \cdots}.$$

Die rechts im Zähler stehende Reihe ist bei gegebenem q^2 mit einem absoluten Betrage $|q^2| < 1$ in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene absolut und gleichmäßig konvergent. Wegen des bekannten Verhaltens der σ-Funktion gegenüber den Substitutionen (2) dürfen wir sogar ω auf den Diskontinuitätsbereich der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ beschränken (wo alsdann:

$$|q^2| \leq e^{-\pi\sqrt{3}}$$

zutrifft) und u auf ein Periodenparallelogramm. Wir haben demgemäß in (3) *eine Funktion der beiden Argumente $\frac{u}{\omega_2}$ und q^2 oder auch $\frac{u}{\omega_2}$ und ω vor uns, die bei stehendem Werte des einen Argumentes eine „analytische" Funktion des anderen wird, ein Satz, der sich sofort auch auf die übrigen betrachteten Funktionen überträgt,* insofern sich dieselben durch die σ-Funktion in bekannter Art darstellen.

---

1) Bei der Darstellung von $\omega_2^2\wp$ hat man das rechts auftretende Glied $\eta_2\omega_2$ nach (15) S. 271 in q^2 auszudrücken.

Zu bemerkenswerten Ergebnissen führt die Ausübung der Prozesse D_ω und D_η auf unsere Funktionen. D_ω wird stets zur „Homogeneitätsrelation“ führen, also z. B. zu den Gleichungen:

$$u\frac{\partial \sigma}{\partial u} + D_\omega(\sigma) = \sigma, \quad u\frac{\partial \wp}{\partial u} + D_\omega(\wp) = -2\wp, \ldots$$

Ziehen wir die algebraische Gestalt (8) S. 317 des Prozesses D_ω heran, so ergeben sich Gleichungen folgender Art:

$$(4) \qquad \begin{cases} 4g_2\dfrac{\partial \sigma}{\partial g_2} + 6g_3\dfrac{\partial \sigma}{\partial g_3} = u\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} - \sigma, \\ 4g_2\dfrac{\partial \wp}{\partial g_2} + 6g_3\dfrac{\partial \wp}{\partial g_3} = u\wp' + 2\wp, \ldots \end{cases}$$

Wir haben hier lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung unserer Funktionen vor uns, die z. B. durch die Potenzreihenentwicklungen (5) S. 208 und (1) S. 200, deren Koeffizienten ganze Funktionen der g_2, g_3 sind, identisch befriedigt werden. Doch bringen diese Differentialgleichungen natürlich nur zum Ausdruck, daß jedes Glied der einzelnen Potenzreihe eine homogene Funktion der jeweils in Betracht kommenden Dimension in den ω_1, ω_2 ist.

Etwas umständlicher ist die Feststellung der Wirkung des Differentiationsprozesses D_η. Man kann hier entweder mit analytischen Umformungen arbeiten oder funktionentheoretische Überlegungen heranziehen, wie wir am Beispiele der $\wp$-Funktion darlegen wollen. Betrachten wir $D_\eta(\wp)$ insbesondere in Abhängigkeit von u und schreiben:

$$D_\eta(\wp) = \varphi(u),$$

so folgt durch Differentiation nach u:

$$\frac{\partial}{\partial u} D_\eta(\wp) = D_\eta(\wp') = \varphi'(u),$$

da bei unserer analytischen Funktion $\wp$ die Abänderung der Differentiationsreihenfolge statthaft ist.[1]) Nun gilt aber:

$$(5) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad 2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Die Anwendung von D_η auf die erste dieser Gleichungen liefert:

$$2\wp' D_\eta(\wp') = 12\wp^2 D_\eta(\wp) - g_2 D_\eta(\wp) - \wp D_\eta(g_2) - D_\eta(g_3)$$

also mit Benutzung der zweiten Gleichung (5) und der Relationen (10) S. 317 weiter:

$$\wp' \cdot \varphi'(u) - \wp''\varphi(u) - 3g_3\wp - \tfrac{1}{6}g_2^2 = 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi(u)$, die nach elementaren Methoden lösbar ist. Zur Erleichterung der Lösung

1) Vgl. „Osgood“, S. 305 ff.

führen wir an Stelle der gesuchten Funktion $\varphi(u)$ zunächst die Funktion $\psi(u)$ mittelst der Substitution:

$$\varphi = \psi - \wp'\zeta - 2\wp^2$$

ein. Auf Grund der Relationen (5) sowie der Gleichung (6) S. 199 transformiert sich die Differentialgleichung für $\varphi(u)$ in folgende für die Funktion $\psi(u)$:

$$\psi'(u) - \frac{\wp''}{\wp'}\psi(u) + \tfrac{1}{3}g_2\frac{\wp''}{\wp'} = 0,$$

deren allgemeines Integral nach einer bekannten Elementarformel:

$$\psi(u) = \tfrac{1}{3}g_2 + C\wp'$$

ist, unter C eine von u unabhängige Größe verstanden. Zur Bestimmung von C dienen die Reihen nach Potenzen von u, welche sich auf die Umgebung von $u = 0$ beziehen. Aus (1) S. 200 folgt zunächst:

$$D_\eta(\wp) = \varphi = -\frac{3g_3}{10}u^2 - \frac{g_2^2}{84}u^4 - \frac{g_2 g_3}{100}u^6 - \cdots,$$

während die Gleichungen (1) S. 200 und (2) S. 201 liefern:

$$\wp'\zeta + 2\wp^2 = \tfrac{1}{3}g_2 + \frac{3g_3}{10}u^2 + \frac{g_2^2}{84}u^4 + \frac{g_2 g_3}{100}u^6 + \cdots$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$\psi(u) = \tfrac{1}{3}g_2 + * + * + * + \cdots,$$

wobei die Sterne andeuten sollen, daß jedenfalls die drei Glieder mit u^2, u^4 und u^6 ausfallen. Da hiernach ψ im Punkte $u = 0$ endlich bleibt, so ist $C = 0$ und *also ψ mit der von u unabhängigen Größe $\frac{1}{3}g_2$ identisch,* was die eben angegebene Reihe von ψ, soweit sie entwickelt ist, bestätigt. Für $D_\eta(\wp) = \varphi$ ergibt sich hieraus:

$$D_\eta(\wp) = -\wp'\zeta - 2\wp^2 + \tfrac{1}{3}g_2.$$

Zum gleichen Resultat führt folgende funktionentheoretische Betrachtung. Indem wir an der Abkürzung $D_\eta(\wp(u)) = \varphi(u)$ festhalten, folgt durch Ausübung des Prozesses D_η auf die Gleichung:

$$\wp(u + \omega_1 \mid \omega_1, \omega_2) = \wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

als Periodeneigenschaft von $\varphi(u)$ mit Rücksicht auf die Periodizität von $\wp'$:

$$\eta_1\wp'(u) + \varphi(u + \omega_1) = \varphi(u).$$

Ersetzen wir hier η_1 durch $(\zeta(u + \omega_1) - \zeta(u))$, so folgt:

$$\varphi(u + \omega_1) + \zeta(u + \omega_1)\,\wp'(u + \omega_1) = \varphi(u) + \zeta(u)\wp'(u).$$

Hiernach hat $(\varphi(u) + \zeta(u)\wp'(u))$ die Periode ω_1, und man zeigt auf demselben Wege, daß dieser Ausdruck auch die Periode ω_2 hat. Demgemäß ist auch:

(6) $$\varphi(u) + \zeta(u)\wp'(u) + 2\wp(u)^2,$$

d. h. also die Funktion $\psi(u)$ doppeltperiodisch. Der einzige im Periodenparallelogramm mögliche Pol liegt bei $u = 0$; hier aber ist die Funktion (6) endlich und hat, wie wir wissen, den Wert $\frac{1}{3}g_2$. Sie ist also unabhängig von u mit $\frac{1}{3}g_2$ identisch. *Die Ausübung des Differentiationsprozesses D_η auf $\wp$ liefert das Resultat:*

(7) $$D_\eta(\wp) = -\zeta\wp' - 2\wp^2 + \tfrac{1}{3}g_2.$$

Benutzen wir die algebraische Gestalt (9) S. 317 von D_η und ziehen die zweite Gleichung (4) heran, so gewinnen wir zwei Gleichungen:

$$4g_2\frac{\partial\wp}{\partial g_2} + 6g_3\frac{\partial\wp}{\partial g_3} = 2\wp + u\wp',$$
$$6g_3\frac{\partial\wp}{\partial g_2} + \tfrac{1}{3}g_2^2\frac{\partial\wp}{\partial g_3} = 2\wp^2 + \zeta\wp' - \tfrac{1}{3}g_2,$$

aus denen sich die Ableitungen von $\wp$ nach g_2 und g_3 berechnen lassen. Das Resultat ist:

(8) $$\begin{cases} \varDelta\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2} = \tfrac{1}{2}g_2^2\wp - 9g_3\wp^2 + (\tfrac{1}{4}g_2^2u - \tfrac{9}{2}g_3\zeta)\,\wp' + \tfrac{3}{2}g_2g_3, \\ \varDelta\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3} = -9g_3\wp + 6g_2\wp^2 - (\tfrac{9}{2}g_3u - 3g_2\zeta)\,\wp' - g_2^2. \end{cases}$$

Ähnliche Entwicklungen kann man für $\wp'$, ζ und σ anstellen. Die Wirkung von D_η auf ζ findet man am einfachsten durch Integration der Gleichung (7) in bezug auf u, indem man diese Gleichung mittelst bekannter Relationen in die Gestalt setzt:

$$D_\eta(\wp) = -\frac{\partial}{\partial u}(\zeta\wp) - \tfrac{1}{2}\wp'' + \tfrac{1}{12}g_2.$$

Integration und Zeichenwechsel ergeben:

$$D_\eta(\zeta) = \zeta\wp + \tfrac{1}{2}\wp' - \tfrac{1}{12}g_2u + C,$$

wo C wieder von u unabhängig ist. Man stellt aber leicht fest, daß für $u=0$ die linke Seite verschwindet, während die rechts stehende Funktion von u für $u = 0$ den Wert C annimmt. Es folgt also $C = 0$ und damit:

(9) $$D_\eta(\zeta) = \zeta\wp + \tfrac{1}{2}\wp' - \tfrac{1}{12}g_2u.$$

Durch nochmalige Integration und entsprechende Bestimmung der „Konstanten" ergibt sich weiter:

(10) $$D_\eta(\log\sigma) = -\tfrac{1}{2}\zeta^2 + \tfrac{1}{2}\wp - \tfrac{1}{24}g_2u^2.$$

Nach (1) S. 212 können wir diese Relation auch in die Gestalt setzen:

$$\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right)^2 + 2D_\eta(\log\sigma) + \tfrac{1}{12}g_2u^2 = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung und benutzt die algebraische Gestalt (9) S. 317 des Prozesses D_η, *so ergibt sich die folgende lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

(11) $$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} - 12g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} - \tfrac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} + \tfrac{1}{12}g_2u^2\sigma = 0$$

der Funktion $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$, *für welche wir dieser Differentialgleichung entsprechend übrigens besser die* S. 209 *eingeführte Schreibweise* $\sigma(u; g_2, g_3)$ *zu gebrauchen hätten.*

Es ist dies die bereits S. 209 erwähnte Differentialgleichung, vermittelst deren in der S. 117 genannten Schrift von Schwarz die Koeffizienten der Potenzreihe für die σ-Funktion bis zur Potenz u^{35} berechnet sind. Trägt man den Ansatz:

$$\sigma(u) = u + * + G_2 u^5 + G_3 u^7 + G_4 u^9 + G_5 u^{11} + \cdots$$

in die Differentialgleichung ein, so muß dieselbe in u identisch befriedigt sein. Setzt man aber, nachdem man die linke Seite der entstehenden Gleichung nach Potenzen von u angeordnet hat, den Koeffizienten von u^{2n-1} gleich 0, so ergibt sich die Rekursionsformel:

$$(12) \qquad n(2n+1)\, G_n = -D_\eta\,(G_{n-1}) - \tfrac{1}{24} g_2\, G_{n-2},$$

aus der man die Koeffizienten der fraglichen Reihe schrittweise berechnen kann.

§ 9. Differentialgleichungen der Perioden in bezug auf die Invarianten. Inversion der Modulfunktionen.

Zu wichtigen Folgerungen führt die Anwendung der Differentiationsprozesse D_ω und D_η auf die Perioden ω_1, ω_2 und η_1, η_2 selber. Wenn wir hierbei die algebraische Gestalt dieser Prozesse in Anwendung bringen, haben wir uns auf den Standpunkt zu stellen, *daß wir die Perioden* ω_1, ω_2 *und* η_1, η_2 *der ursprünglichen algebraischen Theorie entsprechend als Funktionen der Invarianten* g_2, g_3 *ansehen.* Insbesondere für die ω_1, ω_2 läuft dies darauf hinaus, daß wir die Gleichungen $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2)$, welche die beiden Invarianten als eindeutige Modulformen darstellen, invertieren in $\omega_1 = \omega_1(g_2, g_3)$, $\omega_2 = \omega_2(g_2, g_3)$. Die absolute Invariante $J = J(\omega)$ war eine eindeutige Funktion des Periodenquotienten ω allein, deren Inversion demnach eine Funktion $\omega = \omega(J)$ von J allein liefert. Das Feld dieser Funktion ist die S. 303 betrachtete unendlich-blättrige Riemannsche Fläche F_∞, welche ausschließlich bei $J = 0, 1$ und ∞ verzweigt war; jeder Zweig $\omega'(J)$ dieser Funktion stellte sich in einem Anfangszweige $\omega(J)$ als ganzzahlige lineare Funktion (5) S. 303 der Determinante 1 dar.

Für diese zu den Modulformen g_2, g_3 und zur Modulfunktion J inversen Funktionen haben wir nun zunächst aus den Prozessen D_ω und D_η eine Reihe von Differentialgleichungen abzuleiten, die dann ihrerseits zu weiteren Folgerungen Anlaß geben.

Ist k ein beliebiger unter den beiden Indizes 1 und 2, so haben wir erstlich die beiden Homogeneitätsrelationen:

$$D_\omega(\omega_k) = \omega_k, \qquad D_\omega(\eta_k) = -\eta_k,$$

die bei Benutzung der algebraischen Gestalt (8) S. 317 des Prozesses D_ω die folgenden *linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* liefern:

$$(1) \qquad \begin{cases} 4g_2 \dfrac{\partial \omega_k}{\partial g_2} + 6g_3 \dfrac{\partial \omega_k}{\partial g_3} + \omega_k = 0, \\ 4g_2 \dfrac{\partial \eta_k}{\partial g_2} + 6g_3 \dfrac{\partial \eta_k}{\partial g_3} - \eta_k = 0. \end{cases}$$

Die Wirkung von D_η auf ω_k ist einfach $D_\eta(\omega_k) = \eta_k$. Die algebraische Gestalt von D_η liefert demnach folgende *zweite lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für* ω_k

$$(2) \qquad 18g_3 \frac{\partial \omega_k}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial \omega_k}{\partial g_3} + 3\eta_k = 0,$$

welche man mit der ersten Gleichung (1) zu einer Darstellung der Ableitungen von ω_k nach g_2 und g_3 in ω_k, η_k, g_2 und g_3 vereinigen kann.

Etwas umständlicher ist die Berechnung von $D_\eta(\eta_k)$. Übt man auf die aus der Legendreschen Relation (1) S. 310 folgende Gleichung $\omega_1\eta_2 = 2i\pi + \omega_2\eta_1$ den Prozeß D_η aus, so ergibt sich mit Rücksicht auf $D_\eta(\omega_k) = \eta_k$:

$$\omega_1 D_\eta(\eta_2) + \eta_2\eta_1 = \omega_2 D_\eta(\eta_1) + \eta_1\eta_2,$$

und also besteht jedenfalls die Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{D_\eta(\eta_2)}{\omega_2} = \frac{D_\eta(\eta_1)}{\omega_1}.$$

Da nun ω_2 und η_2 gegenüber der Erzeugenden S der homogenen Modulgruppe (vgl. S. 298) invariant sind und der Prozeß D_η gleichfalls invarianten Charakter hat, so steht auf der linken Seite der Gleichung (3) ein Ausdruck, der gegenüber S selber invariant ist. Da derselbe aber zufolge der Gleichung (3) auch bei Ausübung der zweiten erzeugenden Substitution T der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ in sich übergeht, so ist er gegenüber der ganzen $\Gamma^{(\omega)}$ invariant. Die Abhängigkeit der Periode η_2 von ω_1, ω_2, wie sie z. B. in der Gleichung (15) S. 271 zum Ausdruck kommt, zeigt daraufhin, daß in (3) eine ganze Modulform $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension vorliegt, welche also nach S. 310 abgesehen von einem konstanten Faktor c mit $g_2(\omega_1, \omega_2)$ identisch sein muß:

$$\frac{D_\eta(\eta_2)}{\omega_2} = c g_2(\omega_1, \omega_2).$$

Nun folgt aus (15) S. 271:

$$\eta_2 = \tfrac{1}{3}\pi^2\omega_2^{-1}(1 - 24q^2 - \cdots)$$

und daraus weiter:

$$\frac{D_\eta(\eta_2)}{\omega_2} = -\tfrac{1}{9}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 + \cdots,$$

wo die ausgelassenen Glieder mit q^2 verschwinden. Der Vergleich mit dem Anfangsgliede der Entwicklung von g_2 nach Potenzen von q^2 (vgl. (2) S. 305) ergibt $c = -\frac{1}{12}$ und damit:

$$\frac{D_\eta(\eta_1)}{\omega_1} = \frac{D_\eta(\eta_2)}{\omega_2} = -\tfrac{1}{12} g_2.$$

Dasselbe Ergebnis kann man auch aus (9) S. 322 gewinnen. Setzt man zur Abkürzung $D_\eta(\zeta) = \psi(u)$ und wendet auf die Gleichung:

$$\zeta(u + \omega_k \mid \omega_1, \omega_2) = \zeta(u \mid \omega_1, \omega_2) + \eta_k$$

dieselbe Überlegung an, wie S. 321 auf die entsprechende die $\wp$-Funktion betreffende Gleichung, so folgt bei Benutzung von (9) S. 322:

$$D_\eta(\eta_k) = -\tfrac{1}{12} g_2 \omega_k .$$

Unter Heranziehung des algebraischen Ausdrucks von D_η folgt als *zweite lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für* η_k:

$$(4)\qquad 72 g_3 \frac{\partial \eta_k}{\partial g_2} + 4 g_2^2 \frac{\partial \eta_k}{\partial g_3} - g_2 \omega_k = 0.$$

Man kann diese Gleichung mit der zweiten Gleichung (1) zur Darstellung der Ableitungen von η_k nach g_2 und g_3 in ω_k, η_k, g_2 und g_3 verbinden.

Verstehen wir unter $\mu(\omega_1, \omega_2)$ eine zweckmäßig gewählte homogene Funktion $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension der ω_1, ω_2, so werden die mit dem Multiplikator μ versehenen Perioden:

$$\mu\omega_1 = \Omega_1, \qquad \mu\omega_2 = \Omega_2$$

Ausdrücke „nullter" Dimension in den ω_1, ω_2 sein, die demnach Funktionen von J allein sind. Man nennt Ω_k die mit dem Multiplikator μ *„normierten Perioden"* und wird entsprechend als normierte Perioden des Integrals zweiter Gattung:

$$\mu^{-1}\eta_1 = H_1, \qquad \mu^{-1}\eta_2 = H_2$$

anzusetzen haben, die dann ihrerseits auch Funktionen von J allein sind. An Stelle der bisherigen partiellen Differentialgleichungen treten alsdann für die mit μ normierten Perioden Ω und H gewöhnliche Differentialgleichungen in bezug auf J als unabhängige Variabele.

Um diese Differentialgleichung für Ω_k aufzustellen, entwickeln wir die Gleichung $\eta_k = D_\eta(\omega_k)$ so:

$$\mu H_k = D_\eta(\mu^{-1}\Omega_k) = \mu^{-1} D_\eta(\Omega_k) + \Omega_k D_\eta(\mu^{-1})$$

$$\mu H_k = \mu^{-1}\frac{d\Omega_k}{dJ} \cdot D_\eta(J) - \frac{\Omega_k}{\mu^2} D_\eta(\mu) \cdot$$

Setzen wir für $D_\eta(J)$ seinen Ausdruck (11) S. 317 in g_2, g_3, Δ ein und lösen

nach $\frac{d\Omega_k}{dJ}$ auf, so ergibt sich die gewünschte Differentialgleichung. Eine entsprechende Umgestaltung kann man an $D_\eta(\eta_k) = -\frac{1}{12}g_2\omega_k$ anknüpfen: *Die normierten Perioden Ω_k, H_k befriedigen als Funktionen von J das System der linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{d\Omega_k}{dJ} = -\frac{\Delta D_\eta(\mu)}{18\mu g_2^2 g_3}\,\Omega_k - \frac{\mu^2\Delta}{18 g_2^2 g_3}\,H_k, \\ \frac{dH_k}{dJ} = \frac{\Delta}{216\mu^2 g_2 g_3}\,\Omega_k + \frac{\Delta D_\eta(\mu)}{18\mu g_2^2 g_3}\,H_k. \end{cases}$$

Unter den verschiedenen Multiplikatoren μ, mit denen man in angegebener Art die Perioden normiert hat, zeichnet sich der Multiplikator $\mu = \sqrt[12]{\Delta}$ dadurch aus, daß man ihn vermittelst der aus (6) S. 313 hervorgehenden Gleichung:

$$\sqrt[12]{\Delta} = \frac{2\pi}{\omega_2}\, e^{\frac{\pi i \omega}{6}} \left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})\right)^2$$

als eine *eindeutige Funktion von* ω_1, ω_2 erklären kann. Derselbe bietet zugleich den Vorteil, daß $D_\eta(\mu)$ zufolge (10) S. 317 verschwindet. Ersetzen wir die Koeffizienten in (5), soweit sie nach Eintragung von $\mu = \sqrt[12]{\Delta}$ nicht verschwinden, durch ihre Ausdrücke in J, so ergibt sich: *Für die normierten Perioden:*

$$(6)\qquad \Omega_k = \omega_k \sqrt[12]{\Delta}, \qquad H_k = \frac{\eta_k}{\sqrt[12]{\Delta}}$$

nehmen die Differentialgleichungen (5) *die Gestalt an:*

$$(7)\qquad \frac{d\Omega_k}{dJ} = -\frac{H_k}{2\sqrt{3}\,J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{dH_k}{dJ} = \frac{\Omega_k}{24\sqrt{3}\,J^{\frac{1}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus ergibt sich sogleich eine weitere wichtige Folgerung. Man trage den aus der ersten Gleichung (7) hervorgehenden Ausdruck:

$$H_k = -2\sqrt{3}\,J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}\,\frac{d\Omega_k}{dJ}$$

in die zweite Gleichung (7) für H_k ein. Durch Ordnung der entstehenden Gleichung folgt sofort: *Die in* (6) *gegebenen normierten Perioden Ω_1, Ω_2 befriedigen als Funktionen von J die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$(8)\qquad J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \left(\tfrac{7}{6}J - \tfrac{2}{3}\right)\frac{d\Omega}{dJ} + \tfrac{1}{144}\,\Omega = 0,$$

deren Koeffizienten in J rational sind. Indem man ebenso den aus der zweiten Gleichung (7) hervorgehenden Ausdruck für Ω_k in die erste Gleichung einsetzt, folgt *als lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die in* (6) *gegebenen normierten Perioden H_1, H_2:*

$$(9)\qquad J(J-1)\frac{d^2 H}{dJ^2} + \left(\tfrac{5}{6}J - \tfrac{1}{3}\right)\frac{dH}{dJ} + \tfrac{1}{144}\,H = 0.$$

Um eine zweite naheliegende Normierung zu erklären, erinnern wir daran, daß nach S. 317 der Ausdruck $D_\eta(J)$ eine Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Wir setzen unter Benutzung von (11) S. 317:

$$\mu = \frac{i}{3\sqrt{2}}\sqrt{D_\eta(J)} = g_2\sqrt{\frac{g_3}{\Delta}},$$

so daß wir hier freilich mit einer Funktion zu tun haben, welche im Innern der ω-Halbebene, nämlich in den Nullpunkten von g_3 verzweigt ist. Die mit diesem Multiplikator normierten Perioden Ω_k und H_k sind:

(10) $$\Omega_k = \omega_k \frac{g_2\sqrt{g_3}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad H_k = \eta_k \frac{\sqrt{\Delta}}{g_2\sqrt{g_3}};$$

für diese Ω_k merken wir noch die mittelst der Relation (12) S. 317 ableitbaren Gestalten an:

(11) $$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\pi i}{9}}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\frac{d\omega}{dJ}}}, \qquad \Omega_2 = \sqrt{\frac{\pi i}{9}}\frac{1}{\sqrt{\frac{d\omega}{dJ}}}.$$

Die Wirkung des Prozesses D_η auf den neuen Multiplikator ist, wie man leicht feststellt:

$$D_\eta\left(\frac{g_2\sqrt{g_3}}{\sqrt{\Delta}}\right) = -\frac{g_2^3 + 36 g_3^2}{6\sqrt{g_3}\sqrt{\Delta}}.$$

Aus dem allgemeinen Ansatze (5) ergeben sich daraufhin *für die normierten Perioden* (10) *die Differentialgleichungen*:

(12) $$\begin{cases} \dfrac{d\Omega_k}{dJ} = \dfrac{7J-4}{12J(J-1)}\Omega_k - \frac{1}{18}H_k, \\ \dfrac{dH_k}{dJ} = \dfrac{1}{8J(J-1)}\Omega_k - \dfrac{7J-4}{12J(J-1)}H_k \end{cases}$$

mit rational von J abhängenden Koeffizienten.

Diese Differentialgleichungen kann man unter Zerlegung der Koeffizienten in Partialbrüche auch so schreiben:

$$12\frac{d\Omega_k}{dJ} = \left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J-1}\right)\Omega_k - \frac{2}{3}H_k,$$

$$12\frac{dH_k}{dJ} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J-1}\right)\Omega_k - \left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J-1}\right)H_k.$$

Differenziert man die erste Gleichung nochmals nach J, so folgt:

$$12\frac{d^2\Omega_k}{dJ^2} = \left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J-1}\right)\frac{d\Omega_k}{dJ} - \frac{2}{3}\frac{dH_k}{dJ} - \left(\frac{4}{J^2} + \frac{3}{(J-1)^2}\right)\Omega_k$$

Multipliziert man mit 12 und setzt für $12\dfrac{d\Omega_k}{dJ}$, $12\dfrac{dH_k}{dJ}$ die aus den beiden voraufgehenden Gleichungen folgenden Ausdrücke in Ω_k, H_k, J ein, so zieht sich das Ergebnis leicht auf die folgende Gestalt zusammen:

$$144\frac{d^2\Omega_k}{dJ^2} + \left(\frac{32}{J^2} + \frac{27}{(J-1)^2} - \frac{23}{J(J-1)}\right)\Omega_k = 0.$$

Also folgt der Satz : *Die in* (10) *erklärten Perioden* Ω_k *befriedigen die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \left(\frac{2}{9J^2} + \frac{3}{16(J-1)^2} - \frac{23}{144J(J-1)}\right)\Omega = 0 \tag{13}$$

mit einem in J rationalen Koeffizienten. Diese Gleichung ist gegenüber der Gleichung (8) für die mit $\sqrt[12]{\Delta}$ normierten Perioden dadurch ausgezeichnet, daß in ihr kein Glied mit der Ableitung erster Ordnung auftritt.

Die Gleichung (13) führt uns leicht zu einer vielfach betrachteten *Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher der Periodenquotient* ω *als Funktion von J genügt.* Indem wir die Gleichung (13) für Ω_1 und Ω_2 einzeln anschreiben, folgt durch Kombination beider Gleichungen:

$$\Omega_2 \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} - \Omega_1 \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} = 0.$$

Da nun ω auch als Quotient der beiden normierten Perioden (11) geschrieben werden kann, so gilt:

$$\frac{d\omega}{dJ} = \Omega_2^{-2}\left(\Omega_2 \frac{d\Omega_1}{dJ} - \Omega_1 \frac{d\Omega_2}{dJ}\right),$$

und hieraus folgt weiter durch logarithmische Differentiation mit Rücksicht auf die letzte Gleichung:

$$\frac{\left(\frac{d^2\omega}{dJ^2}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)} = -2\frac{\left(\frac{d\Omega_2}{dJ}\right)}{\Omega_2}. \tag{14}$$

Nochmalige Differentiation nach J liefert:

$$\frac{\left(\frac{d^3\omega}{dJ^3}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)} - \left(\frac{\left(\frac{d^2\omega}{dJ^2}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)}\right)^2 = -2\frac{\left(\frac{d^2\Omega_2}{dJ^2}\right)}{\Omega_2} + 2\left(\frac{\left(\frac{d\Omega_2}{dJ}\right)}{\Omega_2}\right)^2.$$

Das letzte Glied rechter Hand wird entfernt, indem man das mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte Quadrat der Gleichung (14) abzieht; das erste Glied der rechten Seite berechnet sich aber aus der für Ω_2 angesetzten Gleichung (13) rational in J. Man gelangt zu dem Ergebnis: *Die zur Modulfunktion* $J(\omega)$ *inverse Funktion* $\omega(J)$ *befriedigt die Differentialgleichung dritter Ordnung:*

$$\frac{\left(\frac{d^3\omega}{dJ^3}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{d^2\omega}{dJ^2}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)}\right)^2 = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(J-1)^2} - \frac{23}{72J(J-1)}. \tag{15}$$

Bezeichnen wir den hier links stehenden Differentialausdruck dritter Ordnung[1]) kurz durch das Symbol $[\omega]_J$:

$$(16) \qquad \frac{\left(\frac{d^3\omega}{dJ^3}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{d^2\omega}{dJ^2}\right)}{\left(\frac{d\omega}{dJ}\right)}\right)^2 = [\omega]_J,$$

so können wir die durch $\omega(J)$ befriedigte Differentialgleichung (15) in die Gestalt kleiden:

$$[\omega]_J = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(J-1)^2} - \frac{23}{72J(J-1)}.$$

Die wesentliche Eigenschaft des Differentialausdrucks $[\omega]_J$ ist die, *daß derselbe invariant gegenüber einer beliebigen linearen Transformation von ω ist.*[2]) Indem wir uns darauf berufen, daß die sämtlichen Zweige der unendlich vieldeutigen Funktion $\omega(J)$ lineare Funktionen eines ersten Zweiges sind, hätten wir auch ohne die voraufgehenden Rechnungen in $[\omega]_J$ eine eindeutige und, wie leicht zu zeigen ist, rationale Funktion von J erkennen können. Auch kann man hieraus mittelst funktionentheoretischer Schlüsse die Gleichung (15) explizite aufbauen, nämlich durch Bestimmung der Pole usw. der rationalen Funktion $[\omega]_J$. In ähnlicher Weise kann man durch Betrachtung der normierten Perioden in der J-Ebene bzw. im Felde $\mathbf{F}_\infty$ der Funktion $\omega(J)$ die obigen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für diese normierten Perioden aufbauen. Doch gehören diese Entwicklungen in eine ausführliche Theorie der Modulfunktionen hinein.[3])

§ 10. Die normierten Perioden als hypergeometrische Funktionen von J.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen (8), (9) und (13) in § 9 ordnen sich der in der Einleitung, S. 97 ff., entwickelten allgemeinen Theorie solcher Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter. Indem wir die Sätze jener Theorie auf die hier vorliegenden Differentialgleichungen in Anwendung bringen, gelangen wir freilich mehrfach zu bereits bekannten Ergebnissen zurück. Andererseits gewinnen wir

1) Der Ausdruck (16) wird vielfach als „Schwarzscher Differentialausdruck“ bezeichnet; s. H. A. Schwarz, „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Funktion eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes ist,“ Journ. f. Math. Bd. 75 (1872) S. 292.

2) S. Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder“. (Leipzig 1884), S. 74.

3) Vgl. „Modulfunktionen“ Bd. 1, S. 32 ff. sowie Klein und Fricke, „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“. Bd. 2, S. 117 ff.

aber auch wertvolle Ergänzungen der bisherigen Resultate in Anbetracht *der analytischen Darstellung der Perioden als Funktionen von J.*

Wir wollen uns hierbei auf die Perioden des Integrals erster Gattung und auf die Normierung durch $\sqrt[12]{\varDelta}$ beschränken. Setzen wir $\omega_k\sqrt[12]{\varDelta} = \Omega_k$, so ergibt sich übrigens für die anderen, unter (10) S. 327 erklärten normierten Perioden einfach:

$$\omega_k \frac{g_2\sqrt{g_3}}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}}}\,\Omega_k \sqrt[3]{J}\,\sqrt[4]{J-1},$$

so daß wir die Darstellung dieser normierten Perioden auf die der $\Omega_k = \omega_k\sqrt[12]{\varDelta}$ zurückführen können. Die Gleichung:

$$(1)\qquad J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \left(\tfrac{7}{6}J - \tfrac{2}{3}\right)\frac{d\Omega}{dJ} + \tfrac{1}{144}\,\Omega = 0$$

für die $\Omega_k = \omega_k\sqrt[12]{\varDelta}$ ist nun insbesondere eine *„hypergeometrische" Differentialgleichung* (1) S. 105 mit folgenden Werten der Parameter α, β, γ dieser Gleichung:

$$(2)\qquad \alpha = \tfrac{1}{12},\quad \beta = \tfrac{1}{12},\quad \gamma = \tfrac{2}{3}.$$

Die normierten Perioden Ω_k nennen wir dieserhalb *„hypergeometrische" Funktionen der absoluten Invariante J* und haben für die Potenzreihendarstellung dieser Funktionen die Hilfsmittel von S. 109ff. zur Verfügung.

An *„singulären" Punkten* weist die Differentialgleichung (1) wie die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung (1) S. 105 die drei Punkte $J = 0, 1, \infty$ auf. Ein eindeutig bestimmtes *System linear-unabhängiger Lösungen* $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ wird von den „reduzierten Periodenpaaren" ω_1, ω_2 geliefert, welchen die Punkte ω des oben oft genannten Doppeldreiecks der Fig. 43, S. 179 entsprechen. Für diese beiden partikulären Lösungen Ω_1, Ω_2 ist zunächst das Verhalten bei Umläufen um die singulären Punkte $0, 1, \infty$ festzustellen. Hierbei ist die Tatsache grundlegend, daß zufolge der Gleichung:

$$(3)\qquad \Omega_2 = \omega_2\sqrt[12]{\varDelta} = 2\pi e^{\frac{\pi i\omega}{6}}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right)^2$$

Ω_2 und deshalb auch $\Omega_1 = \omega\,\Omega_2$ im Innern der positiven ω-Halbebene *eindeutige Funktionen von* ω sind.

Umläuft J den Punkt ∞ im positiven Sinne (auf der J-Kugel gedacht), so geht der dem reduzierten Periodenpaar entsprechende Anfangszweig $\omega(J)$ in $\omega' = \omega + 1$ über. Zufolge (3) geht demnach die Partikularlösung $\Omega_2(J)$ der Differentialgleichung (1) über in $\Omega_2' = e^{\frac{\pi i}{6}}\,\Omega_2$, wofür wir auch $\Omega_2' = -i\varrho\,\Omega_2$ schreiben können. Da nun $\Omega_1(J) = \omega\,\Omega_2$

ist, so entspricht dem positiven Umlaufe um den singulären Punkt ∞ die Substitution:

(4) $$\Omega_1' = -i\varrho(\Omega_1 + \Omega_2), \qquad \Omega_2' = -i\varrho\Omega_2$$

des ausgewählten Systems linear-unabhängiger Lösungen der Gleichung (1); im Anschluß an die S. 298 eingeführte Bezeichnungsweise nennen wir die Substitution (4) kurz S. Bei einem positiven Umlaufe um den bei $J = 1$ gelegenen singulären Punkt geht der erste Zweig $\omega(J)$ der unendlich vieldeutigen Funktion ω von J über in $\omega' = \frac{-1}{\omega}$. Dieser Substitution entspricht die S. 298 mit T bezeichnete homogene Substitution $\omega_1' = \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1$, bei der Δ unverändert bleibt. Hiernach geht Ω_2^{12} bei Fortsetzung längs eines positiven Umlaufs um den singulären Punkt $J = 1$ in Ω_1^{12} über, so daß die Partikularlösung Ω_2 bei jenem Umlaufe in $\Omega_2' = e^{\frac{\nu\pi i}{6}}\Omega_1$, d. h. in die mit einer zwölften Wurzel der Einheit multiplizierte Partikularlösung Ω_1 übergeht. Diese Gleichung schreibt sich auf Grund von (3) explizite:

$$2\pi e^{-\frac{\pi i}{6\omega}}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q'^{2n})\Big)^2 = e^{\frac{\nu\pi i}{6}}\omega\cdot 2\pi e^{\frac{\pi i\omega}{6}}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\Big)^2,$$

sofern man $e^{-\frac{2i\pi}{\omega}} = q'$ schreibt und rechter Hand $\omega\cdot\Omega_2$ für Ω_1 einträgt. Für $\omega = i$ wird $q' = q$, und die in der letzten Gleichung rechts und links stehenden Ausdrücke verschwinden für diesen Wert von ω nicht; nach Fortheben gemeinsamer Faktoren rechts und links ergibt sich:

$$1 = e^{\frac{\nu\pi i}{6}}\cdot i, \qquad e^{\frac{\nu\pi i}{6}} = -i.$$

Bei einem positiven Umlauf um den Punkt $J = 1$ gehen die partikulären Lösungen Ω_1, Ω_2 der Differentialgleichung (1) über in:

(5) $$\Omega_1' = i\Omega_2, \qquad \Omega_2' = -i\Omega_1,$$

eine Substitution, die wir durch das Symbol T bezeichnen. Bei einem positiven Umlauf um $J = 0$ setzt sich der Anfangszweig $\omega(J)$ fort in $\omega' = \frac{\omega+1}{-\omega}$ (s. die Substitution U von S. 297). Gegenüber der homogenen Substitution $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = -\omega_1$ bleibt Δ unverändert, so daß Ω_2^{12} bei jenem Umlaufe in Ω_1^{12} und also Ω_2 in die mit einer zwölften Wurzel der Einheit multiplizierte Partikularlösung Ω_1 übergeht. Wir haben also erneut den Ansatz $\Omega_2' = e^{\frac{\nu\pi i}{6}}\Omega_1$. Ersetzen wir dabei Ω_1 wieder durch $\omega\Omega_2$ und schreiben $e^{\frac{2i\pi(\omega+1)}{-\omega}} = q'$, so ergibt sich auf Grund von (3) wie vorhin explizite:

$$2\pi e^{-\frac{\pi i(\omega+1)}{6\omega}}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q'^{2n})\Big)^2 = e^{\frac{\nu\pi i}{6}}\omega\cdot 2\pi e^{\frac{\pi i\omega}{6}}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\Big)^2.$$

Setzen wir $\omega = \varrho$ ein, so stehen in dieser Gleichung rechts und links von 0 verschiedene Beträge. Da aber für $\omega = \varrho$ auch $\frac{\omega + 1}{-\omega} = \varrho$ und also $q' = q$ ist, so folgt nach Fortheben gleicher Faktoren rechts und links:

$$1 = e^{\frac{\nu \pi i}{6}} \varrho, \qquad e^{\frac{\nu \pi i}{6}} = \varrho^2.$$

Bei einem positiven Umlauf um den Punkt $J = 0$ gehen somit die partikulären Lösungen Ω_1, Ω_2 über in:

(6) $$\Omega_1' = -\varrho^2(\Omega_1 + \Omega_2), \qquad \Omega_2' = \varrho^2 \Omega_1;$$

wir benutzen für diese Substitution das Symbol U.

Ein geschlossener Weg, der, wie Fig. 64 zeigt, aus drei Umläufen um die Stellen 0, 1, ∞ zusammengesetzt ist, läßt sich auf der J-Kugel stetig und ohne Zerreißen auf einen Punkt zusammenziehen, ohne daß derselbe über eine singuläre Stelle hinweggeschoben zu werden braucht.

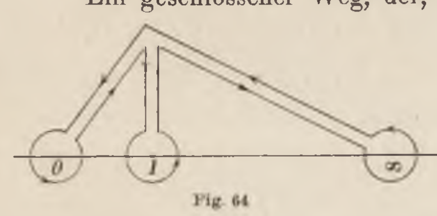


Fig. 64

Schreiben wir die in (6) angegebene Wirkung des Umlaufs um $J = 0$ symbolisch in der Gestalt:

$$\Omega_1', \Omega_2' = U(\Omega_1, \Omega_2)$$

und benutzen für die in (5) und (4) angegebenen Substitutionen die entsprechenden Bezeichnungen, so führt der in Fig. 64 angegebene Umlauf bei der Anordnung 0, 1, ∞ der singulären Punkte die partikulären Lösungen Ω_1, Ω_2 in:

$$\Omega_1', \Omega_2' = U(T(S(\Omega_1, \Omega_2)))$$

über; und da diese Lösungen zufolge der vorausgeschickten Betrachtung mit den anfänglichen Ω_1, Ω_2 identisch sein müssen, so müssen die jetzigen binären Substitutionen S, T, U genau wie die gleichbenannten Substitutionen der Modulgruppe (vgl. S. 297) die Relation:

$$U \cdot T \cdot S = 1$$

befriedigen, wobei die Kombination zweier Substitutionen symbolisch als Produkt geschrieben ist. In der Tat zeigt die Rechnung, daß die Substitutionen (4), (5) und (6) dieser Relation genügen.

Weiter ergeben die Formeln (5) und (6), daß die jetzigen binären Substitutionen T und U die durch:

$$T^2 = 1, \qquad U^3 = 1$$

zum Ausdruck kommenden Periodizitäten haben; demgegenüber hat S keine endliche Periode. Dies ist in Übereinstimmung mit dem bereits

bekannten Sätze, daß die Lösungen der Differentialgleichung (1) in der ω-Halbebene eindeutige Funktionen sind. *Das Feld der Lösungen der Differentialgleichung* (1) *ist geradezu jene unendlich-blättrige Fläche* F_∞ *über der J-Ebene, welche wir S. 303 durch Abbildung der* ω*-Halbebene vermittelst der Funktion* $J(\omega)$ *herstellten.* In der Tat sind die Ω_1, Ω_2 in dieser F_∞ eindeutige Funktionen des Ortes; zugleich können keine zwei verschiedene Blätter der F_∞ gleiche Funktionswerte Ω_1, Ω_2 tragen, da ihnen für den Quotienten $\omega = \Omega_1 : \Omega_2$ zwei verschiedene Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ zugehören.

Für den Umlauf um einen singulären Punkt gibt es nach den allgemeinen Regeln von S. 103ff. entweder eine oder zwei Lösungen der Differentialgleichung (1), die sich beim Umlauf nur um einen konstanten Multiplikator μ ändern. Diese Multiplikatoren μ bestimmen sich durch Lösung einer quadratischen Gleichung, welche man nach der Vorschrift (11) S. 103 aus den Substitutionskoeffizienten des zunächst aufgegriffenen Lösungssystems der Differentialgleichung aufbaut. Nun sind für unser ausgewähltes System Ω_1, Ω_2 die den Umläufen um $J = 0, 1, \infty$ bzw. entsprechenden Substitutionen, wie wir fanden, kurz durch:

$$U = \begin{pmatrix} -\varrho^2, & -\varrho^2 \\ \varrho^2, & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0, & i \\ -i, & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} -i\varrho, & -i\varrho \\ 0, & -i\varrho \end{pmatrix}$$

zusammenzufassen. Man setze die genannten quadratischen Gleichungen an und wird durch deren Lösung finden: *Beim singulären Punkte* $J = 0$ *liegen die beiden Multiplikatoren* $\mu = 1$ *und* ϱ *vor, beim Punkte* $J = 1$ *die beiden Multiplikatoren* $\mu = \pm 1$, *während der dritte singuläre Punkt* $J = \infty$ *nur den einen Multiplikator* $\mu = -i\varrho$ *liefert.*

Nach S. 104ff. ist in jedem Falle die zum einzelnen Multiplikator gehörende Lösung der Differentialgleichung (1) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Man beweist ohne Mühe auf Grund von (6), (5) und (4): *Zu den Multiplikatoren* $\mu = 1$ *und* ϱ *des Punktes* $J = 0$ *gehören die Lösungen* $(\Omega_1 - \varrho^2\Omega_2)$ *und* $(\Omega_1 - \varrho\Omega_2)$, *zu den Multiplikatoren* $\mu = +1$ *und* -1 *des singulären Punktes* $J = 1$ *aber* $(\Omega_1 + i\Omega_2)$ *und* $(\Omega_1 - i\Omega_2)$, *während zum einzigen Multiplikator* $-i\varrho$ *des Punktes* $J = \infty$ *die Lösung* Ω_2 *gehört.*

Nun haben wir in (13) S. 112, wenn wir $z = J$ setzen und die für uns in Betracht kommenden Werte (2) der Parameter α, β, γ eintragen, gerade auch zwei durch die hypergeometrische Reihe gelieferte Lösungen der Multiplikatoren 1 und ϱ für die Umgebung des singulären Punktes $J = 0$. Mit diesen Lösungen müssen also die oben genannten Lösungen $(\Omega_1 - \varrho^2\Omega_2)$ und $(\Omega_1 - \varrho\Omega_2)$ bis auf zwei konstante Faktoren A_0, B_0 übereinstimmen. *Für die Darstellung unserer normierten Perioden als hyper-*

geometrischer Funktionen von J gewinnen wir somit in der Umgebung von $J = 0$ den Ansatz:

$$(7) \quad \begin{cases} \Omega_1 - \varrho^2 \Omega_2 = A_0 F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}; J), \\ \Omega_1 - \varrho \Omega_2 \ = B_0 J^{\frac{1}{3}} F(\tfrac{5}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{4}{3}; J), \end{cases}$$

wo A_0 und B_0 reine Zahlen sind.

Für den singulären Punkt $J = 1$ haben wir den Ansatz (17) S. 115 zur Verfügung, der für die bei uns vorliegenden Werte (2) der α, β, γ zwei Lösungen der Multiplikatoren $\mu = 1$ und -1 liefert. Indem wir noch $z = J$ eintragen, gewinnen wir den Satz: *In der Umgebung des singulären Punktes $J = 1$ gelten für unsere normierten Perioden Ω_1, Ω_2 die folgenden Darstellungen als hypergeometrische Funktionen:*

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega_1 + i\Omega_2 = A_1 F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}; 1 - J), \\ \Omega_1 - i\Omega_2 = B_1 (J-1)^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{7}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{3}{2}; 1 - J), \end{cases}$$

wo A_1, B_1 wieder numerische Konstante sind.

Da bei unserer Gleichung (1) die beiden Parameter α und β einander gleich sind, so haben wir nach S. 115 für die Umgebung des singulären Punktes $J = \infty$ eine mit einem logarithmischen Gliede behaftete Lösung. Die allgemeinen Formeln (18) S. 115 liefern zunächst in unserem Falle die partikulären Lösungen:

$$Z_1 = J^{-\frac{1}{12}} F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right),$$

$$Z_2 = J^{-\frac{1}{12}} \left(F_1\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}; \tfrac{1}{J}\right) - \log J \cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right)\right),$$

wo F_1 die in (15) S. 114 erklärte Reihe mit verschwindendem Absolutgliede ist. Die Lösung Ω_2, als zum Multiplikator $\mu = -i\varrho$ gehörig, ist jedenfalls bis auf einen Faktor gleich Z_1; für Ω_1 haben wir eine lineare Kombination der Z_1, Z_2 anzusetzen:

$$\Omega_1 = A_2 Z_2 + B_2 Z_1, \qquad \Omega_2 = C_2 Z_1.$$

Am leichtesten ist die Bestimmung der numerischen Konstanten A_2, B_2, C_2 im letzten Falle; wir ziehen zu diesem Zwecke die Potenzreihen nach q^2 heran. Zunächst erklären wir $J^{\frac{1}{12}}$ auf Grund von (3) S. 300 in der Umgebung der Spitze $\omega = i\infty$ des in Fig. 56, S. 273 dargestellten Diskontinuitätsbereiches der Modulgruppe durch:

$$\sqrt{2\sqrt{3}}\, J^{\frac{1}{12}} = e^{-\frac{\pi i \omega}{6}} (1 + 62 q^2 + \cdots).$$

Durch Multiplikation mit den aus (3) folgenden Gleichungen:

$$\Omega_2 = 2\pi e^{\frac{\pi i \omega}{6}}(1 - 2q^2 - \cdots),$$
$$\Omega_1 = 2\pi\omega e^{\frac{\pi i \omega}{6}}(1 - 2q^2 - \cdots)$$

ergibt sich weiter:

$$\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_2 J^{\frac{1}{12}} = 2\pi(1 + 60q^2 + \cdots),$$
$$\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_1 J^{\frac{1}{12}} = 2\pi\omega(1 + 60q^2 + \cdots).$$

Setzen wir in die erste Gleichung für Ω_2 den Ausdruck $C_2 Z_1$ ein, so folgt:

$$\sqrt{2\sqrt{3}}\ C_2 F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right) = 2\pi(1 + 60q^2 + \cdots).$$

Für $J = \infty$ nimmt die links stehende hypergeometrische Reihe den Wert 1 an, während die rechte Seite gleich 2π wird, da q^2 verschwindet. Hieraus ergibt sich:

$$C_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\cdot$$

Weiter folgt aus (3) S. 300 durch Logarithmierung:

$$2i\pi\omega = -\log J - 3\log 12 + 744q^2 + \cdots$$

und daraus weiter durch Multiplikation mit der soeben für Ω_2 aufgestellten Gleichung:

$$i\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_1 J^{\frac{1}{12}} = (1 + 60q^2 + \cdots)(-\log J - 3\log 12 + 744q^2 + \cdots).$$

Die rechts in der ersten Klammer stehende Reihe ist, wie eben festgestellt wurde, gleich $F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J}\right)$, so daß:

$$i\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_1 J^{\frac{1}{12}} = -\log J \cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right) - 3\log 12 \cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right)$$
$$+ 744q^2 + \cdots$$

gilt. Tragen wir nun in $i\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_1 J^{\frac{1}{12}}$ für Ω_1 den oben gewonnenen Ansatz $(A_2 Z_2 + B_2 Z_1)$ ein und ersetzen die Z durch ihre Reihendarstellungen, so ergibt sich:

$$i\sqrt{2\sqrt{3}}\ \Omega_1 J^{\frac{1}{12}} = -i\sqrt{2\sqrt{3}}\ A_2 \log J \cdot F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right)$$
$$+ i\sqrt{2\sqrt{3}}\ B_2 F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}, 1; \tfrac{1}{J}\right) + i\sqrt{2\sqrt{3}}\ A_2 F_1\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}; \tfrac{1}{J}\right)\cdot$$

Der Vergleich der rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen liefert mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Reihe F_1 für $J = \infty$ verschwindet:

$$i\sqrt{2\sqrt{3}}\ A_2 = 1, \qquad i\sqrt{2\sqrt{3}}\ B_2 = -3\log 12.$$

Damit ist ein endgültiges Resultat erzielt: *Die mit $\sqrt[12]{\Delta}$ normierten Perioden des reduzierten Paares stellen sich als hypergeometrische Funktionen der rationalen Invariante J in der Umgebung des singulären Punktes $J = \infty$ folgendermaßen dar:*

$$(9)\quad \begin{cases} i\sqrt{2\sqrt{3}}\,\Omega_1 = J^{-\frac{1}{12}}\left(F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{J}\right) - (3\log 12 + \log J)\, F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J}\right)\right), \\ i\sqrt{2\sqrt{3}}\,\Omega_2 = 2\pi i J^{-\frac{1}{12}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J}\right). \end{cases}$$

Für den Periodenquotienten ω und also für die zur Modulfunktion erster Stufe $J(\omega)$ inverse Funktion gewinnen wir hieraus in der Umgebung von $J = \infty$ die Darstellung:

$$(10)\qquad 2i\pi\omega = -\log J - 3\log 12 + \frac{F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{J}\right)}{F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J}\right)}.$$

Die Anfangsglieder dieser Reihendarstellung von ω sind:

$$2i\pi\omega = -\log J - 3\log 12 + \tfrac{31}{72} J^{-1} + \tfrac{13157}{82944} J^{-2} + \cdots$$

Etwas umständlicher ist die Berechnung der Koeffizienten A_0, B_0 und A_1, B_1 in (7) und (8). Wir haben hierbei zwei Wege zur Verfügung. Erstlich können wir auf die ursprüngliche Bedeutung der Perioden zurückgehen, die wir S. 157 als Werte des Integrals erster Gattung, genommen über gewisse geschlossene Umläufe auf der Riemannschen Fläche F_2, erklärten. Hierbei stellen sich die Konstanten A, B selbst als gewisse bestimmte Integrale dar, die man wenigstens näherungsweise nach bekannten Methoden berechnen kann. Eine zweite Methode beruht auf dem Satze von Gauß über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe für den Wert 1 des vierten Argumentes und auf der Darstellung des Summenwertes jener Reihe durch die Π-Funktion.[1]) Diese Methode eignet sich besonders für die numerische Berechnung der Konstanten A, B, weil man für die Π-Funktion die von Gauß berechnete und am Schlusse der eben genannten Abhandlung mitgeteilte Tabelle zur Hand hat. Wir wollen die erste Methode für die Bestimmung der A_1, B_1 benutzen, die zweite für die Berechnung von A_0, B_0.

Erklären wir $J^{\frac{1}{12}}$ durch die S. 334 genannte Reihe, so hat diese Funktion auf der imaginären ω-Achse zwischen $i\infty$ und i positive reelle Werte und nimmt insbesondere für $\omega = i$ den Wert 1 an. Für $\omega = i$ ist $g_3 = 0$, dem harmonischen Falle entsprechend. Die drei endlichen

1) S. die „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.“ in Gauß' „Werken“, Bd, 3., S. 123 oder Gött. Abhandl. von 1818.

Verzweigungspunkte mögen bei $e_1 = -1$, $e_3 = 0$, $e_2 = +1$ liegen; der in Fig. 39, S. 173 mit Q_2 bezeichnete geschlossene Weg liefert uns dann die Periode ω_2. Indem wir $g_2 = 4$, der Auswahl der Punkte e entsprechend, in das Normalintegral erster Gattung eintragen, folgt:

$$\omega_2 = 2\int_\infty^1 \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 4z}} = \int_\infty^1 \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}},$$

wo das Integral längs der reellen z-Achse ausgeführt werden mag und die Quadratwurzel $\sqrt{z(z^2-1)}$ daselbst positiv genommen werden soll. Für die numerische Berechnung des Integrals ist es bequemer, erst noch durch $z = z'^{-1}$ zu transformieren, was nach Fortlassung des oberen Index der neuen Integrationsvariabeln liefert:

$$\omega_2 = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}.$$

Hiernach ist ω_2 reell und negativ. Da andererseits $\Omega_2(J)$ zufolge der zweiten Gleichung (9) längs des in Rede stehenden Stückes der imaginären ω-Achse reell und positiv ist und $\Omega_2(1)$ der bei $\omega = i$ eintretende endliche Grenzwert dieser positiven Werte ist[1]), so ist auch $\Omega_2(1)$ reell und positiv. Da nun aus $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ sofort $\Delta = 64$ folgt, und $\omega_2 \sqrt[12]{\Delta} = \Omega_2$ für $\omega = i$, d. h. also für $J = 1$, als reell und *positiv* erkannt wurde, so muß $\sqrt[12]{\Delta}$ reell und negativ, mithin gleich $-\sqrt{2}$ sein. Die Multiplikation der für ω_2 angegebenen Gleichung mit $\sqrt[12]{\Delta} = -\sqrt{2}$ liefert somit:

$$\Omega_2(1) = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}.$$

Tragen wir nun in die erste Gleichung (8) den Wert $\omega = i$ ein, so wird $J = 1$ und $\Omega_1(1) = i\Omega_2(1)$, während sich die hypergeometrische Reihe auf ihr Absolutglied 1 reduziert. Es folgt also:

$$(11) \qquad A_1 = 2i\Omega_2(1) = 2i\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}.$$

Damit B_1 in der zweiten Gleichung (8) eindeutig bestimmt ist, setzen wir fest, daß $(J-1)^{\frac{1}{2}}$ längs des öfters genannten Stückes der imaginären ω-Achse positiv sein soll. Der Quotient der beiden Gleichungen (8) liefert eine Entwicklung der Gestalt:

$$\frac{\omega - i}{\omega + i} = \frac{B_1}{A_1}(J-1)^{\frac{1}{2}}(1 + a_1(J-1) + \cdots).$$

1) Über die Konvergenz der in der zweiten Gleichung (9) stehenden hypergeometrischen Reihe für $J = 1$ soll einstweilen nichts vorausgesetzt werden.

Durch Differentiation nach ω folgt weiter:

$$\frac{2i}{(\omega+i)^2} = \frac{B_1}{2A_1}(J-1)^{-\frac{1}{2}}(1+3a_1(J-1)+\cdots)\cdot\frac{dJ}{d\omega}.$$

Aus (11) und (12) S. 317 ergibt sich aber:

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{9\,\omega_2^2}{\pi i}\,\frac{g_2^2\,g_3}{\Delta} = \frac{\Omega_2^2\sqrt{3}}{\pi i}\,J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $J^{\frac{2}{3}}$ längs der imaginären ω-Achse oberhalb i reell genommen werden muß, da die links stehende Ableitung ebenda negativ imaginäre Werte hat. Tragen wir diesen Ausdruck für die Ableitung von J nach ω in die voraufgehende Gleichung ein, so gewinnen wir:

$$\frac{2i}{(\omega+i)^2} = \frac{B_1\,\Omega_2^2\sqrt{3}}{2i\pi A_1}\,J^{\frac{2}{3}}(1+3a_1(J-1)+\cdots),$$

woraus sich für $J=1$ und also $\omega = i$ ergibt:

$$\pi A_1 = B_1\sqrt{3}\,(\Omega_2(1))^2.$$

Drücken wir auf Grund von (11) den Wert $\Omega_2(1)$ durch A_1 aus, so finden wir für B_1 einen eindeutigen Ausdruck in A_1. *Die beiden numerischen Koeffizienten A_1 und B_1 in den Darstellungen* (8) *der normierten Perioden als hypergeometrischer Funktionen sind die folgenden:*

$$(12) \qquad A_1 = 2i\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}, \quad B_1 = -\frac{4\pi}{A_1\sqrt{3}}.$$

Nach dem obengenannten Satze von **Gauß** konvergiert die hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ für $z=1$, falls $\alpha+\beta<\gamma$ ist; der Summenwert der Reihe für $z=1$ ist im Falle der Konvergenz:

$$(13) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma;1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Hier ist $\Pi(x)$ die bekannte **Gauß**sche Π-Funktion, welche zur Γ-Funktion in der einfachen Beziehung $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$ steht. Von den besonderen Funktionswerten:

$$(14) \qquad \Pi(-\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Pi(0) = \Gamma(1) = 1$$

haben wir einige Male Gebrauch zu machen.[1])

Die genannte Konvergenzbedingung ist bei den hier in Betracht kommenden hypergeometrischen Reihen durchweg erfüllt. Setzen wir demnach zunächst in der zweiten Formel (9) für J den Wert 1 ein, so ergibt sich aus (13) und (14):

$$\Omega_2(1) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\Pi(-\frac{1}{12})\,\Pi(-\frac{5}{12})}.$$

1) Vgl. **Gauß** „Werke“, B. 3 S. 148 Formel (52) und S. 146.

Damit der Koeffizient B_0 in der zweiten Gleichung (7) eindeutig bestimmt ist, setzen wir fest, daß längs des zwischen $\omega = \varrho$ und $\omega = i$ gelegenen Stückes des Einheitskreises der ω-Ebene $J^{\frac{1}{3}}$ reelle Werte haben soll. Nähern wir uns längs dieses Kreisbogens dem Punkte $\omega = i$ an, so ist bei $\omega = i$ zu setzen $\Omega_1 = i\Omega_2$, $J = 1$, $J^{\frac{1}{3}} = 1$, $\Omega_2 = \Omega_2(1)$, so daß die Formeln (7) für den Wert $\omega = i$ die nachfolgende Gestalt annehmen:

$$(i - \varrho^2)\, \Omega_2(1) = A_0 F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}; 1),$$
$$(i - \varrho)\ \Omega_2(1) = B_0 F(\tfrac{5}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{4}{3}; 1).$$

Nun berechnet man aus (13) und (14):

$$F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}; 1) = \sqrt{\pi}\, \frac{\Pi(-\frac{1}{3})}{(\Pi(-\frac{7}{12}))^2}, \quad F(\tfrac{5}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{4}{3}; 1) = \sqrt{\pi}\, \frac{\Pi(\frac{1}{3})}{(\Pi(-\frac{1}{12}))^2}.$$

Tragen wir diese Werte und zugleich den für $\Omega_2(1)$ berechneten Ausdruck in die soeben für A_0 und B_0 angegebenen Gleichungen ein, so gelangen wir zu folgendem Ergebnis: *Die beiden numerischen Konstanten A_0, B_0 in den auf die Umgebung von $J = 0$ bezogenen Darstellungen* (7) *der normierten Perioden als hypergeometrischer Funktionen von J haben die folgende Bedeutung:*

$$(15) \quad A_0 = \frac{2\pi(i - \varrho^2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{\Pi(-\frac{7}{12})}{\Pi(-\frac{1}{3})\,\Pi(-\frac{1}{12})}, \quad B_0 = \frac{2\pi(i - \varrho)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \cdot \frac{\Pi(-\frac{1}{12})}{\Pi(\frac{1}{3})\,\Pi(-\frac{7}{12})}.$$

Eine Bestätigung dieses Ergebnisses können wir noch aus der von Gauß a. a. O. unter (54) S. 148 angegebenen Relation:

$$\Pi(-x) \cdot \Pi(x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

entnehmen. Auf Grund derselben liefern die Gleichungen (15):

$$A_0 B_0 = \frac{2 i \pi^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 3 i \pi.$$

Das gleiche Ergebnis gewinnt man aus den Gleichungen (7), indem man zunächst aus der ersten:

$$(16) \qquad A_0 = (\varrho - \varrho^2)\,\Omega_2(0) = i\sqrt{3}\,\Omega_2(0)$$

ableitet und sodann die aus dem Quotienten beider Gleichungen entspringende Relation:

$$\frac{\omega - \varrho}{\omega - \varrho^2} = \frac{B_0}{A_0} J^{\frac{1}{3}} (1 + b_1 J + \cdots)$$

nach ω differenziert sowie weiter mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12) S. 317 und der eben angegebenen Relation (16) umgestaltet.

Zweiter Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Wie bereits in der Einleitung zum ersten Abschnitte, S. 117, bemerkt wurde, ist die Gestalt der Theorie der elliptischen Funktionen bei Gauß, Abel und Jacobi verschieden von der Weierstraßschen Gestalt dieser Theorie, deren Behandlung der erste Abschnitt gewidmet ist. Wir bezeichneten die Größen der Weierstraßschen Theorie als Funktionen der *ersten Stufe* und sahen ihren Charakter darin, daß bei ihrem Aufbau ausschließlich *„rationale Invarianten"* der zugrundeliegenden Verzweigungsform benutzt wurden. Der genannten älteren Gestalt unserer Theorie liegen demgegenüber Normalgestalten der Verzweigungsform zugrunde, deren Koeffizienten sich späterhin im Sinne der linearen Invariantentheorie als *„irrationale" Invarianten* erwiesen haben.

Es entspricht einer wiederholt gemachten Erfahrung, daß wir betreffs des gegenseitigen Verhältnisses der neueren und älteren Gestalten der Theorie der elliptischen Funktionen vermittelst *des Integrals erster Gattung u und seiner Perioden* ω_1, ω_2 zu der klarsten Auffassung gelangen. Dieselbe ist in dem arithmetisch zu formulierenden *„Stufenprinzip"* von Klein[1]) enthalten, welches die ternäre Gruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$ betreffen wird, die wir S. 319 aufstellten. Im Sinne Kleins sind die Größen der älteren Theorie als *elliptische Funktionen* bzw. *Modulfunktionen der „zweiten" Stufe* zu bezeichnen; jedoch greifen sie gelegentlich in die *vierte* Stufe hinüber.

Die grundsätzlichen funktionentheoretischen Auffassungen des ersten Abschnitts, die sich auf Cauchy und namentlich auf Riemann gründen, können natürlich durch eine veränderte Gestalt unserer Theorie weder verändert noch ergänzt werden. Unser Ziel wird vielmehr nur sein, in diese Auffassungen die ältere Theorie mit ihrem eigentümlichen *analytischen* Charakter einzufügen. In den Bezeichnungen schließen wir uns meist an Jacobi an, da dessen Bezeichnungsweise sich durch bald neunzigjährigen Gebrauch eingebürgert hat.

---

1) S. die S. 117 genannten Nachweise.

Erstes Kapitel.

Die Normalgestalten zweiter und vierter Stufe der Verzweigungsform und der elliptischen Integrale.

Wenn auch die in der älteren Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Normalgestalten der Integrale keineswegs allein durch *lineare* Transformation der Variabelen z tatsächlich gewonnen worden sind, so kann man doch gleichwohl durch ausschließlich lineare Transformationen zu ihnen allen gelangen. Durch Einschränkung auf solche Transformationen gelingt es aber, der Entwicklung einen einheitlichen und abgeschlossenen Charakter zu verleihen. Die nachfolgende Darstellung schließt sich unmittelbar an die Entwicklungen von S. 118ff. an. Die neu hinzutretende Idee ist, daß wir neben den rationalen nun auch *irrationale Invarianten* der Verzweigungsform zulassen wollen. Die einfachsten unter ihnen liefern uns diejenigen Normalgestalten der Integrale, welche wir als zur zweiten und zur vierten Stufe gehörig bezeichnen werden, und die eben die Integralgestalten der älteren Theorie sind.

§ 1. Die einfachsten irrationalen Invarianten der Verzweigungsform.

Die S. 119 eingeführte „Verzweigungsform" der zweiblättrigen Riemannschen Fläche F_2 über der z-Ebene:

$$f_z = a_0 z_1^4 + 4 a_1 z_1^3 z_2 + 6 a_2 z_1^2 z_2^2 + 4 a_3 z_1 z_2^3 + a_4 z_2^4$$

hat die vier Verzweigungspunkte der F_2, welche wir bei $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ gelegen annehmen, zu Nullpunkten. Um die homogene Schreibweise konsequent durchzuführen, schreiben wir die einzelne Zahl $e^{(k)}$ als Quotienten $e_1^{(k)} : e_2^{(k)}$ zweier Größen $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$, die wie die z_1, z_2 (vgl. S. 119) endlich sein sollen und nicht zugleich verschwinden dürfen. Das einzelne Wertepaar $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ ist dann natürlich durch die Verzweigungsform f_z nur erst bis auf einen endlichen, von 0 verschiedenen gemeinsamen Faktor ν_k bestimmt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$z_1 e_2 - z_2 e_1 = (z, e)$$

und schreiben die Linearfaktorenzerlegung der Form f_z:

$$f_z = (z, e^{(1)})(z, e^{(2)})(z, e^{(3)})(z, e^{(4)}),$$

so sind überdies, falls wir nachträglich die vier Größenpaare $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ um vier Faktoren ν_k ändern wollen, diese Faktoren an die Bedingung gebunden, daß ihr Produkt gleich 1 sein muß. Denken wir die Linearfaktoren wieder miteinander multipliziert, so ergeben sich die fünf Koef-

fizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$ in Gestalt ganzer homogener Funktionen vierter Dimension der $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_2^{(4)}$, und zwar sind diese Funktionen linear und homogen in den beiden Größen $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ jedes der vier Paare. Bei Zusatz von vier Faktoren ν_k des Produktes 1 bleiben diese Funktionen, wie es sein muß, unverändert.

Wie in (5) S. 119 substituieren wir nun an Stelle der z_1, z_2:

(1) $$z_1 = dz_1' - bz_2', \qquad z_2 = -cz_1' + az_2',$$

wo die „Determinante" $D = ad - bc$ der Substitution von null verschieden sein soll; wir können diese Substitution auch umgekehrt durch:

(2) $$Dz_1' = az_1 + bz_2, \qquad Dz_2' = cz_1 + dz_2$$

geben. Die Ausübung der Substitution (1) auf f_z liefert:

$$f_z = f_{z'}' = a_0' z_1'^4 + 4a_1' z_1'^3 z_2' + \cdots + a_4' z_2'^4,$$

wobei sich die fünf Koeffizienten $a_0', \cdots, a_4'$ der transformierten Form mit Hilfe der Substitutionskoeffizienten linear und homogen in den ursprünglichen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4$ darstellen. Der Begriffsbestimmung einer *rationalen Invariante der Form* f_z, wie sie S. 120 gegeben wurde, liegt diese Darstellung der $a_0', \ldots, a_4'$ in den $a_0, \ldots, a_4$ zugrunde.

Wir können nun die Transformation (1), statt sie unmittelbar auf f_z anzuwenden, auch auf die vier Linearfaktoren (z, e) einzeln ausüben. Dabei ergibt sich:

$$(z, e) = (dz_1' - bz_2')\, e_2 - (-cz_1' + az_2')\, e_1 = z_1'(ce_1 + de_2) - z_2'(ae_1 + be_2).$$

Setzen wir also der Substitution (1) entsprechend:

(3) $$e_1' = ae_1 + be_2, \qquad e_2' = ce_1 + de_2,$$

so gilt $(z, e) = (z', e')$, wo rechts die „transformierte Linearform" steht. Das Produkt der vier transformierten Linearfaktoren oder Linearformen ist dann natürlich gleich $f_{z'}'$, so daß sich die Koeffizienten $a_0', \ldots, a_4'$ nach demselben Gesetze aus den vier Größenpaaren e_1', e_2' aufbauen wie die $a_0, \ldots, a_4$ aus den vier Paaren e_1, e_2.

Die vier Paare $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ erfahren zufolge (3) ein und dieselbe Transformation, sie sind nach der Sprechweise von S. 310 „kogredient". Der aus irgend zwei Paaren hergestellte Ausdruck:

$$(e^{(i)}, e^{(k)}) = e_1^{(i)} e_2^{(k)} - e_2^{(i)} e_1^{(k)}$$

geht demnach bei Ausübung der vorgelegten Substitution in sich selbst, multipliziert mit der ersten Potenz der Substitutionsdeterminante, über:

$$(e^{(i)}, e^{(k)})' = D \cdot (e^{(i)}, e^{(k)}).$$

Indem wir den S. 120 gegebenen Begriff der rationalen Invariante einer Form auf den *Begriff der rationalen „simultanen" Invariante eines*

Systems von Formen, die gleichzeitig einer linearen Transformation unterworfen werden, ausdehnen, erkennen wir in $(e^{(i)}, e^{(k)})$ eine einfachste simultane Invariante der i^{ten} und der k^{ten} Linearform. Da i und k verschieden sein müssen, falls diese Invariante nicht identisch verschwinden soll, so haben wir abgesehen von einem Zeichenwechsel die sechs Invarianten:

(4) $\quad (e^{(1)}, e^{(2)}),\ (e^{(1)}, e^{(3)}),\ (e^{(1)}, e^{(4)}),\ (e^{(3)}, e^{(4)}),\ (e^{(4)}, e^{(2)}),\ (e^{(2)}, e^{(3)}).$

Unter den simultanen rationalen Invarianten aller vier Linearformen wollen wir nun diejenigen auszeichnen, welche in den beiden Größen $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ *jedes* der vier Paare homogen von *einer und derselben* Dimension δ sind. Eine solche Invariante wird unverändert bleiben, wenn wir unsere Größenpaare um vier Faktoren ν_k des Produktes 1 ändern. Hierdurch kommt bereits zum Ausdruck, *daß die Invariante allein von den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4$ der Form f_z abhängt.* In der Tat hängt zunächst der Quotient der Invariante und der δ^{ten} Potenz eines nichtverschwindenden unter den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4$ allein von den vier Quotienten $e^{(k)} = e_1^{(k)} : e_2^{(k)}$ ab; diese aber sind als Wurzeln der biquadratischen Gleichung $f_z = 0$ *irrationale* Funktionen der $a_0, \ldots, a_4$ allein. *Eine simultane Invariante der vier Linearformen, welche in den $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ jedes Paares homogen von ein und derselben Dimension δ ist, heißt dieserhalb eine „irrationale" Invariante der Verzweigungsform f_z; wir nennen sie insbesondere eine „ganze" irrationale Invariante von f_z, wenn sie eine „ganze" rationale Funktion der $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ ist.*

Wir können nun aus (4) unmittelbar folgende drei einfachsten ganzen irrationalen Invarianten von f_z herstellen:

(5) $L = (e^{(1)}, e^{(2)})(e^{(3)}, e^{(4)}),\quad M = (e^{(1)}, e^{(3)})(e^{(4)}, e^{(2)}),\quad N = (e^{(1)}, e^{(4)})(e^{(2)}, e^{(3)});$

dieselben sind nicht voneinander unabhängig, vielmehr zeigt eine einfache Rechnung, daß folgende Relation besteht:

(6) $$L + M + N = 0.$$

Bei Ausübung einer linearen Substitution ändern sich diese Invarianten um das Quadrat der Substitutionsdeterminante:

$$L' = D^2 L, \qquad M' = D^2 M, \qquad N' = D^2 N.$$

Wir fanden oben (S. 134) vier eine Vierergruppe G_4 bildende (nichthomogene) lineare Substitionen, welche das System der vier Punkte $e^{(k)}$ in sich überführten; den drei von der identischen Substitution verschiedenen Substitutionen dieser G_4 entsprachen die drei Arten, die vier Punkte $e^{(k)}$ zu Paaren zu permutieren. Schreiben wir die einzelne dieser Substitutionen homogen und „unimodular" (S. 120), so sind ihr gegenüber die L, M, N absolut invariant. Dies Ergebnis ist rein kombinatorisch aus

der Bauart (5) unserer Invarianten verständlich. Tauscht man z. B. die oberen Indizes 1 und 2 sowie gleichzeitig die Indizes 3 und 4 aus, so bleiben demgegenüber bei der Bedeutung der Symbole $(e^{(i)}, e^{(k)})$ die L, M, N unverändert.

Wir wollen im Anschlusse hieran gleich noch die Wirkung der übrigen Permutationen der vier Zahlenpaare $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ auf die Ausdrücke (5) feststellen, wobei es sich natürlich wieder um eine rein kombinatorische Frage handelt, und zwar hier um eine solche, die mit den Substitutionen von z außer Zusammenhang steht. Da die Permutationen der eben genannten G_4 die L, M, N unverändert lassen, so können wir nach einer beliebigen Permutation der oberen Indizes ohne erneute Änderung der L, M, N noch diejenige Permutation der G_4 ausüben, welche den Index 4 an die letzte Stelle versetzt.[1]) Wir gewinnen demnach bereits alle Änderungen der L, M, N, wenn wir nur die sechs Permutationen der drei ersten Indizes ausüben. Es hat nun z. B. die Permutation 2, 3, 1 folgende Abänderung der Ausdrücke L, M, N zur Folge:

$$L' = (e^{(2)}, e^{(3)})(e^{(1)}, e^{(4)}) = N,$$
$$M' = (e^{(2)}, e^{(1)})(e^{(4)}, e^{(3)}) = L,$$
$$N' = (e^{(2)}, e^{(4)})(e^{(3)}, e^{(1)}) = M,$$

d. h. sie permutiert einfach auch die L, M, N zyklisch. Wir stellen hier gleich die Wirkung aller sechs Permutationen der drei Indizes 1, 2, 3 tabellarisch zusammen:

1, 2, 3	$L, \quad M, \quad N$
2, 3, 1	$N, \quad L, \quad M$
3, 1, 2	$M, \quad N, \quad L$
1, 3, 2	$-M, -L, -N$
3, 2, 1	$-N, -M, -L$
2, 1, 3	$-L, -N, -M$

Hieraus geht der für die Rechnungen des nächsten Paragraphen wichtige Satz hervor, *daß die drei Differenzen:*

$$(7) \qquad \Lambda = M - N, \qquad M = N - L, \qquad N = L - M$$

der Ausdrücke L, M, N gegenüber den Permutationen der vier Größenpaare $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ ihrerseits die sechs möglichen Permutationen erfahren.

---

1) Steht der Index 4 bereits hier, so ist eben die „identische" Permutation aus der G_4 hinzuzufügen.

Die Quotienten der L, M, N sind *die einfachsten „absoluten" irrationalen Invarianten der Verzweigungsform* f_z. Versehen wir diese Quotienten mit negativen Vorzeichen, so gelangen wir zu den *sechs „Doppelverhältnissen" der vier Punkte* $e^{(k)}$, deren Invarianz gegenüber linearer Transformation wohlbekannt ist. Ein erstes unter diesen Doppelverhältnissen möge durch den negativ genommenen Quotienten von L und M gegeben sein und durch λ bezeichnet werden:

$$(8) \qquad \lambda = -\frac{L}{M} = -\frac{(e^{(1)}, e^{(2)})(e^{(3)}, e^{(4)})}{(e^{(1)}, e^{(3)})(e^{(4)}, e^{(2)})} = \frac{e^{(1)} - e^{(2)}}{e^{(1)} - e^{(3)}} : \frac{e^{(4)} - e^{(2)}}{e^{(4)} - e^{(3)}}.$$

Die fünf übrigen Doppelverhältnisse oder besser gesagt „Gestalten" des Doppelverhältnisses der vier Punkte $e^{(k)}$ lassen sich in der eben angegebenen Gestalt λ linear darstellen. In der Tat ergeben sich aus der Relation (6) leicht die Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} -\dfrac{L}{M} = \lambda, & -\dfrac{M}{N} = \dfrac{1}{1-\lambda}, \quad -\dfrac{N}{L} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ -\dfrac{M}{L} = \dfrac{1}{\lambda}, & -\dfrac{N}{M} = 1 - \lambda, \quad -\dfrac{L}{N} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{cases}$$

§ 2 Beziehung der irrationalen Invarianten der Verzweigungsform zu den rationalen Invarianten.

Nach (7) § 1 verschwindet die Summe der Invarianten Λ, M, N. Dagegen sind, falls wir die $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ und damit die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$ der Verzweigungsform f_z als frei veränderlich ansehen, zufolge einer einfachen Rechnung die symmetrischen Funktionen:

$$G_2 = MN + N\Lambda + \Lambda M, \quad G_3 = \Lambda MN$$

der drei ganzen irrationalen Invarianten Λ, M, N nicht mit 0 identisch. Diese G_2 und G_3 sind symmetrisch in den vier Größenpaaren $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ aufgebaut, da sie sich bei den Permutationen derselben nicht ändern. Es ist leicht einzusehen, daß wir in den G_2, G_3 bis auf numerische Faktoren unsere rationalen Invarianten g_2, g_3 wiedergewonnen haben.

Man wolle nämlich, unter k eine beliebige der beiden Zahlen 2 und 3 verstanden, G_k durch die k^{te} Potenz von:

$$a_0 = e_2^{(1)} e_2^{(2)} e_2^{(3)} e_2^{(4)}$$

teilen und gewinnt so in $a_0^{-k} G_k$ eine ganze symmetrische Funktion der Wurzeln $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ der biquadratischen Gleichung:

$$z^4 + 4\frac{a_1}{a_0} z^3 + 6\frac{a_2}{a_0} z^2 + 4\frac{a_3}{a_0} z + \frac{a_4}{a_0} = 0;$$

dabei treten im Ausdruck $a_0^{-k} G_k$ die k^{ten} Potenzen der Wurzeln $e^{(1)}, \ldots, e^{(4)}$, aber keine höheren auf. Hieraus folgt nach bekannten Sätzen über sym-

metrische Funktionen[1]), daß $a_0^{-k} G_k$ eine rationale ganze Funktion k^{ten} Grades der Koeffizienten der eben genannten biquadratischen Gleichung ist; G_k selbst ist somit eine ganze rationale homogene Funktion k^{ter} Dimension der fünf Größen $a_0, a_1, \ldots, a_4$.

Nach den Entwicklungen von S. 121ff. sind aber für $k = 2$ und 3 die einzigen überhaupt existierenden rationalen ganzen Invarianten, abgesehen von numerischen Faktoren, die in (10) S. 122 gegebenen g_2, g_3. Wir haben demnach die Ansätze:

$$G_2 = c g_2, \quad G_3 = c' g_3,$$

unter c und c' zwei numerische Konstante verstanden. Zur Bestimmung der letzteren wählen wir f_z als Normalgestalt erster Stufe der Verzweigungsform und setzen zu diesem Zwecke:

$$e_1^{(1)} = e^{(1)},\ e_2^{(1)} = 1;\ e_1^{(2)} = e^{(2)},\ e_2^{(2)} = 1;\ e_1^{(3)} = e^{(3)},\ e_2^{(3)} = 1;\ e_1^{(4)} = 1;\ e_2^{(4)} = 0.$$

Für die L, M, N erhält man daraufhin:

$$L = e^{(2)} - e^{(1)}, \quad M = e^{(1)} - e^{(3)}, \quad N = e^{(3)} - e^{(2)},$$

sowie weiter für die Λ, M, N mit Rücksicht auf die bei der Verzweigungsform erster Stufe gültige Relation $e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} = 0$:

$$\Lambda = -3e^{(3)}, \quad M = -3e^{(2)}, \quad N = -3e^{(1)}.$$

Für G_2 und G_3 ergibt sich somit:

$$G_2 = 9\left(e^{(2)}e^{(3)} + e^{(3)}e^{(1)} + e^{(1)}e^{(2)}\right), \quad G_3 = -27 e^{(1)}e^{(2)}e^{(3)}.$$

Auf der anderen Seite stellen sich g_2 und g_3 in den $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ auf Grund der identischen Gleichung:

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e^{(1)})(z - e^{(2)})(z - e^{(3)})$$

in den bekannten Gestalten:

$$g_2 = -4\left(e^{(2)}e^{(3)} + e^{(3)}e^{(1)} + e^{(1)}e^{(2)}\right), \quad g_3 = 4 e^{(1)}e^{(2)}e^{(3)}$$

dar. Der Vergleich mit den zuletzt für G_2 und G_3 angegebenenen Ausdrücken ergibt den Satz: *Die Beziehung zwischen den irrationalen Invarianten L, M, N und den rationalen g_2, g_3 ist die folgende:*

$$(1)\quad \begin{cases} (N-L)(L-M) + (L-M)(M-N) + (M-N)(N-L) = -\frac{9}{4} g_2, \\ (M-N)(N-L)(L-M) = -\frac{27}{4} g_3. \end{cases}$$

Das Quadrat des Differenzenproduktes der vier Wurzeln $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ liefert die Diskriminante der Form f_z. Bedienen wir uns wieder der homogenen Schreibweise, so wird $L^2 \cdot M^2 \cdot N^2$ als ganze rationale Invariante sechster Dimension in den $a_0, a_1, \ldots, a_4$ bis auf einen

1) Man vgl. z. B. Weber, „Lehrbuch der Algebra“, 2. Aufl. (Braunschweig, 1898) Bd. 1, S. 167.

numerischen Faktor die Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ liefern müssen. Setzen wir demnach, unter c eine neue numerische Konstante verstanden:

$$L^2 M^2 N^2 = c\Delta = c(g_2^3 - 27 g_3^2),$$

so ist c leicht dadurch bestimmbar, daß man für g_2 und g_3 ihre aus (1) folgenden Ausdrücke in L, M, N einträgt und für L, M und N irgendein spezielles, die Relation $L + M + N = 0$ befriedigendes Wertsystem einträgt. Man setze z. B. ein $M = L$, $N = -2L$ und findet, da $g_2 = 4L^2$, $g_3 = 0$ wird, $4L^6 = c(4L^2)^3$ und damit $c = \frac{1}{16}$. *Der Zusammenhang der irrationalen Invarianten L, M, N mit der Diskriminante Δ ist demnach:*

$$(2) \qquad L^2 M^2 N^2 = \tfrac{1}{16}\Delta.$$

Die vorstehenden Formeln gestatten auch die Beziehung zwischen dem Doppelverhältnis λ und der absoluten rationalen Invariante J anzugeben. Setzen wir in Übereinstimmung mit (9) S. 345 in die vorstehenden Gleichungen (1) und (2):

$$L = -\lambda M, \quad N = (\lambda - 1) M$$

ein, so ergibt sich:

$$g_2 = \tfrac{4}{3} M^2(\lambda^2 - \lambda + 1),$$
$$g_3 = -\tfrac{4}{27} M^3(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2),$$
$$\Delta = 16 M^6 (\lambda^2(\lambda - 1)^2).$$

Diese Ausdrücke der g_2, g_3, Δ trage man in die Relation (16) S. 124 ein und gewinnt als *Beziehung zwischen dem Doppelverhältnis λ und der absoluten rationalen Invariante:*

$$(3) \quad J : (J-1) : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2.$$

Hierdurch ist J als eine rationale Funktion sechsten Grades von λ und umgekehrt λ als eine sechsdeutige algebraische Funktion von J erkannt. Dabei ist entweder aus der Herleitung der Gleichung (3) oder auch unmittelbar aus ihrer Gestalt ersichtlich, *daß die sechs Lösungen dieser algebraischen Gleichung für λ bei gegebenem J sich aus einer unter ihnen in den sechs verschiedenen Gestalten des Doppelverhältnisses der vier Punkte $e^{(k)}$:*

$$(4) \quad \lambda' = \lambda,\ \lambda' = \frac{1}{\lambda},\ \lambda' = 1 - \lambda,\ \lambda' = \frac{1}{1-\lambda},\ \lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda},\ \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

darstellen. In der Tat überzeugt man sich leicht, daß die in (3) für J gegebene rationale Funktion von λ:

$$J = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

durch jede der sechs unter (4) genannten linearen Transformationen von λ in sich übergeführt wird, so daß der vorstehenden Gleichung



mit λ alle sechs in (4) gegebenen λ' genügen. *Diese sechs Substitutionen bilden eine Gruppe G_6 der Ordnung 6,* deren sogleich näher aufzuweisende Struktur uns übrigens von S. 132 her bereits bekannt ist.

Vorher machen wir noch darauf aufmerksam, daß uns die hier vorliegende rationale Funktion sechsten Grades $J(\lambda)$ und ihre inverse algebraische Funktion $\lambda(J)$ bereits S. 64ff. ausführlich beschäftigt hat; in der Tat ist die unter (5) S. 64 zwischen w und z angesetzte Gleichung unmittelbar unsere hier vorliegende Gleichung (3). Die sechsblättrige Riemannsche Fläche F_6 über der J-Ebene, welche zur Funktion $\lambda(J)$ gehört, ist daselbst näher beschrieben, auch die Abbildung der F_6 auf die schlichte λ-Ebene in Fig. 11, S. 65, die wir hier als Fig. 65 reproduziert haben, dargelegt. Die in Klammern gesetzten Zahlen beziehen sich auf die Werteverteilung von J. Jedes der zwölf Kreisbogendreiecke ist ein konformes Abbild der einzelnen durch die reelle Achse abgetrennten J-Halbebene (vgl. Fig. 10, S. 65); und zwar liefern dabei die sechs schraffierten Dreiecke die Bilder der sechs „positiven“ Halbblätter der F_6.

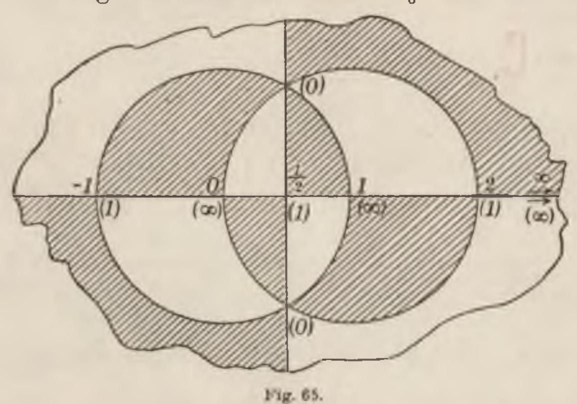


Fig. 65.

Diese Figur, welche oben den Zweck hatte, den Zusammenhang der Blätter der F_6 in einem schlichten Bilde darzustellen, gewinnt im jetzigen Zusammenhang eine weitere Bedeutung. Irgendein vorgegebener Wert J findet in sechs „homologen“ Punkten der schraffierten oder der freien Dreiecke der Fig. 65 statt oder auch in sechs homologen Randpunkten der Dreiecke, wenn es sich nämlich um einen reellen Wert J handelt. Je sechs solche „homologen“ Punkte hängen vermöge der sechs Substitutionen (4) zusammen. Wir sind damit zu dem Satze gelangt: *Die in Fig. 65 gezeichnete Einteilung der λ-Ebene in zwölf abwechselnd schraffierte und freie Kreisbogendreiecke wird durch die sechs Substitutionen* (4) *der vorhin eingeführten G_6 in sich übergeführt.* Man wolle dies an den einzelnen Substitutionen (4) näher verfolgen. Erstlich bilden die drei Substitutionen:

$$\lambda' = \frac{-1}{\lambda - 1}, \quad \lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \lambda' = \lambda$$

eine zyklische Untergruppe G_3 aus elliptischen Substitutionen der beiden Fixpunke $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\varrho^{\pm 1}$, welche in Fig. 65 von je sechs Kreis-

bogendreiecken umlagert sind, und in denen übrigens $J = 0$ gilt. Weiter haben wir noch drei elliptische Substitutionen der Periode zwei:

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda' = 1 - \lambda, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

deren Fixpunkte $\lambda = 1, -1$; $\lambda = \infty, \frac{1}{2}$ und $\lambda = 0, 2$ sind. Man veranschauliche sich in Fig. 65 die Art, wie durch die einzelne dieser Substitutionen das Netz der zwölf Dreiecke in sich übergeführt wird. In den Fixpunkten jeder der drei zuletzt genannten elliptischen Substitutionen der Periode zwei finden übrigens die Werte $J = \infty$ und $J = 1$ statt.

Um die G_6 in die allgemeinen Erörterungen von S. 126 ff. über endliche Gruppen linearer Substitutionen einzufügen, projizieren wir die mit ihrem Dreiecksnetze versehene λ-Ebene stereographisch auf eine Kugeloberfläche. Wir denken zu diesem Zwecke die λ-Ebene horizontal angeordnet und wählen die Kugel des Radius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ mit dem Mittelpunkte $\lambda = \frac{1}{2}$, deren Oberfläche also gerade durch die beiden Punkte $\lambda = -\varrho^{\pm 1}$ hindurchzieht. Vollziehen wir im übrigen die Projektion nach den allgemeinen Vorschriften von S. 22 u. f., so gelangen wir zu einer Kugelteilung, deren Natur durch Fig. 66 dargelegt ist. Die drei durch $\lambda = -\varrho^{\pm 1}$ hindurchlaufenden Kreise der λ-Ebene werden drei größte Kugelkreise, die die Oberfläche in sechs kongruente Kugelzweiecke zerlegen; die reelle λ-Achse wird der zu jenen drei Kreisen orthogonal verlaufende größte Kugelkreis, der jedes der ebengenannten Zweiecke in zwei symmetrische Dreiecke zerlegt. Wie wir von dieser Einteilung der Kugeloberfläche in zwölf sphärische Dreiecke nach den allgemeinen Entwicklungen von S. 132 über die Diëdergruppen zu unserer hier vorliegenden G_6 gelangen, ist nun leicht zu sehen. Im Sinne der damaligen Erklärungen zeichnen wir in der zur reellen λ-Achse gehörenden Diametralebene der Kugel das gleichseitige Dreieck der Eckpunkte $\lambda = 0, 1, \infty$. *Dann ist unsere G_6 der Substitutionen* (4) *einfach die Diëdergruppe G_6 aller Kugeldrehungen, welche jenes Dreieck in sich überführen.*

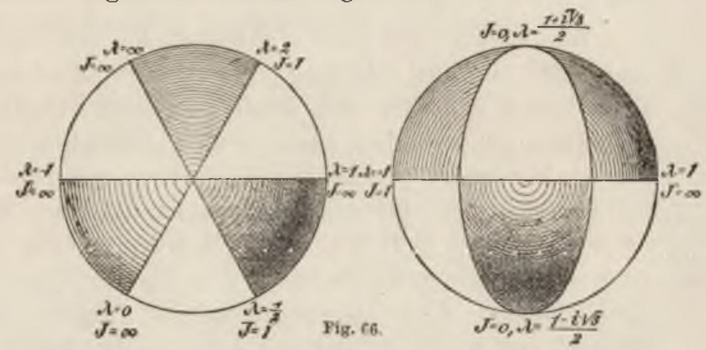


Fig. 66.

Die einfachste Gestalt unserer Diëdergruppe G_6 gewinnen wir übrigens, wenn wir die Substitutionen (4) (nach den allgemeinen Vorschriften von S. 128) mittelst der Substitution:

$$\zeta = \frac{\varrho\lambda + 1}{\lambda + \varrho}$$

auf ζ transformieren. Dabei gelangen die beiden Fixpunkte der zyklischen G_3 nach $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$, während die reelle λ-Achse den Einheitskreis der ζ-Ebene liefert. Die Substitutionen der G_6 rechnen sich um auf die Gestalt:

(5) $$\zeta' = \varrho^\nu \zeta, \quad \zeta' = \frac{\varrho^\nu}{\zeta}. \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

Die Gleichung (3) aber nimmt die Gestalt an:

$$J : (J-1) : 1 = 4\zeta^3 : (\zeta^3 + 1)^2 : -(\zeta^3 - 1)^2,$$

deren Invarianz gegenüber den Substitutionen (5) unmittelbar ersichtlich ist.

Wir wollen auch noch den Begriff des „Diskontinuitätsbereiches" (vgl. S. 233) auf unsere Gruppe G_6 anwenden und nennen zu dem Zwecke zwei Punkte λ und λ', die durch irgendeine Substitution der G_6 zusammenhängen, bezüglich dieser Gruppe „äquivalent". Es ist ersichtlich, daß wir aus irgend zwei nebeneinander liegenden Dreiecken der Fig. 65 einen Bereich (Doppeldreieck) zusammensetzen können, der für jeden Punkt der λ-Ebene einen und nur einen äquivalenten Punkt aufweist. Wir wählen zu diesem Zwecke etwa die beiden Dreiecke der Ecken $\lambda = 0, \frac{1}{2}, -\varrho^{\pm 1}$. Die Randpunkte dieses Doppeldreiecks sind dann freilich noch zu Paaren einander äquivalent und gehen durch eine der beiden Substitutionen:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \lambda' = 1 - \lambda$$

ineinander über. Das ausgewählte Doppeldreieck ist in Fig. 67 dargestellt, und es mögen etwa die stark markierten Randstücke dem Bereiche als zugehörig angesehen werden, die Randpunkte λ mit einem von 0 verschiedenen *positiven* imaginären Bestandteil jedoch nicht. *Ein Diskontinuitätsbereich der Gruppe G_6 der Substitutionen* (4) *wird durch das in Fig. 67 schraffierte Doppeldreieck geliefert, dessen Werte λ durch die Bedingung*:

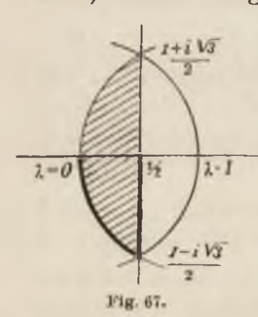


Fig. 67.

(6) $$\lambda\bar{\lambda} \leqq \lambda + \bar{\lambda} \leqq 1$$

charakterisierbar sind, unter $\bar{\lambda}$ den zu λ konjugiert komplexen Wert verstanden; gemäß der getroffenen Festsetzung darf in dieser Bedingung eines der Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn λ reell ist oder einen negativen imaginären Bestandteil hat. Gilt es, in Zukunft unter den sechs Werten von λ einen einzelnen zu bevorzugen, so wird es zweckmäßig erscheinen, immer den die Bedingung (6) erfüllenden Wert zu wählen.

Für die Normalgestalt erster Stufe der Verzweigungsform haben wir früher die Wurzeln z durch e_1, e_2, e_3, ∞ bezeichnet. Bei der hier vor-

gelegten beliebigen Gestalt f_z der Verzweigungsform haben wir die vier Wurzeln z vorerst $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ genannt. Es handelt sich jetzt noch darum, eine Bestimmung darüber zu treffen, wie diese vier Wurzeln den vorgenannten Wurzeln der Normalform erster Stufe entsprechen sollen, sofern wir λ unmittelbar in den Wurzeln dieser Normalform f_z darstellen wollen. Als zweckmäßig wird sich späterhin folgende Zuordnung der Bezeichnungen erweisen:

$$e^{(1)} = \infty, \quad e^{(2)} = e_2, \quad e^{(3)} = e_3, \quad e^{(4)} = e_1.$$

Für die Darstellung des Doppelverhältnisses λ in den Wurzeln e_1, e_2, e_3 der normalen Verzweigungsform erster Stufe folgern wir daraufhin aus (8) *S. 345 die Regeln:*

(7) $$\lambda = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1}.$$

§ 3. Die Normalgestalt zweiter Stufe der Verzweigungsform.

Die irrationalen Invarianten L, M, N bzw. die absolute irrationale Invariante λ treten als Koeffizienten in einer neuen Normalgestalt der Verzweigungsform auf, welche wir als die Normalgestalt „zweiter Stufe“ bezeichnen werden. Wir gelangen zu dieser neuen Gestalt, wenn wir z derart linear in z' tramsformieren, daß drei von den vier Nullpunkten der transformierten Form $f'_{z'}$ bei $z' = 0, 1$ und ∞ gelegen sind. Hierbei müssen notwendig die vier Nullpunkte von f_z unsymmetrisch behandelt werden, wodurch das Auftreten der irrationalen Invarianten begründet ist.

Um zunächst alle Möglichkeiten gleichmäßig zu berücksichtigen, verstehen wir unter i, k, l, m irgendeine Anordnung der Indizes 1, 2, 3, 4. Wir wollen alsdann $z = e^{(i)}$ nach $z' = 0$, $z = e^{(k)}$ nach $z' = 1$, $z = e^{(m)}$ nach $z' = \infty$ durch lineare Transformation hinverlegen. Die lineare Substitution, welche dies leistet, ist eindeutig bestimmt und gegeben durch die erste der beiden folgenden Gleichungen:

$$z' = \frac{e^{(m)} - e^{(k)}}{e^{(i)} - e^{(k)}} \cdot \frac{z - e^{(i)}}{z - e^{(m)}}, \quad 1 - z' = \frac{e^{(i)} - e^{(m)}}{e^{(i)} - e^{(k)}} \cdot \frac{z - e^{(k)}}{z - e^{(m)}};$$

die zweite gleich zu benutzende Gleichung ist eine unmittelbare Folge der ersten. Bei Einführung der homogenen Schreibweise bedienen wir uns zunächst eines Proportionalitätsfaktors μ, indem wir:

(1) $$\begin{cases} z'_1 = \mu\,(e^{(m)}, e^{(k)})\ (z, e^{(i)}), \\ z'_2 - z'_1 = \mu\,(e^{(i)}, e^{(m)})\ (z, e^{(k)}), \\ z'_2 = \mu\,(e^{(i)}, e^{(k)})\ (z, e^{(m)}) \end{cases}$$

schreiben. Wir wollen μ so bestimmen, daß die hiermit gegebene homogene Substitution „unimodular" wird (vgl. 120). Dies ist der Fall, wenn:

(2) $$\mu^2(e^{(l)}, e^{(k)})\ (e^{(i)}, e^{(m)})\ (e^{(m)}, e^{(k)}) = 1$$

gilt; hierdurch ist μ bis auf das Vorzeichen bestimmt, wir denken dieses Vorzeichen beliebig, aber fest gewählt.

Aus (1) und (2) ergibt sich zunächst unmittelbar:

(3) $$z_1'(z_2' - z_1')\, z_2' = \mu(z, e^{(i)})\ (z, e^{(k)})\ (z, e^{(m)}),$$

so daß wir jetzt nur noch zu untersuchen haben, in welcher Weise sich $(z, e^{(l)})$ in z_1' und z_2' ausdrückt. Jedenfalls gilt der Ansatz:

$$(z, e^{(l)}) = az_1' + bz_2'.$$

Tragen wir rechts die Ausdrücke (1) für z_1', z_2' in den z_1, z_2 ein, so gilt in z_1, z_2 identisch:

$$(z, e^{(l)}) = \mu(a(e^{(m)}, e^{(k)})\ (z, e^{(i)}) + b(e^{(i)}, e^{(k)})\ (z, e^{(m)})).$$

Man gewinnt hieraus a und b am einfachsten, indem man zunächst $z = e^{(m)}$ und sodann $z = e^{(i)}$ einsetzt; es ergibt sich:

$$a = \frac{(e^{(l)}, e^{(m)})}{\mu(e^{(i)}, e^{(m)})\ (e^{(m)}, e^{(k)})}, \quad b = \frac{(e^{(i)}, e^{(l)})}{\mu(e^{(i)}, e^{(k)})\ (e^{(i)}, e^{(m)})}.$$

Bedienen wir uns der Abkürzungen:

(4) $$A = (e^{(i)}, e^{(k)})\ (e^{(l)}, e^{(m)}), \qquad B = (e^{(i)}, e^{(l)})\ (e^{(m)}, e^{(k)}),$$

so können wir die beiden Gleichungen für a und b mit Benutzung von (2) in die einfache Form kleiden:

$$a = \mu A, \qquad b = \mu B,$$

und also wird:

$$(z, e^{(l)}) = \mu(Az_1' + Bz_2').$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit dem aus (3) hervorgehenden Ausdruck für das Produkt $(z, e^{(i)})\,(z, e^{(k)})\,(z, e^{(m)})$ liefert jetzt:

$$(z, e^{(i)})\,(z, e^{(k)})\,(z, e^{(l)})\,(z, e^{(m)}) = z_1'\,(z_2' - z_1')\,(Az_1' + Bz_2')\,z_2',$$

wo rechts die auf die neuen Variabelen transformierte Form gewonnen ist.

In den A, B haben wir nun in der Tat unsere ganzen irrationalen Invarianten wiedergewonnen. Wählen wir die Permutation $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$, so gilt direkt $A = L$, $B = M$, was wir zusammenfassend durch $(A, B) = (L, M)$ kennzeichnen wollen. Bei den Permutationen der Vierergruppe G_4 bleiben nach S. 343 die L, M unverändert. Gegenüber allen 24 Permutationen der vier Indizes 1, 2, 3, 4 erfahren die L, M demnach im ganzen sechs Änderungen, welche in der Tabelle S. 344 zusammengestellt sind. Die sechs möglichen Wertepaare A, B sind demgemäß die folgenden:

(5) $$(A, B) = (L, M),\ (N, L),\ (M, N),\ (-M, -L),\ (-N, -M),\ (-L, -N).$$

Wir sind auf diese Weise zu folgendem Ergebnis gelangt: *Als Normalgestalt zweiter Stufe der Verzweigungsform bezeichnen wir:*

$$(6)\qquad f_z = z_1(z_2 - z_1)(Az_1 + Bz_2)z_2;$$

dieselbe ist in sechs Gestalten mittelst linearer unimodularer Transformation erreichbar, insofern sich für die Koeffizienten A, B die sechs Darstellungen (5) *in den ganzen irrationalen Invarianten ergeben. Zu jeder einzelnen dieser sechs Darstellungen* (6) *führen von der zunächst vorgelegten Form stets vier Substitutionen* (1), *welche aus einer unter ihnen durch die vier Permutationen der Vierergruppe G_4, angewandt auf die Indizes i, k, l, m, hervorgehen.* Schreiben wir die Gleichung (6) in der Gestalt:

$$(7)\qquad f_z = Bz_1(z_2 - z_1)(z_2 - \lambda z_1)z_2,$$

so korrespondieren den sechs in (5) gegebenen Werten B die sechs Gestalten, welche das Doppelverhältnis λ unserer vier Punkte $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, $e^{(4)}$ hat. Halten wir an der ursprünglichen Erklärung (9) S. 345 von λ fest, so ergibt sich diejenige Normalgestalt zweiter Stufe der Verzweigungsform:

$$(8)\qquad f_z = Mz_1(z_2 - z_1)(z_2 - \lambda z_1)z_2,$$

welche wir weiterhin bevorzugen werden.

Es mag noch gestattet sein, je die sechs besonderen Normalformen (7) zu notieren, die im harmonischen und im äquianharmonischen Falle eintreten. Im ersteren Falle sind die sechs Lösungen λ der Gleichung (3) S. 347, dem Werte $J = 1$ entsprechend, zu Paaren einander gleich, und zwar gleich -1, $\frac{1}{2}$ und 2. Setzen wir im Anschluß an Fig. 39, S. 173, $e_1 = -1$, $e_3 = 0$, $e_2 = 1$ für die drei endlichen Nullpunkte der Verzweigungsform erster Stufe ein und bedienen uns der Gleichung (7) S. 351 zur Berechnung von λ, so folgt als in (8) einzutragen $\lambda = \frac{1}{2}$, und übrigens gilt:

$$L = N = -\tfrac{1}{2}M.$$

Im harmonischen Falle berechnen sich als die sechs Gestalten der Verzweigungsform zweiter Stufe:

$$(9)\qquad \begin{cases} \pm Lz_1(z_2 - z_1)(\ z_2 + z_1)z_2, \\ \pm Lz_1(z_2 - z_1)(2z_2 - z_1)z_2, \\ \pm Lz_1(z_2 - z_1)(z_2 - 2z_1)z_2. \end{cases}$$

Im äquianharmonischen Falle ist $J = 0$, und die sechs λ werden zu je drei den beiden Werten $-\varrho^{\pm 1}$ gleich. Im Anschluß an Fig. 38, S. 171, setzen wir $e_1 = \varrho$, $e_2 = 1$, $e_3 = \varrho^2$ für die drei endlichen Wurzeln der Verzweigungsform erster Stufe, worauf die Gleichung (7) S. 351 als in (8) einzutragen den Wert $\lambda = -\varrho$ ergibt. Man führt die Rechnung

leicht weiter und findet: *Im äquianharmonischen Falle sind die sechs Gestalten der Verzweigungsform zweiter Stufe:*

$$(10)\qquad \begin{cases} L\varrho^\nu z_1(z_2 - z_1)(z_2 + \varrho\, z_1) z_2, \\ -L\varrho^\nu z_1(z_2 - z_1)(z_2 + \varrho^2 z_1) z_2, \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

§ 4. Die Normalgestalt vierter Stufe der Verzweigungsform.

Die Vierergruppe G_4 ist S. 131 ausführlich behandelt, und zwar ohne daß betreffs der Auswahl der Variabeln z irgendeine besondere Voraussetzung gemacht war. Die Substitutionen der G_4 bezeichneten wir durch $S_0 = 1, S_1, S_2, S_3$; die Fixpunkte der drei letzteren Substitutionen S_i mögen jetzt durch $\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(-i)}$ bezeichnet werden. Wir fanden, daß der G_4 ein bestimmtes System von drei einander orthogonal schneidenden Kreisen in der Art zugehört, daß die beiden Schnittpunkte je zweier unter diesen Kreisen das Fixpunktepaar $\varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(-i)}$ einer zugehörigen Substitution S_i liefern. Die betreffende Fig. 25, S. 131, ist hier als Fig. 68 mit der neuen Bezeichnung der Fixpunkte reproduziert.

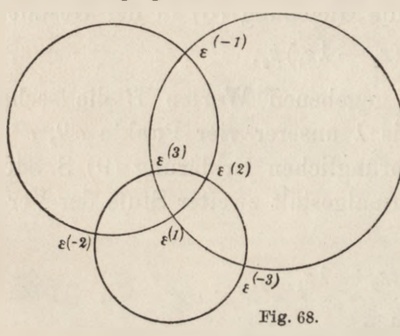


Fig. 68.

Unserer Verzweigungsform f_z gehört nun eine solche Vierergruppe G_4 von Substitutionen zu, welche die vier Nullpunkte der Form in der bekannten Weise zu Paaren permutieren. Wir wollen jetzt eine dritte Normalgestalt der Verzweigungsform f_z dadurch erklären, daß wir die Vierergruppe G_4 mittelst einer linearen Transformation auf ihre einfachste Ausdrucksform bringen. Zu diesem Zwecke verstehen wir unter i irgendeinen der sechs Indizes $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ und wollen eine neue Variabele z' so einführen, daß $z = \varepsilon^{(i)}$ und $z = \varepsilon^{(-i)}$ die Werte $z' = 0$ bzw. $z' = \infty$ liefern. Unter den vier dann noch verfügbaren Indizes wählen wir k beliebig und verlangen weiter, daß dem Werte $z = \varepsilon^{(k)}$ der Wert $z' = 1$ der neuen Variabelen entspricht. Diese Bestimmungen, welche, wie man sieht, in $6 \cdot 4 = 24$ Weisen durchführbar sind, legen die auszuübende Substitution eindeutig fest, und zwar in der Gestalt:

$$z' = \frac{\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(-i)}}{\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(i)}} \cdot \frac{z - \varepsilon^{(i)}}{z - \varepsilon^{(-i)}}.$$

Um diese Substitution homogen zu schreiben, spalten wir nicht nur die Variabelen, sondern auch die Werte ε je in Quotienten zweier Verhältnisgrößen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und bedienen uns der bisherigen symbolischen Bezeichnungen $(z, \varepsilon^{(i)})$, $(\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(i)})$, ... im üblichen Sinne. Unter Aufnahme

eines Proportionalitätsfaktors ν zerlegen wir alsdann die eben gegebene Substitution in:

$$(1) \qquad z_1' = \nu\,(\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(-i)})\,(z, \varepsilon^{(i)}), \quad z_2' = \nu\,(\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(i)})\,(z, \varepsilon^{(-i)})$$

und müssen, um hier eine unimodulare Substitution zu haben, ν auf eine der beiden Arten aus:

$$(2) \qquad \nu^2\,(\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(-i)})\,(\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(i)})\,(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(-i)}) = 1$$

berechnen.

In der z'-Ebene, die wir unter Fortlassung des oberen Index gleich wieder als z-Ebene bezeichnen, sind nun die drei Kreise der Fig. 68 einfach die reelle Achse, die imaginäre Achse und der Einheitskreis. In der transformierten Gestalt besteht somit die Vierergruppe G_4 aus den vier Substitutionen:

$$(3) \qquad z' = \pm z, \quad z' = \pm z^{-1}.$$

Statt die 24 Arten, diese Gestalt der G_4 zu gewinnen, nebeneinander zu betrachten, können wir übrigens auch in der Weise verfahren, daß wir eine Art bevorzugen und hinterher diejenigen 24 Substitutionen charakterisieren, welche von der bevorzugten neuen Variabelen zu allen 24 gleichberechtigten hinführen. Dieser Ansatz nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn wir die neue z-Ebene genau unter Einhaltung der Vorschrift von S. 22 auf eine Kugeloberfläche projizieren. Auf dieser Kugelfläche sind dann die Fixpunkte $0, \infty, \pm 1, \pm i$ der Substitutionen (3) unser G_4 die Ecken *eines mit der Kugel konzentrischen Oktaeders.* Die nach dem allgemeinen Ansatze von S. 130ff. herzustellende *„Oktaedergruppe"*, d. h. die Gruppe aller derjenigen Kugeldrehungen, bei denen jenes Oktaeder mit sich selbst zur Deckung kommt, liefert uns dann gerade die 24 hier gesuchten linearen Substitutionen von z. Wir können diese 24 Substitutionen in folgender Art zusammenfassend schreiben:

$$(4) \quad z' = i^\alpha z,\ i^\alpha z^{-1},\ i^\alpha \frac{z+1}{z-1},\ i^\alpha \frac{z-1}{z+1},\ i^\alpha \frac{z+i}{z-i},\ i^\alpha \frac{z-i}{z+i}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

und fügen noch einige Angaben über die Struktur der Oktaedergruppe hinzu. In dieser G_{24} sind zunächst drei zyklische Untergruppen G_4 enthalten, deren einzelne aus den Drehungen um zwei gegenüberliegende Oktaederecken bestehen; so gehört z. B. zu den beiden diametralen Punkten $z = \pm 1$ die G_4:

$$z' = \frac{iz+1}{z+i},\quad \frac{1}{z},\quad \frac{iz-1}{-z+i},\quad z.$$

Weiter haben wir vier zyklische Untergruppen G_3, deren einzelne neben der identischen Substition die Drehungen um zwei gegenüberliegende

Seitenmitten des Oktaeders enthält; ein Beispiel eines solchen Paares von Seitenmitten wird von den beiden Werten:

$$z = -\frac{1+i}{2}(1 \pm \sqrt{3})$$

geliefert, die zugehörige zyklische G_3 besteht aus:

$$z' = \frac{-z+i}{z+i}, \quad \frac{-iz+i}{z+1}, \quad z.$$

Endlich folgen noch sechs zyklische Untergruppen G_2, deren einzelne neben der identischen Substitution die Drehungen um zwei diametrale Kantenmittelpunkte des Oktaeders umfaßt; ein Beispiel wird von den beiden Kantenmittelpunkten $z = 1 \pm \sqrt{2}$ geliefert, die zugehörige G_2 besteht aus den Substitutionen:

$$z' = \frac{z+1}{z-1}, \quad z.$$

Die Vierergruppe G_4 der Substitution (3) ist selbst in der Oktaedergruppe G_{24} als Untergruppe enthalten. Selbstverständlich kann man auch durch direkte Rechnung leicht zeigen, daß die Vierergruppe G_4 durch Transformation mittelst jeder der 24 Substitutionen (4) in sich übergeführt wird.[1])

Durch eine erste unter den 24 Substitutionen, welche die zur anfänglich vorgelegten Form f_z gehörende G_4 in ihre einfachste Gestalt (3) transformieren, werde der erste Nullpunkt $e^{(1)}$ jener Verzweigungsform in den Wert $z = \mu$ der neuen Variabelen übergeführt. Die gesamten 24 Substitutionen, welche die Normalgestalt (3) der Vierergruppe herstellen, liefern dann an Stelle von $e^{(1)}$ *24 Werte, welche aus jenem ersten Werte μ wieder durch die 24 Substitutionen* (4):

$$(5) \qquad \mu' = i^\alpha \mu, \quad \frac{i^\alpha}{\mu}, \quad i^\alpha\frac{\mu+1}{\mu-1}, \quad i^\alpha\frac{\mu-1}{\mu+1}, \quad i^\alpha\frac{\mu+i}{\mu-i}, \quad i^\alpha\frac{\mu-i}{\mu+i}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

zu berechnen sind. Jedoch erhalten wir hierbei nur *sechs* wesentlich, d. h. in Ansehung der Lage ihrer Nullpunkte, verschiedene transformierte Verzweigungsformen, da je vier unter den 24 Werten (5) als die vier Nullpunkte einer einzelnen transformierten Form zusammengehören. In der Tat entstehen aus dem einzelnen Werte μ' durch die vier in der G_{24} enthaltenen Substitutionen der Vierergruppe als vier Nullpunkte einer transformierten Form $z = \pm\mu', \pm\mu'^{-1}$.

1) Die Vierergruppe wird dieserhalb als eine „ausgezeichnete" Untergruppe der Oktaedergruppe G_{24} bezeichnet; man vgl. übrigens betreffs der Struktur und Darstellung der Oktaedergruppe Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder", (Leipzig, 1884) S. 15.

Wenden wir die unimodulare Substitution (1) an, so hat hiernach die transformierte Form die Gestalt:

$$a_0'(z_1 - \mu z_2)(z_1 + \mu z_2)(z_1 - \mu^{-1} z_2)(z_1 + \mu^{-1} z_2),$$

wenn a_0' der Koeffizient von z_1^4 in der transformierten Form ist. Um die homogene Schreibweise völlig durchzuführen, setzen wir $\mu = \mu_1 : \mu_2$ und schreiben als weitere Bedingung für die Bestimmung der Verhältnisgrößen μ_1, μ_2 vor:

$$a_0' = \mu_1^2 \mu_2^2,$$

wodurch die μ_1, μ_2 bis auf eine Potenz der imaginären Einheit i als gemeinsamen Faktor bestimmt sind; diese Potenz sei beliebig ausgewählt. *Wir gelangen auf diese Weise zu der mittelst einer unimodularen linearen Substitution erreichbaren Normalgestalt:*

(6) $$f_z = (\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2),$$

die wir im Sinne der im folgenden Kapitel zu gebenden allgemeinen Erklärungen als die Normalgestalt „vierter" Stufe der Verzweigungsform zu bezeichnen haben.

Schreiben wir die Substitutionen (3) der G_4 homogen und unimodular (unter beliebiger Auswahl des bei der einzelnen Substitution dann noch verfügbaren Vorzeichens), so wird die Normalform (6) diesen Substitutionen gegenüber unmittelbar in sich transformiert, wie man leicht feststellt. Gegenüber allen 24 entsprechend homogen und unimodular geschriebenen Substitutionen der Oktaedergruppe erhalten wir also trotz der 24 verschiedenen Gestalten (5) von μ *nur sechs verschiedene Normalgestalten* (6) *vierter Stufe der Verzweigungsform.*

Sehr leicht sind die Beziehungen zwischen μ_1, μ_2 bzw. μ und den rationalen Invarianten hergestellt. Berechnen wir auf Grund der Regeln (10) S. 122 die ganzen rationalen Invarianten g_2, g_3 für die Form:

$$f_z = \mu_1^2 \mu_2^2 z_1^4 - (\mu_1^4 + \mu_2^4) z_1^2 z_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 z_2^4,$$

so ergeben sich für $12 g_2$ und $216 g_3$ sehr leicht folgende Ausdrücke in μ_1, μ_2:

(7) $$\begin{cases} 12 g_2 = \mu_1^8 + 14 \mu_1^4 \mu_2^4 + \mu_2^8, \\ 216 g_3 = \mu_1^{12} - 33 \mu_1^8 \mu_2^4 - 33 \mu_1^4 \mu_2^8 + \mu_2^{12}. \end{cases}$$

Für die Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ findet man hieraus die Beziehung:

(8) $$16 \Delta = \mu_1^4 \mu_2^4 (\mu_1^4 - \mu_2^4)^4.$$

Tragen wir diese Ausdrücke für g_2, g_3, Δ in die Proportion (16) S. 124 ein, so ergibt sich als *Beziehung zwischen μ und der absoluten rationalen Invariante J:*

(9) $$J:(J-1):1 = (\mu^8 + 14\mu^4 + 1)^3 : (\mu^{12} - 33\mu^8 - 33\mu^4 + 1)^2 : 108\mu^4(\mu^4 - 1)^4.$$

Wir haben damit die sogenannte „*Oktaedergleichung*" gewonnen[1]), deren 24 Lösungen μ bei gegebenem J sich in einer unter ihnen durch die 24 Oktaedersubstitutionen (5) darstellen.

Auch zur absoluten irrationalen Invariante λ ist μ leicht in Beziehung zu setzen. Berechnen wir λ nach der Regel (8) S. 345 für die Form (6), so kann man das Resultat leicht wieder in die Gestalt einer Proportion kleiden:

$$(10) \qquad \lambda : (\lambda - 1) : 1 = 4\mu^2 : (\mu^2 + 1)^2 : -(\mu^2 - 1)^2.$$

Bei gegebenem λ liegt hier eine biquadratische Gleichung für μ vor (Gleichung der Vierergruppe), deren vier Lösungen μ sich in einer unter ihnen in der Gestalt $\mu' = \pm\mu, \pm\mu^{-1}$ darstellen. Der einzelnen unter den sechs Gestalten des Doppelverhältnisses λ gehören demnach immer gewisse vier unter den 24 Ausdrücken (5) für μ zu, und zwar solche vier μ, die die Nullpunkte einer der sechs Verzweigungsformen vierter Stufe zusammensetzen. *Die sechs Gestalten der Verzweigungsform zweiter Stufe sind in dieser Weise den sechs Normalgestalten vierter Stufe der Verzweigungsform eindeutig zugeordnet.*

Wir wollen noch die unimodularen Substitutionen ausrechnen, welche die Verzweigungsform zweiter Stufe:

$$f_{z'} = z_1'(-z_1' + z_2')(Lz_1' + Mz_2')z_2'$$

in der Art in diejenige vierter Stufe:

$$f_z = (\mu_2 z_1 - \mu_1 z_2)(\mu_2 z_1 + \mu_1 z_2)(\mu_1 z_1 - \mu_2 z_2)(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$$

überführen, daß die Relation (10) zwischen λ und μ besteht. Wir können dies z. B. dadurch erreichen, daß wir die vier Faktoren von $f_{z'}$ in der eben angegebenen Reihenfolge denen von f_z entsprechen lassen. Es ist also zu setzen:

$$z_1' = a(\mu_2 z_1 - \mu_1 z_2), \qquad z_2' = b(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2),$$

wobei, damit die Determinante 1 vorliegt, die Faktoren a und b die Bedingung befriedigen müssen:

$$(11) \qquad ab(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 1.$$

Für den zweiten Faktor $(-z_1' + z_2')$ haben wir unter Einführung einer dritten Konstanten c den Ansatz:

$$-z_1' + z_2' = (b\mu_1 - a\mu_2)z_1 + (b\mu_2 + a\mu_1)z_2 = c\mu_2 z_1 + c\mu_1 z_2.$$

Es ist demnach zu setzen:

$$b\mu_1 - a\mu_2 = c\mu_2, \qquad b\mu_2 + a\mu_1 = c\mu_1,$$

woraus wir finden:

$$a(\mu_1^2 + \mu_2^2) = c(\mu_1^2 - \mu_2^2), \qquad b(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 2c\mu_1\mu_2.$$

1) Vgl. Klein, a. a. O., S. 60.

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich bei Benutzung von (11) für c die Gleichung:

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = 2c^2\mu_1\mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2),$$

aus welcher sich c bis auf das willkürlich zu wählende Vorzeichen bestimmt; man findet mit Benutzung von (8):

$$a = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2\sqrt[8]{\varDelta}}, \quad b = \frac{\mu_1\mu_2}{\sqrt[8]{\varDelta}}, \quad c = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\sqrt[8]{\varDelta}}.$$

Der dritte Faktor von $f'_{z'}$ ergibt den Ansatz:

$$Lz_1' + Mz_2' = (aL\mu_2 + bM\mu_1)z_1 - (aL\mu_1 - bM\mu_2)z_2 = d\mu_1 z_1 - d\mu_2 z_2,$$

wo die neu eingeführte Konstante d, damit $f'_{z'} = f_z$ wird, aus:

$$abcd = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1^4 - \mu_2^4)}{4\sqrt[4]{\varDelta}\sqrt[8]{\varDelta}}\,d = \frac{d}{2\sqrt[8]{\varDelta}} = 1$$

zu berechnen ist und also gleich $2\sqrt[8]{\varDelta}$ gefunden wird. Die Gleichungen:

$$aL\mu_2 + bM\mu_1 = d\mu_1, \qquad aL\mu_1 - bM\mu_2 = d\mu_2$$

ergeben daraufhin mit Rücksicht auf die schon berechneten Werte von a, b, d für L und M folgende Ausdrücke in den μ_1, μ_2:

$$L = 4\mu_1^2\mu_2^2, \qquad M = (\mu_1^2 - \mu_2^2)^2,$$

woraus sich in der Tat die Relation (10) wieder ergibt. *Als unimodulare Substitution, welche die Verzweigungsform zweiter Stufe $f'_{z'}$ in diejenige vierter Stufe f_z transformiert, haben wir somit die folgende gewonnen:*

(12) $2\sqrt[8]{\varDelta}\,z_1' = (\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_2 z_1 - \mu_1 z_2), \quad 2\sqrt[8]{\varDelta}\,z_2' = 2\mu_1\mu_2(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2).$

§ 5. Die Normalgestalten zweiter und vierter Stufe der elliptischen Integrale.

Das elliptische Integral erster Gattung hatten wir oben (S. 143) für beliebig gegebene Verzweigungsform f_z in die homogene Gestalt:

$$u = -\int\frac{(z, dz)}{\sqrt{f_z}}$$

gekleidet, in welcher das unter dem Integralzeichen stehende Klammersymbol das homogene Differential:

$$(z, dz) = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = -z_2^2 dz$$

ist, das S. 143 eingeführt wurde und sich daselbst gegenüber jeder „unimodularen“ z-Substitution als absolut invariant erwies. Durch solche Substitutionen konnten wir aber f_z auf die Normalgestalten zweiter und vierter Stufe transformieren. Wir bezeichnen entsprechend als *Normalintegral erster Gattung „zweiter Stufe“* das folgende:

$$u = -\int\frac{(z, dz)}{\sqrt{z_1(z_2 - z_1)(Lz_1 + Mz_2)z_2}},$$

behalten uns jedoch vor, dasselbe unten noch mit einem von z unabhängigen Faktor zu versehen, und erinnern sogleich auch daran, daß das Integral zweiter Stufe hier in einer unter sechs gleichberechtigten Gestalten erscheint. Weiter ist eine der gleichberechtigten Gestalten des *Integrals erster Gattung vierter Stufe:*

$$u = -\int \frac{(z, dz)}{\sqrt{(\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2)}}.$$

In nicht-homogener Gestalt können wir diese beiden Darstellungen des Integrals erster Gattung so schreiben:

(1)
$$u = \frac{1}{\sqrt{M}} \int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$
$$u = \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz}{\sqrt{(\mu^2 - z^2)(1 - \mu^2 z^2)}}.$$

Das Integral vierter Stufe wollen wir noch mittelst der linearen Substitution:

$$z = \mu z'$$

transformieren, so daß dasselbe unter Fortlassung des oberen Index bei z' die Gestalt gewinnt:

(2)
$$u = \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \mu^4 z^2)}}.$$

Es wird kaum eines Hinweises bedürfen, daß die Variabeln z in (1) und (2) nicht identisch sind, aber natürlich linear voneinander abhängen.

Das in (1) rechts stehende Integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

das den sechs Werten des Doppelverhältnisses λ entsprechend in sechs gleichberechtigten Gestalten angesetzt werden kann, wird auch als das *„Riemannsche Normalintegral"* bezeichnet, da dasselbe von Riemann in seinen „Vorlesungen über elliptische Funktionen"[1]) zugrunde gelegt wird. Das in (2) gewonnene Integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \mu^4 z^2)}}$$

hat die Gestalt des Legendreschen Normalintegrals erster Gattung, das insbesondere auch in der Jacobischen Theorie der elliptischen Funktionen benutzt wird. Aber man würde die Jacobische Theorie nicht in die richtige Beziehung zu den elliptischen Funktionen erster Stufe setzen, falls man in dem letzten Integral das Legendre-Jacobische Normalintegral erblicken sollte. Vielmehr entsteht das letztere durch Ausübung der

---

1) Mit Zusätzen herausgegeben von H. Stahl (Leipzig, 1899).

quadratischen Transformation $z = z'^2$ aus dem Integrale zweiter Stufe, wie unten darzulegen ist. Dagegen sollte das zuletzt angegebene Integral als das „*Abelsche Normalintegral*“ bezeichnet werden; in der Tat ist dasselbe von Abel in den „Recherches sur les fonctions elliptiques“[1]) durch *lineare* Transformation gewonnen, und es werden a. a. O. die verschiedenen der Oktaedergruppe entsprechenden Gestalten von μ bereits angegeben, welche natürlich nur sechs verschiedene Werte von μ^4 liefern (S. 356).

Die Beziehung der Integrale zweiter und vierter Stufe zum Normalintegral erster Stufe (Weierstraßschen Normalintegrale) ist aus den Rechnungen der vorangehenden Paragraphen leicht festzustellen. Mit Rücksicht auf die späteren Ausführungen über die Jacobische Theorie haben wir diese Beziehung insbesondere für die zweite Stufe weiter zu verfolgen. Wir nehmen die Bezeichnungen $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ für die Nullpunkte einer zunächst beliebig gegebenen Verzweigungsform f_z wieder auf und wählen in den Formeln von S. 351 ff. für i, k, l, m, wie auch schon S. 352 geschah, die Kombination 1, 2, 3, 4. Das in z' geschriebene Integral zweiter Stufe gewinnt man dann nach S. 351 durch die Transformation:

$$(3) \qquad z' = \frac{e^{(4)} - e^{(2)}}{e^{(1)} - e^{(2)}} \cdot \frac{z - e^{(1)}}{z - e^{(4)}},$$

eine Gleichung, aus welcher mit Rücksicht auf den Ausdruck von λ:

$$(4) \qquad \lambda = -\frac{(e^{(1)} - e^{(2)})(e^{(3)} - e^{(4)})}{(e^{(1)} - e^{(3)})(e^{(4)} - e^{(2)})}$$

leicht noch die Folgerungen:

$$(5) \qquad 1 - z' = \frac{e^{(1)} - e^{(4)}}{e^{(1)} - e^{(2)}} \cdot \frac{z - e^{(2)}}{z - e^{(4)}}, \qquad 1 - \lambda z' = \frac{e^{(1)} - e^{(4)}}{e^{(1)} - e^{(3)}} \cdot \frac{z - e^{(3)}}{z - e^{(4)}}$$

gezogen werden.

Ist nun f_z die Verzweigungsform erster Stufe, so hatten wir deren Nullpunkte bereits S. 351 in folgender Anordnung mit den $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ identisch gesetzt:

$$(6) \qquad e^{(1)} = \infty, \quad e^{(2)} = e_2, \quad e^{(3)} = e_3, \quad e^{(4)} = e_1.$$

Indem wir diese Anordnung bevorzugen, gelangen wir von der ersten Stufe aus zu einem ersten unter den sechs gleichberechtigten Normalintegralen zweiter Stufe vermittelst der Transformation:

$$(7) \qquad z' = \frac{e_2 - e_1}{z - e_1}, \qquad 1 - z' = \frac{z - e_2}{z - e_1}, \qquad 1 - \lambda z' = \frac{z - e_3}{z - e_1},$$

---

1) S. insbesondere Abel, „Oeuvres complètes“, neue Ausgabe von Sylow und Lie, Bd. 1, S. 459, Formel (9).

während wir für λ auf die schon S. 351 angegebene Darstellung:

(8) $$\lambda = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}$$

zurückkommen. Für f_z ist entsprechend der Festsetzung (6) in die Formeln, welche die irrationalen Invarianten erklären, an Stelle der allgemeinen Gestalt der Verzweigungsform:

$$f_z = (z, e^{(1)})(z, e^{(2)})(z, e^{(3)})(z, e^{(4)})$$

nunmehr die Verzweigungsform erster Stufe mit folgender Anordnung der Faktoren einzutragen:

$$f_z = 4z_2(z_1 - e_2 z_2)(z_1 - e_3 z_2)(z_1 - e_1 z_2).$$

Denken wir also die Transformation (7) homogen und unimodular geschrieben, so wird sich f_z in z_1', z_2' so ausdrücken:

$$f_z = z_1'(z_2' - z_1')(Lz_1' + Mz_2')z_2',$$

wobei für L und M die Darstellungen gelten:

$$L = -\lambda M, \quad M = (e^{(1)}, e^{(3)})(e^{(4)}, e^{(2)}) = 4(e_2 - e_1).$$

Für $\sqrt{f_z}$ ergibt sich damit als Darstellung in den neuen Variabeln:

$$\sqrt{f_z} = \sqrt{e_2 - e_1} \cdot \sqrt{4z_1'(z_2' - z_1')(z_2' - \lambda z_1')z_2'}.$$

Das Vorzeichen der rechts auftretenden Wurzel $\sqrt{e_2 - e_1}$ wollen wir vorerst beliebig, aber fest gewählt denken und an der Auswahl weiterhin festhalten.[1]) Den im Nenner des Integrals stehenden Faktor $\sqrt{e_2 - e_1}$ multiplizieren wir nach links hinauf. *Das so entspringende Integral:*

(9) $$u\sqrt{e_2 - e_1} = \int \frac{dz'}{\sqrt{4z'(1 - z')(1 - \lambda z')}}$$

wollen wir endgültig als das Normalintegral erster Gattung zweiter Stufe (in einer ersten unter den sechs Gestalten) erklären. Wir gebrauchen für dasselbe die Bezeichnung w, so daß dieses Integral unter Fortlassung des oberen Index bei z' erklärt ist durch:

(10) $$w = \int \frac{dz}{\sqrt{4z(1 - z)(1 - \lambda z)}}.$$

Was die Integrale der beiden anderen Gattungen angeht, so mögen wieder nur für die zweite Stufe einige Ausführungen angeschlossen werden. Das Normalintegral zweiter Gattung erster Stufe:

$$\zeta = -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

hatte den Pol bei $z = \infty$. Wir gelangen bei Gebrauch der bisherigen Transformationen zu dem bei Legendre und Jacobi vorliegenden Integrale, falls wir den Pol zunächst nach $z = e_1$ verlegen. Diesem

1) Unten (in § 4 des folgenden Kapitels) wird $\sqrt{e_2 - e_1}$ eindeutig fixiert.

Zwecke dient die Formel (4) S. 152; dieselbe nimmt, wenn wir die Integrale durchweg unbestimmt schreiben und für f_2 die Verzweigungsform erster Stufe eintragen, die Gestalt an:

$$-\int \Phi(z, e_1)\,du = \frac{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}{2(z - e_1)} + \zeta.$$

Die Funktion $\Phi(z, e_1)$ hat nach S. 147 die Bedeutung:

$$\Phi(z, e_1) = \tfrac{1}{4} f'(e_1)(z - e_1)^{-1} + \tfrac{1}{24} f''(e_1),$$

bestimmt sich also, wenn wir für $f(z)$ seine Bedeutung eintragen, zu:

$$\Phi(z, e_1) = \frac{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}{z - e_1} + e_1 = -(e_2 - e_1)\left(1 - \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} \cdot \frac{e_2 - e_1}{z - e_1}\right) + e_2.$$

Durch Eintragung dieses Ausdruckes von $\Phi(z, e_1)$ in das eben angegebene Integral und Division mit $\sqrt{e_2 - e_1}$ ergibt sich:

$$\int \left(1 - \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} \cdot \frac{e_2 - e_1}{z - e_1}\right) d\left(u\sqrt{e_2 - e_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1}}\left(\zeta + e_2 u + \frac{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}{2(z - e_1)}\right).$$

Transformieren wir nun das links stehende Integral auf Grund von (7), (8) und (9) auf die der zweiten Stufe zugrunde liegende Variabele z', so folgt:

$$(11) \quad \int \frac{(1 - \lambda z')\,dz'}{\sqrt{4z'(1 - z')(1 - \lambda z')}} = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1}}\left(\zeta + e_2 u + \frac{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}{2(z - e_1)}\right).$$

Das links gewonnene Integral ist das Normalintegral zweiter Gattung zweiter Stufe, welches wir einführen wollen; wir nehmen für dasselbe die frühere Bezeichnung Z wieder auf und haben also unter Fortlassung des oberen Index bei z' folgende Erklärung des Integrals Z:

$$(12) \qquad Z = \int \frac{(1 - \lambda z)\,dz}{\sqrt{4z(1 - z)(1 - \lambda z)}} = \int \sqrt{\frac{1 - \lambda z}{4z(1 - z)}}\,dz,$$

dessen Zusammenhang mit dem Integral erster Stufe ζ durch (11) angegeben ist.

Das in (5) S. 153 angegebene Normalintegral dritter Gattung erster Stufe, welches unbestimmt geschrieben:

$$\int \frac{dz}{(z - t)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int \frac{du}{z - t}$$

lautet, war unter der Voraussetzung gebildet, daß t endlich und von den e_k verschieden war. Diese Voraussetzung, an der wir festhalten, hat zur Folge, daß die beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkte in der zweiblättrigen Riemannschen Fläche gerade übereinander liegen, nämlich an den beiden durch $z = t$ gegebenen Stellen. Beim Übergang zur zweiten Stufe auf Grund der Transformationen (7) hat man zu setzen:

$$\frac{1}{z - t} = \frac{1}{e_1 - t} - \frac{e_2 - e_1}{(t - e_1)^2} \cdot \frac{1}{z' - \alpha}, \qquad \alpha = \frac{e_2 - e_1}{t - e_1},$$

so daß in der transformierten Riemannschen Fläche die Unstetigkeitspunkte bei $z' = \alpha$ übereinander liegen. Durch Multiplikation mit $d(u\sqrt{e_2 - e_1})$, Integration und eine einfache Umformung ergibt sich:

$$(13)\quad \int \frac{dz'}{(z'-\alpha)\sqrt{4z'(1-z')(1-\lambda z')}} = -\frac{t-e_1}{\sqrt{e_2 - e_1}}\left(u + (t-e_1)\int \frac{du}{z-t}\right).$$

Dieses Integral bezeichnen wir als Normalintegral dritter Gattung zweiter Stufe; dasselbe möge entsprechend der früheren Bezeichnung wieder durch das Symbol Π gekennzeichnet werden, so daß wir bei Fortlassung des oberen Index an z':

$$(14)\qquad \Pi = \int \frac{dz}{(z-\alpha)\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}}$$

zu schreiben haben.

Den sechs verschiedenen Gestalten des Doppelverhältnisses λ entsprechen sechs verschiedene Arten, die Integrale der zweiten Stufe herzustellen, wie schon wiederholt hervorgehoben wurde. Wir gelangen zu allen sechs Gestalten, wenn wir in den Transformationsformeln (3) ff. die oberen Indizes der $e^{(k)}$ permutieren. Mit Rücksicht auf die Invarianz von λ gegenüber den Substitutionen der Vierergruppe G_4, deren Substitutionen übrigens, beiläufig bemerkt, in der Variabeln z der zweiten Stufe die einfache Gestalt:

$$z' = z, \qquad z' = \frac{1}{\lambda z}, \qquad z' = \frac{z-1}{\lambda z - 1}, \qquad z' = \frac{\lambda z - 1}{\lambda z - \lambda}$$

annehmen, gelangen wir bereits zu allen sechs gleichberechtigten Gestalten, wenn wir in (7) und (8) die sechs Permutationen der unteren Indizes an den e_1, e_2, e_3 vornehmen. *Die sechs gleichberechtigten Variabeln z hängen dabei (ebenso wie die sechs Werte λ) linear zusammen; und wir gelangen, wie man aus* (7) *und* (8) *leicht berechnet, zu folgenden sechs, den links angeschriebenen Permutationen entsprechenden Transformationen:*

$$(15)\qquad \begin{cases} e_1, e_2, e_3; & z' = z, & \lambda' = \lambda, \\ e_1, e_3, e_2; & z' = \lambda z, & \lambda' = \dfrac{1}{\lambda}, \\ e_2, e_1, e_3; & z' = \dfrac{z}{z-1}, & \lambda' = 1 - \lambda, \\ e_2, e_3, e_1; & z' = \dfrac{(1-\lambda)z}{z-1}, & \lambda' = \dfrac{1}{1-\lambda}, \\ e_3, e_1, e_2; & z' = \dfrac{\lambda z}{\lambda z - 1}, & \lambda' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ e_3, e_2, e_1; & z' = \dfrac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z}, & \lambda' = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}, \end{cases}$$

die eine Gruppe G_6 linearer Substitutionenpaare bilden.

Will man die sechs Gestalten des Integrals w miteinander in Beziehung setzen, so ist zunächst zu beachten, daß der unteren Grenze ∞ des Integrals erster Stufe u bei allen sechs Integralen w die untere Grenze $z' = 0$ entspricht. Da nun bei den Substitutionen (15) der Wert $z = 0$ immer auch $z' = 0$ liefert, so werden die sechs Integrale (mit den unteren Grenzen 0 angesetzt) zugleich verschwinden und also bis auf Faktoren, die von z unabhängig sind, gleich sein. Diese Faktoren sind zunächst nur bis auf das Vorzeichen bestimmt, da wir mit der einzelnen linearen Substitution (15) immer noch einen Austausch der Blätter der $\mathbf{F}_2$ und also einen Zeichenwechsel der Wurzel unter dem Integralzeichen verbinden können. Im übrigen hat man zu beachten, daß $dw = du\sqrt{e_2 - e_1}$ ist, und muß das Verhalten der rechts stehenden Wurzel gegenüber den Permutationen der e_1, e_2, e_3 feststellen. *Lassen wir den Substitutionen* (15) *die Transformationen:*

$$(16) \qquad w' = w, \quad w\sqrt{\lambda}, \quad iw, \quad iw\sqrt{1-\lambda}, \quad iw\sqrt{\lambda}, \quad w\sqrt{1-\lambda}$$

entsprechen und denken dabei $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda}$ irgendwie eindeutig gewählt, so würde dadurch über die Blätterzuordnung bei den Substitutionen (15) *eine eindeutige Bestimmung getroffen sein.*

Wollen wir etwa die dritte Gestalt des Integrals w direkt aus dem Integral u herstellen, so ist in (3), (4) und (5) einzutragen:

$$(17) \qquad e^{(1)} = \infty, \quad e^{(2)} = e_1, \quad e^{(3)} = e_3, \quad e^{(4)} = e_2,$$

was folgende Transformation ergibt:

$$(18) \qquad z' = \frac{e_1 - e_2}{z - e_2}, \quad 1 - z' = \frac{z - e_1}{z - e_2}, \quad 1 - \lambda' z' = \frac{z - e_3}{z - e_2},$$

$$(19) \qquad \lambda' = 1 - \lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}.$$

Die Form f_z, homogen und unimodular transformiert, liefert:

$$f_z = z_1'(z_2' - z_1')(L'z_1' + M'z_2')z_2',$$

wobei für L' und M' gilt:

$$L' = -\lambda' M', \quad M' = 4(e_1 - e_2),$$

λ' im Sinne von (19) gebraucht. Für die Wurzel $\sqrt{f}$ ist zu setzen:

$$\sqrt{f_z} = i\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{4z_1'(z_2' - z_1')(z_2' - \lambda' z_1')z_2'},$$

so daß für die neue Gestalt des Integrals erster Gattung zweiter Stufe sich ergibt:

$$w' = -\int \frac{(z', dz')}{\sqrt{4z_1'(z_2' - z_1')(z_2' - \lambda' z_1')z_2'}} = -i\sqrt{e_2 - e_1}\int \frac{(z, dz)}{\sqrt{f_z}}$$
$$= iu\sqrt{e_2 - e_1} = iw,$$

womit die unter (16) an dritter Stelle stehende Transformation $w' = iw$ wieder gewonnen ist.

Auch beim Integral zweiter Gattung zweiter Stufe:

$$Z = \int (1 - \lambda z)\, dw$$

wollen wir noch die Wirkung der weiterhin besonders wichtigen dritten Transformation (15) feststellen. Wir setzen, z', λ' und w' im Sinne dieser Transformation gebraucht, an:

$$Z' = \int (1 - \lambda' z')\, dw' = i \int \frac{1 - \lambda z}{1 - z}\, dw.$$

Nun zeigt man sehr leicht durch Differentiation die Richtigkeit der Gleichung:

$$w + \sqrt{\frac{z(1 - \lambda z)}{1 - z}} = \int \frac{2 - z - 2\lambda z + \lambda z^2}{1 - z}\, dw.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit i und zieht sie alsdann von der voraufgehenden Gleichung ab, so folgt:

$$\int (1 - \lambda' z')\, dw' - iw - i\sqrt{\frac{z(1 - \lambda z)}{1 - z}} = -i \int (1 - \lambda z)\, dw.$$

Die dritte Gestalt Z' des Integrals zweiter Gattung zweiter Stufe hängt demnach mit der ersten Z wie folgt zusammen:

$$(20) \qquad Z' = -iZ + iw + i\sqrt{\frac{z(1 - \lambda z)}{1 - z}}.$$

Zu demselben Ergebnis müssen wir gelangen, falls wir die fragliche dritte Gestalt von Z sogleich vom Normalintegrale ζ aus mittelst der Transformation (18) herstellen. An Stelle der Gleichung (11) tritt alsdann unter Austausch von e_1 und e_2 die folgende Gleichung für Z':

$$(21) \quad Z' = \int (1 - \lambda' z')\, dw' = \frac{1}{i\sqrt{e_2 - e_1}} \left(\zeta + e_1 u + \frac{\sqrt{4z_0^3 - g_2 z_0 - g_3}}{2(z_0 - e_2)} \right),$$

wo rechter Hand zur Vermeidung von Verwechslungen die der ersten Stufe zugrunde liegende Variabele z_0 genannt ist. Der Pol dieses Integrales entspricht der Stelle e_2 der ursprünglichen Riemannschen Fläche. Die in die Gestalt:

$$-iZ = -i\int (1 - \lambda z)\, dw = \frac{1}{i\sqrt{e_2 - e_1}} \left(\zeta + e_2 u + \frac{\sqrt{4z_0^3 - g_2 z_0 - g_3}}{2(z_0 - e_1)} \right)$$

umgeschriebene Gleichung (11) führt, mit (21) kombiniert, leicht zur Beziehung (20) zurück.

§ 6. Die Legendreschen Normalintegrale.

Die bei Legendre und im Anschluß an ihn bei Jacobi vorliegende Normalgestalt des Integrals erster Gattung stimmt äußerlich genommen, mit dem Integral vierter Stufe überein. Wie indessen bereits

oben (S. 360) hervorgehoben wurde und im nächsten Kapitel näher darzulegen ist, würde man die bei Jacobi vorliegenden Entwicklungen nicht in richtiger Weise an die Theorie der elliptischen Funktionen erster Stufe anschließen, wenn man das Integral vierter Stufe tatsächlich als das Legendresche Normalintegral auffassen würde. Die Einführung der Legendreschen Integrale hat vielmehr in folgender Weise zu geschehen: *Die Normalintegrale der zweiten Stufe w, Z und Π, die wir etwa in ihren Gestalten* (10), (12) *und* (14) § 5 *gegeben denken, gehen durch die quadratische Transformation:*

$$z = z'^2 \tag{1}$$

in die bei Legendre und Jacobi zugrunde liegenden Integrale über:

$$\left\{\begin{aligned} w &= \int \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-\lambda z'^2)}}, \\ Z &= \int \frac{(1-\lambda z'^2)\,dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-\lambda z'^2)}} = \int \sqrt{\frac{1-\lambda z'^2}{1-z'^2}}\,dz', \\ \Pi &= \int \frac{dz'}{(z'^2-\alpha)\sqrt{(1-z'^2)(1-\lambda z'^2)}}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Für $\sqrt{\lambda}$, eine Größe, die wir unten als Modulfunktion vierter Stufe eindeutig erklären, wollen wir die Jacobische Bezeichnung k einführen. Es ist dies die Größe, welche in der älteren Theorie, d. h. bei den elliptischen Funktionen zweiter Stufe, an Stelle der Größe J der ersten Stufe tritt; sie trägt entsprechend den Namen „*Modul*" oder genauer „*Legendrescher*" oder „*Jacobischer Integralmodul*", was allerdings insofern unserem bisherigen Brauche widerspricht, als wir den Periodenquotienten ω als „Modul" bezeichneten, die algebraischen Invarianten jedoch als Funktionen dieses Moduls ω auffaßten.

Setzen wir übrigens noch $\sqrt{\alpha} = \beta$ und lassen bei z' den oberen Index fort, so nehmen unsere Normalintegrale die Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} w &= \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ Z &= \int \frac{(1-k^2z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz, \\ \Pi &= \int \frac{dz}{(z^2-\beta^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Wir sind hiermit in der Tat zu elliptischen Integralen gelangt, bei denen die für das Normalintegral vierter Stufe charakteristische Gestalt der Verzweigungsform vorliegt. *Nur gehören diese Integrale überhaupt nicht mehr als solche zu unserem durch die ursprüngliche Fläche F_2 festgelegten algebraischen Gebilde des Geschlechtes 1, vielmehr zu einem neuen Ge-*

bilde, welches aus jenem durch Zusatz der aus (1) *hervorgehenden Funktion* $z' = \sqrt{z}$ *entsteht.* Die hierbei in Betracht kommenden algebraischen Entwicklungen sollen zunächst etwas weiter verfolgt werden; eine allseitige und durchsichtige Darlegung der Verhältnisse gewinnen wir erst von der transzendenten Seite aus im nächsten Kapitel.

Indem wir z wieder als Variabele der Integrale zweiter Stufe benutzen, wollen wir das Feld F der beiden algebraischen Funktionen $\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}$, $\sqrt{z}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, des Funktionenpaares $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$, $\sqrt{z}$ über der z-Ebene konstruieren. Das Feld F ist über der z-Ebene nur an den vier Stellen $z = 0, 1, \lambda^{-1}, \infty$ verzweigt. Dabei ändert ein einmaliger Umlauf um eine der Stellen 0 und ∞ die Funktion $\sqrt{z}$ im Zeichen, während $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$ unverändert bleibt; ebenso ändert ein einmaliger Umlauf um eine der Stellen 1 und λ^{-1} die Funktion $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$ im Vorzeichen bei unveränderter Wurzel $\sqrt{z}$. Somit ist an jeder der vier Stellen $0, 1, \lambda^{-1} \infty$ jedes einzelne Blatt des Feldes F mit einem zweiten Blatte durch einen zweiblättrigen Verzweigungspunkt verbunden, und vor allem ist F den vier Zeichenkombinationen bei $\pm\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$, $\pm\sqrt{z}$ entsprechend eine zusammenhängende vierblättrige Fläche F_4 über der z-Ebene.

Wie diese F_4 aus der ursprünglichen F_2 durch doppelte Überlagerung herstellbar ist, werden wir unten in sehr einfacher Weise darlegen. Einstweilen genügt es festgestellt zu haben, *daß das Feld des Funktionenpaares* $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$, $\sqrt{z}$ *über der z-Ebene eine vierblättrige Fläche* F_4 *mit acht, zu je zwei an den vier Stellen* $0, 1, \lambda^{-1}, \infty$ *liegenden, zweiblättrigen Verzweigungspunkten ist, deren Geschlecht p sich somit nach der Regel* (4) S. 88 *wieder zu 1 berechnet.*

Auf dieser F_4 des Geschlechtes 1 ist nun $z' = \sqrt{z}$ eine „zweiwertige" Funktion, welche demnach geeignet ist, die F_4 erneut auf eine zweiblättrige Fläche F_2' abzubilden. Zum Unterschiede von der ursprünglichen F_2 wollen wir für die eben erhaltene zweiblättrige Fläche des Geschlechtes 1 die Bezeichnung F_2' zunächst beibehalten, lassen hingegen den Index an der Variabeln z' entsprechend der Schreibweise (3) der Integrale dieser F_2' fort. Auf der F_2' ist alsdann die Funktion $\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda z^2)} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}$ eindeutig, so daß die vier Verzweigungspunkte, welche die F_2' als eine Fläche des Geschlechtes 1 besitzt, bei $z = \pm 1$ und $z = \pm k^{-1}$ gelegen sind. Vor allem haben wir das Ergebnis gewonnen: *Die Legendreschen Normalintegrale, als solche der ursprünglichen Fläche* F_2 *gedacht, sind die Normalintegrale vierter Stufe (Abelschen Normalintegrale) der eben gewonnenen Fläche* F_2' *des Geschlechtes 1.*

Schreiben wir, um die Integrale (3) äußerlich mit den Integralen vierter Stufe in Übereinstimmung zu bringen,

$$\mu_1^2 = k = \sqrt{\lambda},$$

so muß zwischen dieser Größe μ_1^2 und dem geeignet gewählten Doppelverhältnis λ_1 der vier Verzweigungspunkte der F_2' dieselbe Relation bestehen, welche wir unter (10) S. 358 zwischen μ^2 und λ aufstellten. Setzen wir aber, um die früheren Bezeichnungen der Verzweigungspunkte für die F_2' zu gebrauchen:

$$e^{(1)} = 1, \quad e^{(2)} = -1, \quad e^{(3)} = k^{-1}, \quad e^{(4)} = -k^{-1},$$

so ergibt sich:

$$\lambda_1 = -\frac{(e^{(1)} - e^{(2)})(e^{(3)} - e^{(4)})}{(e^{(1)} - e^{(3)})(e^{(4)} - e^{(2)})} = -\frac{4k^{-1}}{(1 - k^{-1})^2} = -\frac{4\mu_1^2}{(\mu_1^2 - 1)^2},$$

womit die Relation (10) S. 358 in der Tat wieder gewonnen ist.

Übrigens ist zu bemerken, *daß weder Z noch Π auf der F_2' ein Elementarintegral im Sinne von* S. 144 ff. *darstellt.* Es hat nämlich auf dieser Fläche Z *zwei* bei $z = \infty$ übereinander liegende Pole erster Ordnung, und Π besitzt *vier* logarithmische Unstetigkeitspunkte, die zu je zwei bei $z = \pm\beta$ übereinander liegen.

Beiläufig erwähnen wir noch Legendres eigene Bezeichnungen für die drei Integrale (3)[1]):

$$(4) \quad \begin{cases} F(c, \varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}, \\[2ex] E(c, \varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \\[2ex] \Pi(n, c, \varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Legendres ursprüngliche Bezeichnung des Moduls ist also c statt des späteren k; überdies ist $\varphi = \arcsin z$ als unabhängige Variabele gedacht, und die Integrale sind mit bestimmten Grenzen versehen. Endlich entsteht das Integral dritter Gattung aus dem Integrale (3) erst durch Behaften mit dem Faktor $-\beta^2$, und es ist statt $-\beta^{-2}$ die Bezeichnung n gebraucht. Für $\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}$ bedient sich Legendre der Abkürzung:

$$(5) \qquad \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi} = \Delta(c, \varphi).$$

Die Bezeichnungen Legendres haben die Wahl der Jacobischen Benennungen wesentlich beeinflußt.

---

1) S. dessen „Traité des fonctions elliptiques“. (Paris 1825), Bd. 1 S. 14 ff.

Die *Perioden* der Integrale der beiden ersten Gattungen treten bei Legendre zuerst in der Gestalt der sogenannten *„vollständigen Integrale“* auf. Um dieselben zu erklären und mit unseren Perioden ω_1, ω_2 von u und η_1, η_2, von ζ in die richtige Beziehung zu setzen, ist es unerläßlich, für die Wurzeln unter den Integralzeichen genaue Zeichendiskussionen anzustellen und also die beiden Blätter der Riemannschen Fläche F_2 deutlich auseinanderzuhalten. Wir knüpfen im übrigen die Betrachtung an die Integrale der zweiten Stufe (von denen aus die Legendreschen hernach leicht wieder erreicht werden) und bedienen uns der von Jacobi eingeführten, sehr verbreiteten Bezeichnungen.

In Fig. 38, S. 171, haben wir ein Bild der ursprünglichen zweiblättrigen Riemannschen Fläche, in welcher die Verzweigungsschnitte S_1, S_2, S_3 von den Punkten e_1, e_2, e_3 aus zum vierten Verzweigungspunkte ∞ laufen. Zufolge der damaligen Entwicklungen gilt für die Perioden von u:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega_2 = \int\limits_{z=\infty}^{z=e_2} du, \quad -\tfrac{1}{2}\,\omega_1 = \int\limits_{z=\infty}^{z=e_1} du,$$

wo die Bahn des ersten Integrales das linke Ufer von S_2 im oberen Blatte, die Bahn des zweiten das rechte Ufer von S_1 im oberen Blatte in den durch die Integralgrenzen angegebenen Richtungen ist. Zwei entsprechende Gleichungen gelten für die Periodenhälften $\frac{1}{2}\eta_2, -\frac{1}{2}\eta_1$, wenn wir nur u durch ζ ersetzen.

Aus $\frac{1}{2}\omega_2$ und $\frac{1}{2}\omega_1$ gehen die entsprechenden Periodenhälften des in (10) S. 362 gegebenen Integrals zweiter Stufe w durch Multiplikation mit $\sqrt{e_2 - e_1}$ hervor. Man bezeichnet diese Periodenhälften von w mit K und iK':

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1} = K, \qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_1 \sqrt{e_2 - e_1} = iK'.$$

Um diese Größen direkt am Integral zweiter Stufe zu erklären, müssen wir die ursprüngliche Riemannsche Fläche mittels der Substitution (7) S. 361 transformieren. Die neue F_2, deren Variabele wir sogleich wieder z nennen, ist in Fig. 69 dargestellt. Die Verzweigungspunkte liegen jetzt bei $z = 0, 1, \infty, \lambda^{-1}$; in Klammern ist angedeutet, wie dieselben den Verzweigungspunkten der ursprünglichen Fläche zugeordnet sind. Die Verzweigungsschnitte S_1 und S_2 sind gerade gerichtet und verlaufen also längs der reellen z-Achse.

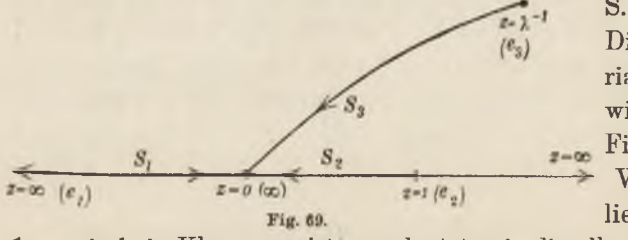


Fig. 69.

Aus der Erklärung der Periodenhälften durch die obengenannten bestimmten Integrale ergibt sich nun zunächst:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1} = K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\omega_1 \sqrt{e_2 - e_1} = -iK' = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

wo das erste Integral am linken Ufer von S_2 im oberen Blatte, das zweite am rechten Ufer von S_1 im gleichen Blatte zu führen ist. Die auf der F_2 eindeutige Funktion $\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}$ soll dadurch bestimmt werden, daß wir $\sqrt{4z}$ längs der Bahn des ersten Integrales reell und *positiv* wählen und für $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$ an der unteren Integralgrenze $z=0$ den Wert $+1$ vorschreiben. Dann ist im zweiten Integrale $\sqrt{4z}$ negativ imaginär und $\sqrt{(1-z)(1-\lambda z)}$ an dessen unterer Grenze wieder gleich $+1$.

Wir wollen nun das zweite Integral mittelst der dritten Substitution (15) S. 364 auf die entsprechende gleichberechtigte Gestalt überführen. Hierbei gilt jedenfalls:

$$\frac{dz'}{\sqrt{4z'(1-z')(1-\lambda' z')}} = \pm i \frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

und die Grenzen werden $z'=0$ und $z'=1$. Treffen wir demnach die Bestimmung, daß längs der neuen Integrationsbahn $\sqrt{4z'}$ wieder reell und positiv ist und $\sqrt{(1-z')(1-\lambda' z')}$ an der unteren Grenze $z'=0$ den Wert $+1$ hat, so ist mit Rücksicht darauf, daß das in der letzten Gleichung rechts stehende Differential dz längs der für K' geltenden Integrationsbahn reell und negativ ist, in jener Gleichung das obere Zeichen zu wählen, so daß:

$$\frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}} = -i \frac{dz'}{\sqrt{4z'(1-z')(1-\lambda' z')}}$$

zu gelten hat. Hieraus ergibt sich aber, wenn wir gleich wieder den Index bei der Integrationsvariabelen z' fortlassen:

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda' z)}},$$

eine Gleichung, die derjenigen für K genau entspricht.

Bei Übergang zu den Legendreschen Integralen mittelst der bekannten quadratischen Transformation führen wir statt λ wieder die Jacobische Bezeichnung k^2 ein. Zugleich schreiben wir:

$$\lambda' = 1 - \lambda = 1 - k^2 = k'^2$$

und haben damit die Größe:

(7) $$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

gewonnen, welche in der älteren Theorie als der „*komplementäre Integralmodul*“ bezeichnet wird. *Die beiden in* (6) *eingeführten Größen K und K′, d. h. die eine Periodenhälfte des Integrals zweiter Stufe w und die durch i geteilte zweite Periodenhälfte, können mittelst der Legendreschen Integrale erklärt werden durch:*

(8) $$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

mit der Bestimmung, daß die Wurzeln an der unteren Grenze $z = 0$ der geradlinigen Integrationsbahn übereinstimmend gleich $+1$ sein sollen. Schreiben wir nach Legendre:

$$z = \sin\varphi, \qquad \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \Delta(k, \varphi),$$

so können wir die Gleichungen (8) auch in die Gestalt kleiden:

(9) $$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(k',\varphi)}.$$

Dies aber sind die sogenannten „vollständigen Integrale“ Legendres.

Entsprechend gestalten sich die älteren Bezeichnungen betreffend die Perioden des Integrals zweiter Gattung. Das in (12) S. 363 gegebene Integral, am linken Ufer von S_2 im oberen Blatte der F_2 von $z = 0$ bis $z = 1$ erstreckt, liefert die der Größe K entsprechende mit E bezeichnete Halbperiode:

(10) $$E = \int_0^1 \frac{(1 - \lambda z)\,dz}{\sqrt{4z(1-z)(1-\lambda z)}}.$$

Die Gleichung (11) S. 363 ergibt sofort:

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1}}\left(\tfrac{1}{2}\eta_2 + \tfrac{1}{2}e_2\omega_2\right),$$

woraus wir mit Benutzung der ersten Gleichung (6) folgern:

(11) $$\eta_2 = 2\sqrt{e_2 - e_1}\,E - \frac{2e_2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}.$$

Die K' entsprechende Größe E' gewinnen wir, wenn wir das Integral (21) S. 366 unter Festhaltung der bisherigen Bestimmungen über $\sqrt{z'(1-z')(1-\lambda'z')}$ geradlinig von $z' = 0$ bis $z' = 1$ ausführen:

(12) $$E' = \int_0^1 \frac{(1 - \lambda' z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda' z)}}.$$

Die Integrationsbahn entspricht derjenigen von 0 bis ∞ am rechten Ufer des Schnittes S_1 im oberen Blatte der in Fig. 69, S. 370, dargestellten F_2, welche für ζ und u die Periodenhälften $-\frac{1}{2}\eta_1$ und $-\frac{1}{2}\omega_1$ liefert. Die genannte Gleichung (21) S. 366[1]) ergibt somit:

$$E' = \frac{1}{i\sqrt{e_2 - e_1}}\left(-\tfrac{1}{2}\eta_1 - \tfrac{1}{2}e_1\omega_1\right),$$

woraus weiter mit Benutzung der zweiten Gleichung (6):

$$(13)\qquad \eta_1 = -2i\sqrt{e_2 - e_1}\,E' - \frac{2ie_1 K'}{\sqrt{e_2 - e_1}}$$

gewonnen wird. *Die beiden Größen E und E' stellen sich mittelst der Legendreschen Integrale in der Gestalt:*

$$(14)\qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz, \qquad E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2z^2}{1-z^2}}\,dz$$

dar, wo die Integrale längs der reellen Achse von $z = 0$ bis $z = 1$ zu führen sind und die Wurzeln an der unteren Grenze übereinstimmend den Wert $+1$ haben sollen. Führen wir wieder die Bezeichnungen φ und Δ ein, so entstehen Legendres „vollständige Integrale" der zweiten Gattung:

$$(15)\qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(k, \varphi)\,d\varphi, \qquad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(k', \varphi)\,d\varphi.$$

Für das Normalintegral (12) S. 363 zweiter Gattung ist nur erst E eine Periodenhälfte, wogegen E' eine Periodenhälfte des in (21) S. 366 gegebenen Integrales Z' ist. Die auf die Gestalt:

$$Z = iZ' - iw' + \sqrt{\frac{z(1-\lambda z)}{1-z}}$$

umgerechnete Gleichung (20) S. 366 liefert jedoch als zweite Periodenhälfte für Z sofort $i(E' - K')$.

Die Folge dieses Umstandes ist, daß die „Legendresche Relation" (6) S. 160, auf K, K', E und E' umgerechnet eine etwas kompliziertere Gestalt annimmt. Berechnen wir aus (6):

$$\omega_1 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_2 - e_1}}, \qquad \omega_2 = \frac{2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}$$

und benutzen die Ausdrücke (11) und (13) von η_2 und η_1, so rechnet sich die Relation (6) S. 160 um auf:

$$(16)\qquad KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

1) Die daselbst benutzte, der dritten Substitution (15) S. 364 entsprechende Transformation $dw' = i \cdot dw$ hat zwischendurch ihre nähere Begründung gewonnen.

Dies ist aber in der Tat, in Jacobis Bezeichnungen geschrieben, die ursprünglich von Legendre angegebene Relation.[1])

Zweites Kapitel.

Die elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Nach den algebraischen Vorbereitungen des vorigen Kapitels sind wir nunmehr imstande, das von Klein[2]) aufgestellte „Prinzip der Stufenteilung" zu formulieren, welches uns gestatten wird, die Entwicklungen der älteren Theorie der elliptischen Funktionen in ihrem Verhältnis zur Weierstraßschen Theorie in einfachster Weise zu erfassen. Wir behandeln im vorliegenden Kapitel zunächst die Funktionen der zweiten Stufe als solche von u, ω_1, ω_2; weitere Ausführungen über die Modulfunktionen zweiter Stufe folgen im nächsten Kapitel.

§ 1. Das Prinzip der Stufenteilung und der Begriff der elliptischen Funktion n^{ter} Stufe.

Die S. 319 symbolisch durch $\Gamma^{(u,\omega)}$ bezeichnete Gruppe aller Substitutionen der drei Variabelen u, ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} u' &= u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \\ \omega_1' &= \qquad \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' &= \qquad \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{aligned}$$

unter m_1, m_2 beliebige ganze Zahlen und unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgendwelche vier ganze Zahlen der Determinante 1 verstanden, hatten wir S. 318 ff. dem Begriff der doppeltperiodischen oder elliptischen Funktionen erster Stufe zugrunde gelegt. Dieselben waren eindeutige homogene analytische Funktionen von u, ω_1, ω_2, welche gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(u,\omega)}$ entweder invariant oder doch in charakteristischer Weise kovariant waren.

Die Erweiterung dieses Funktionsbegriffes soll nun darauf beruhen, daß wir neben der Gesamtgruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$ auch gewisse gleich näher zu bezeichnende *Untergruppen der* $\Gamma^{(u,\omega)}$ zulassen und dann auch solche Funktionen in Betracht ziehen wollen, *welche zwar im übrigen den Charakter der Funktionen erster Stufe besitzen, jedoch erst gegenüber den Substitutionen jener Untergruppen die Eigenschaften der Invarianz bzw. Kovarianz besitzen.*

Die Untergruppen, um die es sich für uns handeln soll, sind aber folgendermaßen zu erklären: *Ist n irgendeine positive ganze Zahl, so*

1) S. den „Traité des fonctions elliptiques", Bd. 1 S. 62 ff.

2) S. die Nachweise S. 117.

bilden alle diejenigen Substitutionen von $\Gamma^{(u,\omega)}$, deren Koeffizienten die Kongruenzen[1] *befriedigen:*

(1) $m_1 \equiv 0, \quad m_2 \equiv 0, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$

eine Untergruppe der $\Gamma^{(u,\omega)}$, welche wir mit Klein als die „Hauptkongruenzgruppe der n^{ten} Stufe" bezeichnen. Man wird in der Tat leicht bestätigen, daß zwei die Kongruenzen (1) befriedigende Substitutionen, miteinander kombiniert, stets wieder eine den Bedingungen (1) genügende Substitution liefern. Die Bezeichnung „Hauptkongruenzgruppe" n^{ter} Stufe deutet an, daß neben ihr durch Kongruenzen modulo n noch andere Untergruppen erklärbar sind; wir werden dies im Falle $n = 2$ unten weiter auszuführen haben.

Die eben eingeführte Benennung kann man auch auf die Gruppe $\Gamma^{(u)}$ und die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ gesondert anwenden. Innerhalb der $\Gamma^{(u)}$ wird die „Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe" von allen Substitutionen:

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

gebildet, bei denen die ganzen Zahlen m_1, m_2 die beiden ersten Kongruenzen (1) befriedigen. Innerhalb der homogenen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ liefern alle Substitutionen:

$$\omega_1' = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad \omega_2' = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2,$$

deren ganzzahlige Koeffizienten die vier letzten Kongruenzen (1) erfüllen, die „Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe". Die so benannte Untergruppe der $\Gamma^{(u,\omega)}$ entsteht dann einfach, indem wir jede Substitution der einen der eben genannten zwei besonderen Hauptkongruenzgruppen mit jeder der anderen zu einer ternären Substitution kombinieren.

Einen Diskontinuitätsbereich der in der $\Gamma^{(u)}$ enthaltenen Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe können wir in einer ersten Gestalt sofort angeben, da diese Untergruppe aus allen Substitutionen:

$$u' = u + m_1' \cdot (n\omega_1) + m_2' \cdot (n\omega_2)$$

besteht, in denen jetzt m_1', m_2' wieder beliebige ganze Zahlen sind. *Ein Diskontinuitätsbereich der fraglichen Untergruppe wird also z. B. durch ein Parallelogramm der Ecken $u = 0$, $n\omega_2$, $n\omega_1 + n\omega_2$, $n\omega_1$ geliefert, welches, wie man sofort überblickt, aus n^2 Parallelogrammen des zur $\Gamma^{(u)}$ gehörenden Netzes zusammengesetzt werden kann.* Wir wollen die Anzahl n^2 dieser Parallelogramme als unteren Index dem Symbol Γ anhängen und also die Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der $\Gamma^{(u)}$ durch das Symbol $\Gamma_{n^2}^{(u)}$ bezeichnen. Die durch Kongruenzen modulo n innerhalb der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ erklärbaren Untergruppen sind

1) S. über den Begriff der Kongruenz S. 281.

in dem Werke „Modulfunktionen" Bd. 1, S. 387 ff. sehr ausführlich betrachtet. Der Diskontinuitätsbereich der Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe in der ω-Halbebene setzt sich aus einer a. a. O. S. 397 unter (7) angegebenen endlichen Anzahl von Doppeldreiecken des zur $\Gamma^{(\omega)}$ gehörenden Dreiecksnetzes (vgl. Fig. 61, S. 291) zusammen.

Erst mittelst dieser Diskontinuitätsbereiche kann man den Begriff der „elliptischen Funktionen der n^{ten} Stufe" genauer umgrenzen. *Eine „elliptische Funktion n^{ter} Stufe" soll eine eindeutige homogene Funktion $\psi(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$ ganzzahliger Dimension d der drei Argumente u, ω_1, ω_2 sein, die gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der $\Gamma^{(u,\omega)}$ invariant oder in gewisser Art kovariant ist; dieselbe soll bei stehenden Werten ω_1, ω_2 eine analytische Funktion von u sein, die im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma^{(u)}_{n^2}$ frei von wesentlich singulären Stellen ist und also die ganze u-Ebene abgesehen von der Stelle $u = \infty$ zum Felde hat; es soll ferner:*

$$\omega_2^{-d}\,\psi\left(u\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right) = \psi\left(\frac{u}{\omega_2}\,\middle|\,\omega, 1\right).$$

bei stehendem Werte von $\frac{u}{\omega_2}$ eine analytische Funktion von ω sein, die im Diskontinuitätsbereiche der Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ frei von wesentlich singulären Punkten ist und also die positive ω-Halbebene zum Felde hat. Einer näheren Erläuterung bedarf hierbei der Rand der positiven ω-Halbebene, d. h. die reelle ω-Achse, deren rationale Punkte der Halbebene zuzurechnen sind (vgl. S. 295). Der Diskontinuitätsbereich der Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe ragt an solche Punkte mit einer endlichen Anzahl von Spitzen heran (s. das Netz der Dreiecke in Fig. 61, S. 291). Hier müssen allgemein entsprechende Verhältnisse vorliegen, wie wir sie bei den Funktionen erster Stufe in der an den Punkt $\omega = \infty$ heranragenden Spitze des Diskontinuitätsbereiches der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ antrafen. Der an einen rationalen reellen Punkt ω heranragende Zipfel des Diskontinuitätsbereiches der Untergruppe wird durch eine geeignete Exponentialfunktion (vgl. die S. 299 ff. viel gebrauchte Funktion $q^2 = e^{2\pi i\omega}$) auf die schlichte Umgebung eines Punktes abgebildet; in diesem Punkte muß dann eben die elliptische Funktion n^{ter} Stufe, genau wie dies für $n = 1$ im Nullpunkte der q^2-Ebene der Fall war, ihren analytischen Charakter bewahren oder doch nur einen Pol aufweisen.

Während nun der allgemeine Fall der n^{ten} Stufe zu denjenigen Entwicklungen hinführen würde, welche in der älteren Theorie der elliptischen Funktionen bei der Multiplikation, Division und Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen sich ergeben haben, fin-

den wir für $n = 2$ nicht nur den Spezialfall der Multiplikation usw. zweiten Grades, sondern wir gelangen, indem wir den Fall der zweiten Stufe systematisch entwickeln, gerade genau zu der vornehmlich durch Jacobi in feste Formen gefügten älteren Theorie der elliptischen Funktionen.

Es soll dies in der Anordnung entwickelt werden, daß wir zunächst die Abhängigkeit der Funktionen von u bei stehenden ω_1, ω_2 betrachten, also die „doppeltperiodischen Funktionen zweiter Stufe" untersuchen. Hieran soll sich im nächsten Kapitel die Besprechung der „Modulfunktionen zweiter Stufe" anschließen.[1])

§ 2. Die Kongruenzgruppen zweiter Stufe in der $\Gamma^{(u)}$.

Die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_4^{(u)}$ ist nicht die einzige Untergruppe der $\Gamma^{(u)}$, welche wir durch Kongruenzen modulo 2 angeben können. Um die gesamten „Kongruenzgruppen zweiter Stufe" aufzustellen, bemerken wir, daß es im ganzen vier mod. 2 inkongruente Typen von Substitutionen der $\Gamma^{(u)}$ gibt, entsprechend den folgenden vier für die ganzzahligen Koeffizienten m_1, m_2 gültigen Kongruenzen:

(2) $$(m_1, m_2) \equiv (0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1) \quad (\text{mod. } 2).^{2)}$$

Nehmen wir die bereits S. 229 ff. benutzte Bezeichnung S für die Substitutionen der $\Gamma^{(u)}$ wieder auf, so können wir vier spezielle diesen Kongruenzen genügende Substitutionen in den Gestalten:

$$S_0(u) = u, \quad S_1(u) = u + \omega_1, \quad S_2(u) = u + \omega_2, \quad S_3(u) = u - \omega_1 - \omega_2$$

auswählen. Die $\Gamma_4^{(u)}$ besteht aus den gesamten die erste Kongruenz (2) erfüllenden Substitutionen. Kombinieren wir die Substitutionen der $\Gamma_4^{(u)}$ mit S_1, so erhalten wir das symbolisch durch $S_1 \cdot \Gamma_4^{(u)}$ zu bezeichnende System aller Substitutionen der $\Gamma^{(u)}$, welche die zweite Kongruenz (2) erfüllen. Entsprechend finden wir für die dritte und vierte Kongruenz (2) die symbolisch durch $S_2 \cdot \Gamma_4^{(u)}$, $S_3 \cdot \Gamma_4^{(u)}$ zu bezeichnenden Substitutionssysteme. Die Gesamtgruppe $\Gamma^{(u)}$ ergibt sich durch Zusammenfassung dieser einzelnen Systeme:

$$\Gamma^{(u)} = \Gamma_4^{(u)} + S_1 \cdot \Gamma_4^{(u)} + S_2 \cdot \Gamma_4^{(u)} + S_3 \cdot \Gamma_4^{(u)}.$$

Wir denken uns die Substitutionen der $\Gamma^{(u)}$ dieser Zerlegung entsprechend in 4 Zeilen angeordnet..

1) Betreffs der älteren Geschichte der Modulfunktionen verweisen wir auf das Referat II B 4 (Automorphe Funktionen und Modulfunktionen) in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Nr. 2.

2) Zur Abkürzung ist das Kongruenzenpaar:

$$m_1 \equiv i, \qquad m_2 \equiv k \qquad\qquad (\text{mod. } n)$$

in den Ausdruck $(m_1, m_2) \equiv (i, k)$ zusammengezogen.

Man zeigt nun leicht, daß, wenn man aus zwei „bestimmten" unter diesen vier Zeilen (die auch identisch sein dürfen) zwei „beliebige" Substitutionen herausgreift, durch deren Kombination eine Substitution einer „bestimmten" dritten Zeile entsteht. So geben zwei Substitutionen aus einer und derselben Zeile, kombiniert, stets eine Substitution der $\Gamma_4^{(u)}$, d. h. der ersten Zeile; ebenso liefern zwei Substitutionen, welche zwei verschiedenen unter den drei letzten Zeilen angehören, kombiniert, stets eine Substitution der dritten Zeile (d. h. derjenigen Zeile, welcher die beiden kombinierten Substitutionen nicht angehören).

Nun ist selbstverständlich, daß in einer durch Kongruenzen modulo 2 definierbaren Untergruppe der $\Gamma^{(u)}$ mit einer Substitution sogleich die ganze ihr angehörende Zeile enthalten ist. Eine Gruppe, welche zwei unter den drei letzten Zeilen enthält, umfaßt nach den eben gegebenen Darlegungen auch die dritte sowie natürlich die $\Gamma_4^{(u)}$; eine solche Gruppe ist also mit der Gesamtgruppe $\Gamma^{(u)}$ identisch. Es bleibt demnach nur die Möglichkeit, eine einzelne unter den drei Zeilen $S_1 \cdot \Gamma_4^{(u)}$, $S_2 \cdot \Gamma_4^{(u)}$, $S_3 \cdot \Gamma_4^{(u)}$ mit der $\Gamma_4^{(u)}$ zu je einer Untergruppe zu vereinigen. *So ergeben sich außer der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_4^{(u)}$ noch drei weitere „Kongruenzgruppen der zweiten Stufe":*

$$\Gamma_4^{(u)} + S_1 \cdot \Gamma_4^{(u)}, \quad \Gamma_4^{(u)} + S_2 \cdot \Gamma_4^{(u)}, \quad \Gamma_4^{(u)} + S_3 \cdot \Gamma_4^{(u)},$$

welche wir zufolge (2) *auch unmittelbar durch die Kongruenzen:*

(3) $$m_2 \equiv 0, \quad m_1 \equiv 0, \quad m_1 \equiv m_2 \pmod{2}$$

erklären können. Da wir alsbald erkennen werden, daß sich die Diskontinuitätsbereiche dieser Untergruppen je aus *zwei* Parallelogrammen des ursprünglichen Netzes der $\Gamma^{(u)}$ zusammensetzen lassen, so mögen die Untergruppen symbolisch durch $\Gamma_2^{(u)}$ bezeichnet werden und, wenn wir sie voneinander unterscheiden wollen, genauer durch $\Gamma_{2_1}^{(u)}$, $\Gamma_{2_2}^{(u)}$, $\Gamma_{2_3}^{(u)}$.

Je zwei Substitutionen S_i und S_k der $\Gamma^{(u)}$ sind miteinander vertauschbar, $S_i \cdot S_k = S_k \cdot S_i$, (vgl. S. 131). Wenn wir demnach auf Grund der allgemeinen Regeln von S. 128ff. eine einzelne unserer Untergruppen $\Gamma_2^{(u)}$ oder die $\Gamma_4^{(u)}$ vermittelst irgendeiner Substitution S der $\Gamma^{(u)}$ „transformieren", so erweist sich hierbei die transformierte Gruppe mit der ursprünglichen identisch:

$$S \cdot \Gamma_2^{(u)} \cdot S^{-1} = \Gamma_2^{(u)}, \qquad S \cdot \Gamma_4^{(u)} \cdot S^{-1} = \Gamma_4^{(u)}.$$

Man nennt dieserhalb jede der drei Kongruenzgruppen $\Gamma_2^{(u)}$ sowie die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_4^{(u)}$ „in der Gesamtgruppe $\Gamma^{(u)}$ ausgezeichnet".

Anders gestalten sich indessen die Verhältnisse innerhalb der ternären Gruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$, in welcher wir die $\Gamma^{(u)}$ als ternäre Untergruppe der Substitutionen:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \qquad \omega_1' = \omega_1, \qquad \omega_2' = \omega_2,$$

die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ aber als ternäre Untergruppe:

$$u' = u, \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

aufzufassen haben. Transformieren wir jetzt eine beliebige Substitution $S(u) = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ der $\Gamma^{(u)}$ vermittelst irgendeiner Substitution V der $\Gamma^{(\omega)}$, so ergibt sich als transformierte Substitution $S' = V \cdot S \cdot V^{-1}$ die folgende:

$$u' = u + (m_1\delta - m_2\gamma)\omega_1 + (-m_1\beta + m_2\alpha)\omega_2, \quad \omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2.$$

Die ganzzahligen Koeffizienten m_1', m_2' von S' berechnen sich also aus den m_1, m_2 in der Gestalt:

$$m_1' = m_1\delta - m_2\gamma, \qquad m_2' = -m_1\beta + m_2\alpha,$$

zwei Gleichungen, aus denen sich zufolge $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ umgekehrt:

$$m_1 = m_1'\alpha + m_2'\gamma, \qquad m_2 = m_1'\beta + m_2'\delta$$

ergibt.

Hieraus folgt zunächst, daß zwei gerade Zahlen m_1, m_2 immer auch wieder gerade m_1', m_2' liefern, sowie daß ein willkürlich gewähltes Paar gerader Zahlen m_1', m_2' immer auch durch ein gewisses eben solches Paar m_1, m_2 geliefert wird. Für die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_4^{(u)}$ gilt demnach bei Transformation durch irgendeine Substitution V:

$$V \cdot \Gamma_4^{(u)} \cdot V^{-1} = \Gamma_4^{(u)},$$

so daß die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_4^{(u)}$ auch innerhalb der ternären Gruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$ ausgezeichnet ist.

Demgegenüber werden die drei Gruppen $\Gamma_2^{(u)}$ durch die Substitutionen V ineinander transformiert. Die Art, wie dies bei der einzelnen Substitution V geschieht, richtet sich nach den Resten, welche die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei Division durch 2 ergeben. Da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, so muß eines der Produkte $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ gerade und eins zugleich ungerade sein. Ist also mindestens eine der Zahlen β, γ gerade (was drei Fälle liefert), so gilt $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, (mod. 2); ist mindestens eine der Zahlen α, δ gerade (was wieder drei Fälle ergibt), so gilt $\beta \equiv \gamma \equiv 1$, (mod. 2). Wir finden so, daß sich die Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ modulo 2 auf sechs inkongruente Typen reduzieren, welche wir symbolisch durch:

$$V_0 \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \; V_1 \equiv \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \; V_2 \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \; V_3 \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1. 0 \end{pmatrix}, \; V_4 \equiv \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}, \; V_5 \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnen können; im nächsten Kapitel kommen wir hierauf ausführlich zurück. Die Substitutionen V_0 des ersten Typus sind mod. 2 mit der identischen Substitution kongruent und bilden in ihrer Gesamtheit die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe in der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$. Alle diese Substitutionen transformieren jede der drei $\Gamma_2^{(u)}$ einzeln in

sich. Transformieren wir durch eine Substitution V_1 vom zweiten Typus, so gilt für die ganzzahligen Koeffizienten m_1', m_2' von S':

$$m_1' \equiv m_1, \qquad m_2' \equiv m_1 + m_2, \qquad (\text{mod. } 2).$$

Die drei Kongruenzen (3) ergeben somit:

$$m_1' \equiv m_2', \qquad m_1' \equiv 0, \qquad m_2' \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 2);$$

wir finden somit als transformierte Gruppen:

$$V_1 \cdot \Gamma_{2_1}^{(u)} \cdot V_1^{-1} = \Gamma_{2_3}^{(u)}, \qquad V_1 \cdot \Gamma_{2_2}^{(u)} \cdot V_1^{-1} = \Gamma_{2_2}^{(u)}, \qquad V_1 \cdot \Gamma_{2_3}^{(u)} \cdot V_1^{-1} = \Gamma_{2_1}^{(u)}.$$

In dieser Art findet man jedem der sechs inkongruenten Typen von Substitutionen V entsprechend als eindeutig zugehörig eine der sechs Permutationen der drei $\Gamma_2^{(u)}$; auch gelangen wir dabei zu allen sechs Permutationen, d. h. keine zwei modulo 2 inkongruente Substitutionen V liefern die gleiche Permutation. *Die drei Kongruenzgruppen $\Gamma_2^{(u)}$ werden durch die Substitutionen der $\Gamma^{(u,\omega)}$ stets nur wieder ineinander transformiert und erfahren dabei alle sechs Permutationen; man nennt sie deswegen innerhalb der $\Gamma^{(u,\omega)}$ „gleichberechtigt".*

Will man die Diskontinuitätsbereiche der in Rede stehenden Kongruenzgruppen in einer Art einführen, die der Gleichberechtigung der drei Gruppen $\Gamma_2^{(u)}$ entspricht, so knüpft man zweckmäßig für die Gesamtgruppe an das S. 167 eingeführte, der Relation:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

entsprechende Tripel reduzierter Perioden ω_1, ω_2, ω_3 an. Deutet man die letzteren in der u-Ebene durch drei „Vektoren", so bilden diese ein Dreieck (vgl. Fig. 70), an dem die Reduktionsbedingung dadurch zum Ausdruck kommt, daß dasselbe spitzwinklig oder im Grenzfalle rechtwinklig ist. Von hieraus gewannen wir durch fortgesetzte Ergänzung von Dreiecken zu Parallelogrammen das die ganze endliche u-Ebene überspannende Dreiecksnetz der Fig. 52. S. 247; und es entstand weiter das Sechsecknetz der $\Gamma^{(u)}$, indem wir in allen Dreiecken die Mittellote der Seiten (je bis zum Mittelpunkte des umschriebenen Kreises) zeichneten, wie Fig. 51, S. 242 darlegt.

Fig. 70.

Für die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_4^{(u)}$ haben wir jetzt einfach ein mit dem Dreieck der Fig. 70 ähnliches und ähnlich gelegenes Dreieck der doppelten Seitenlängen, d. h. ein Dreieck der drei „Vektoren" $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ zu zeichnen, welches aus vier Dreiecken des ursprünglichen Netzes aufgebaut werden kann (vgl. Fig. 71). *Die Wiederholung der beschriebenen Konstruktion im Anschluß an dieses größere Dreieck führt dann zum Sechsecknetze der $\Gamma_4^{(u)}$.* Weiter zerlegt nun aber jede der drei Mittellinien das große Dreieck in zwei Teildreiecke, von denen eines

spitzwinklig ist oder beide rechtwinklig ausfallen. *Das spitzwinklige Dreieck oder ein beliebiges unter den beiden rechtwinkligen führt, der beschriebenen Konstruktion zugrunde gelegt, zum Sechsecknetze der zugehörigen* $\Gamma_2^{(u)}$. Natürlich arten im Falle des rechtwinkligen Dreiecks die Sechsecke in bekannter Art zu Rechtecken aus (vgl. S. 239). Beispielsweise gelangen wir zu der durch die zweite Kongruenz (3) erklärten $\Gamma_2^{(u)}$, wenn wir die zur Seite $2\omega_2$ des großen Dreiecks gehörende Mittellinie bevorzugen. Die drei Seiten des Teildreiecks liefern dann die Vektoren $2\omega_1$, ω_2, $-2\omega_1-\omega_2$ bzw. $2\omega_1+\omega_2$, ω_2, $2\omega_3$, beide Male in Übereinstimmung mit der die zweite $\Gamma_2^{(u)}$ erklärenden Kongruenz (3).

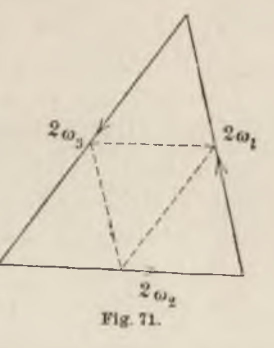


Fig. 71.

Die algebraischen Beziehungen zwischen der Gesamtgruppe $\Gamma^{(u)}$ und den Kongruenzgruppen zweiter Stufe begründet man am einfachsten in der Art, daß man an eine zweiblättrige Fläche F_2 mit vier endlichen Verzweigungspunkten $e^{(k)}$ und auf ihr an zwei Querschnitte Q_1, Q_2 anknüpft, die nicht an die Verzweigungsschnitte herangezogen sind; Fig. 72 möge die Verhältnisse veranschaulichen. Die Funktion u bildet die zerschnittene Fläche auf ein (im allgemeinen nicht geradliniges) Parallelogramm ab, dessen vier Ecken $u_0, u_1=u_0+\omega_2$, $u_2=u_0+\omega_1+\omega_2$, $u_3=u_0+\omega_1$ den vier Zipfeln der F_2 entsprechen, die im Schnittpunkte der Querschnitte Q_1, Q_2 zusammenstoßen.

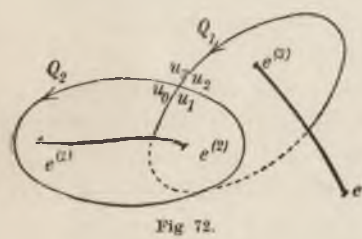


Fig. 72.

Lagern wir nun zwei solche Parallelogramme wie in Fig. 73 aneinander, so entsteht im vergrößerten Parallelogramm der Ecken u_0, $u_0+\omega_2$, $u_0+2\omega_1+\omega_2$, $u_0+2\omega_1$ ein Diskontinuitätsbereich einer der drei Gruppen $\Gamma_2^{(u)}$, wobei die Gegenseiten des Parallelogramms durch die Erzeugenden $u'=u+2\omega_1$, $u'=u+\omega_2$ aufeinander bezogen sind.[1])

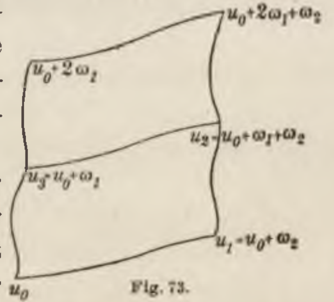


Fig. 73.

Das Abbild dieses Diskontinuitätsbereiches über der z-Ebene, bei dessen Herstellung wir einander zugeordnete Randpunkte zu verschmelzen haben, ist nun aber leicht auch unmittelbar von der F_2 der

1) Wenn wir hier unter ω_1, ω_2 irgendein Paar primitiver Perioden verstehen, ist die zum Diskontinuitätsbereiche der Fig. 73 gehörende Gruppe nicht notwendig die $\Gamma_{2_2}^{(u)}$, wohl aber eine unserer drei Gruppen $\Gamma_2^{(u)}$.

Fig. 72 aus zu gewinnen. *Wir haben die* F_2 *nur erst längs* Q_2, *aber nicht längs* Q_1, *zu durchschneiden, zwei so vorbereitete Exemplare der* F_2 *übereinander zu schichten und die Ufer der beiden Schnitte* Q_2 *über Kreuz aneinander zu heften.* Die entspringende F_4 mit acht Verzweigungspunkten hat nach der Regel (4) S. 88 selbstverständlich wieder das Geschlecht $p = 1$; ihre algebraischen Funktionen liefern uns, in Abhängigkeit von u betrachtet, die zur $\Gamma_2^{(u)}$ gehörenden elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Zufolge der voraufgehenden Entwicklungen können wir in der bezeichneten Art von der F_2 aus *zu drei verschiedenen „gleichberechtigten" Flächen* F_4 aufsteigen. Wollen wir von einer derselben, z. B. der eben beschriebenen F_4 zu der der Gruppe $\Gamma_4^{(u)}$ zugehörigen Riemannschen Fläche über der z-Ebene gelangen, so haben wir entsprechend zu verfahren. Auf der F_4 schließt sich Q_1 erst nach zweimaliger Durchlaufung (natürlich in verschiedenen Blättern der F_4). *Man schneide die* F_4 *längs dieser geschlossenen Kurve auf, lagere wieder zwei solche* F_4 *übereinander und hefte die Schnittufer über Kreuz aneinander.* So entsteht eine mit 16 Verzweigungspunkten ausgestattete F_8 des Geschlechtes $p = 1$, welche der „ausgezeichneten" Untergruppe $\Gamma_4^{(u)}$ entsprechend *einzig* ist.

Die weitere algebraische Behandlung dieser Fläche bietet keine Schwierigkeit und würde uns (bei einer unter den drei F_4) zu den Betrachtungen von S. 368 unmittelbar zurückführen. Indessen ist eine unmittelbare Betrachtung der elliptischen Funktionen zweiter Stufe, welche sich auf den Gebrauch der σ-Funktion aufbaut, vorzuziehen; wir werden dabei die algebraische Theorie leicht zwischendurch ergänzen können.

§ 3. Die Funktionen zweiter Stufe $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ und $\sigma_k(u)$.

Nach (13) S. 217 stellen sich die drei Werte e_1, e_2, e_3, falls $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ das S. 167 eingeführte Tripel der reduzierten Perioden bilden, in der Gestalt:

$$(1) \qquad e_k = \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right), \qquad (k=1,2,3)$$

dar. Verstehen wir unter $\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ ein beliebiges Paar primitiver Perioden, so ist umgekehrt $\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_2'$, $\omega_2 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'$, und wir finden z. B. für e_1 mit Rücksicht auf die Invarianz der $\wp$-Funktion gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ als Darstellung in den ω_1', ω_2':

$$e_1 = \wp\left(\frac{\delta\omega_1' - \beta\omega_2'}{2}\,\middle|\,\delta\omega_1' - \beta\omega_2', -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'\right) = \wp\left(\frac{\delta\omega_1' - \beta\omega_2'}{2}\,\middle|\,\omega_1', \omega_2'\right).$$

Nehmen wir an, daß β gerade und also δ ungerade ist, so folgt auf Grund der doppelten Periodizität der $\wp$-Funktion weiter:

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1'}{2}\middle|\,\omega_1', \omega_2'\right)$$

in Übereinstimmung mit (1). Überhaupt stellt man leicht fest, *daß die Gleichungen* (1) *in unveränderter Gestalt für die Darstellung der* e_k *gelten, sooft* ω_1, ω_2 *ein primitives Periodenpaar ist, welches aus dem reduzierten Paar durch eine modulo 2 mit der Identität kongruente Substitution der* $\Gamma^{(\omega)}$ *hervorgeht.* Die Periode ω_3 ist dabei aus den ω_1, ω_2 allemal durch die Relation:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

zu berechnen. Um den nachfolgenden Entwicklungen die hinreichende Allgemeinheit zu geben und andererseits doch die Gleichungen (1) als gültig voraussetzen zu können, denken wir ω_1, ω_2 als ein primitives Paar bezeichneter Art gewählt. Die zugehörigen Perioden des Integrales zweiter Gattung sollen wie bisher η_1, η_2 heißen; die mit η_3 zu bezeichnende Periode ist entsprechend der letzten Gleichung aus:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

zu bestimmen.

Jede der drei Differenzen $(\wp(u) - e_k)$ stellt eine zweiwertige Funktion erster Stufe der Dimension -2 in u, ω_1, ω_2 dar, welche einen Pol zweiter Ordnung im Punkte $u = 0$ und einen Nullpunkt der gleichen Ordnung im Punkte $\frac{1}{2}\omega_k$ besitzt, sowie natürlich in allen bezüglich $\Gamma^{(u)}$ äquivalenten Punkten dasselbe Verhalten zeigt. Stellen wir diese Funktion auf Grund der Regel (6) S. 214 durch die σ-Funktion dar, so ergibt sich bei der Art ihres Unendlichwerdens für $u = 0$:

$$\wp(u) - e_k = e^{\eta_k u}\left(\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_k}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)\sigma(u)}\right)^2. \tag{2}$$

Hieraus geht hervor, daß auch noch die Quadratwurzeln der drei Funktionen $(\wp(u) - e_k)$, welche wir durch:

$$\sqrt{\wp(u) - e_k} = -e^{\frac{1}{2}\eta_k u}\cdot\frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_k}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)\sigma(u)}$$

näher festlegen wollen, *eindeutige* Funktionen von u sind. Wir benutzen für dieselben die Bezeichnungen:

$$\psi_k(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\wp(u) - e_k} = \sqrt{\wp(u) - \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)}$$

und erkennen in ihnen *homogene Funktionen* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension der* u, ω_1, ω_2, die bei $u = 0$ übereinstimmend unendlich werden wie u^{-1}.

Um die Darstellung dieser drei Funktionen in der σ-Funktion übersichtlich zu gestalten, führen wir mit Weierstraß die drei Funktionen:

$$(3) \qquad \sigma_k(u \mid \omega_1, \omega_2) = -e^{\frac{1}{2}\eta_k u} \frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_k}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_k}{2}\right)}$$

ein, worauf sich unsere drei Funktionen ψ_k einfach in der Gestalt:

$$(4) \qquad \psi_k(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_k(u \mid \omega_1, \omega_2)}{\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)}$$

darstellen.

Daß die Quadrate der drei Funktionen ψ_k invariant sind gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe innerhalb der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$, folgt aus der am Anfang des Paragraphen durchgeführten Betrachtung. Im übrigen wollen wir das Verhalten unserer Funktionen gegenüber den Substitutionen der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ erst später ausführlicher untersuchen und betrachten dieselben einstweilen ausschließlich in ihrer Abhängigkeit von u.

Das Verhalten der Funktionen $\sigma_k(u)$ bei Vermehrung von u um Perioden ergibt sich aus den Formeln (7) und (8) S. 209 unter gelegentlicher Benutzung der Legendreschen Relation (6) S. 160. Wir ziehen die beiden Gleichungen (7) S. 209 und die für $m_1 = m_2 = -1$ gebildete Formel (8) S. 209 zusammen in:

$$(5) \qquad \sigma(u + \omega_k) = -e^{\eta_k\left(u + \frac{1}{2}\omega_k\right)} \sigma(u).$$

Auf Grund der Erklärung (3) der Funktionen $\sigma_k(u)$ folgt dann leicht als Verhalten derselben bei Vermehrung von u um Perioden:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma_k(u + \omega_k) = -e^{\eta_k\left(u + \frac{1}{2}\omega_k\right)} \sigma_k(u), \\ \sigma_k(u + \omega_l) = +e^{\eta_l\left(u + \frac{1}{2}\omega_l\right)} \sigma_k(u), \end{cases} \qquad (l \neq k)$$

Für die drei Funktionen $\psi_k(u)$ ergibt sich hieraus sofort weiter:

$$(7) \qquad \psi_k(u + \omega_k) = \psi_k(u), \qquad \psi_k(u + \omega_l) = -\psi_k(u), \qquad (l \neq k)$$

Das Produkt der drei Funktionen $\psi_k(u)$ ist somit gegenüber allen Substitutionen der $\Gamma^{(u)}$ invariant; dies ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß das mit dem Faktor -2 multiplizierte Produkt die $\wp'$-Funktion darstellt:

$$(8) \qquad -2\psi_1(u)\,\psi_2(u)\,\psi_3(u) = \wp'(u).$$

Aus (7) folgt als grundlegendes Resultat: *Die drei Funktionen* $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, $\psi_3(u)$ *gehören als elliptische Funktionen zweiter Stufe zu den drei durch die Kongruenzen:*

$$m_2 \equiv 0, \quad m_1 \equiv 0, \quad m_1 \equiv m_2, \quad (\text{mod. } 2)$$

erklärten Kongruenzgruppen zweiter Stufe, die wir jetzt in dieser Anordnung $\Gamma_{2_1}^{(u)}$, $\Gamma_{2_2}^{(u)}$, $\Gamma_{2_3}^{(u)}$, *nennen wollen; die einzelne Funktion* $\psi_k(u)$ *ist gegenüber den Substitutionen ihrer* $\Gamma_{2k}^{(u)}$ *invariant, ist homogen* $(-1)^{\text{ter}}$ *Dimension in den* u, ω_1, ω_2 *und besitzt im Diskontinuitätsbereiche der* $\Gamma_{2k}^{(u)}$ *zwei Pole und zwei Nullpunkte je von der ersten Ordnung.* So ist z. B. in Fig. 74 der Diskontinuitätsbereich der Gruppe $\Gamma_{2_1}^{(u)}$ skizziert, nämlich als Parallelogramm der Ecken $u = 0$, $2\omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$, ω_1. Die Pole der Funktion $\psi_1(u)$ sind durch (∞), die Nullpunkte durch (0) angedeutet; äquivalente Randpunkte, z. B. die vier Ecken, gehören natürlich zusammen und liefern den einen Pol, die beiden Randpunkte ω_2 und $\omega_1 + \omega_2$ den zweiten. Man veranschauliche sich entsprechend die Verhältnisse für $\psi_2(u)$ und $\psi_3(u)$, wobei man als Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{2_2}^{(u)}$ etwa das Parallelogramm der Ecken 0, $2\omega_2$, $\omega_1 + 3\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ benutzen wolle.

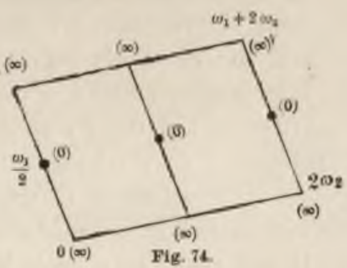


Fig. 74.

Sind die Indizes 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge durch k, l, m bezeichnet, so ist z. B. aus der Relation (8) einleuchtend, daß neben $\psi_k(u)$ auch die Funktion:

$$\varphi_k(u) = \psi_l(u)\,\psi_m(u) = -\frac{\wp'(u)}{2\,\psi_k(u)} \tag{9}$$

gegenüber den Substitutionen der Gruppe $\Gamma_{2k}^{(u)}$ invariant ist. Aus der Darstellung unserer Funktionen in der $\wp$-Funktion aber geht hervor, daß $\psi_k(u)$ und $\varphi_k(u)$ aneinander gebunden sind durch die Relation:

$$\varphi_k^2 = (\psi_k^2 - (e_l - e_k))\,(\psi_k^2 - (e_m - e_k)),$$

in der wir der Kürze wegen die Argumente u fortgelassen haben. *Für die Gruppe* $\Gamma_{2k}^{(u)}$ *haben wir hiernach die beiden Funktionen zweiter Stufe* $(-1)^{\text{ter}}$ *bzw.* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension* $\psi_k(u)$ *und* $\varphi_k(u)$ *zur Verfügung, von denen sich die zweite durch die erste vermittelst der Quadratwurzel:*

$$\varphi_k = \sqrt{(\psi_k^2 - (e_l - e_k))\,(\psi_k^2 - (e_m - e_k))} \tag{10}$$

darstellen läßt.

Die Untergruppe $\Gamma_4^{(u)}$ war der gemeinsame Bestandteil der drei Gruppen $\Gamma_{2k}^{(u)}$ Wir merken den Satz an: *Ein Funktionssystem der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe wird von den nebeneinander gestellten Funktionen* $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, $\psi_3(u)$, *geliefert; dieselben sind aneinander gebunden durch die Relation:*

$$\psi_1^2 + e_1 = \psi_2^2 + e_2 = \psi_3^2 + e_3. \tag{11}$$

Die Fortbildung der algebraischen Theorie auf Grundlage der gewonnenen Ergebnisse ist nun sehr leicht vollzogen. Auf der ursprüng-

lichen Riemannschen Fläche F_2 über der Ebene von $z = \wp(u)$ ist die etwa durch:

(12) $$z_k = \psi_k = \sqrt{z - e_k}$$

zu bezeichnende Funktion in der Umgebung jeder Stelle eindeutig; denn sie reproduziert sich nach einem auf der F_2 geschlossenen Umlauf um einen der Punkte e_k und ∞, und sie ist in der Umgebung jeder anderen Stelle z bereits in z eindeutig. Man sagt, die Funktion (12) sei auf der F_2 *unverzweigt*. Gleichwohl ist sie auf der F_2 *nicht eindeutig*, da sie zufolge (7) z. B. bei Durchlaufung des Periodenwegs, der die Periode ω_i liefert, Zeichenwechsel erfährt. Solche auf Flächen mehrfachen Zusammenhanges unverzweigte, aber nicht eindeutige Funktionen nennt man nach Weber[1]) „Wurzelfunktionen" der Fläche. *Auf der F_2 stellen also unsere drei Funktionen zweiter Stufe ψ_k drei Wurzelfunktionen $z_k = \sqrt{z - e_k}$ dar.*

Bildet man den Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{2k}^{(u)}$ mittelst der Funktion $z = \wp(u)$ über der z-Ebene ab, so ergibt sich eine vierblättrige Fläche $\mathsf{F}_4^{(k)}$ des Geschlechtes 1; es ist dies einfach diejenige Fläche, deren Herstellung durch doppelte Überlagerung der F_2 wir S. 382 besprachen. *Auf dieser Fläche $\mathsf{F}_4^{(k)}$ ist $z_k = \sqrt{z - e_k}$ nun wieder eine eindeutige, und zwar zweiwertige algebraische Funktion.* Bilden wir weiter diese $\mathsf{F}_4^{(k)}$ mittelst der zweiwertigen Funktion $z_k = \sqrt{z - e_k}$ oder auch den Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{2k}^{(u)}$ direkt durch die elliptische Funktion $z_k = \psi_k(u)$ ab, *so gewinnen wir wieder eine zweiblättrige Riemannsche Fläche $\mathsf{F}_2^{(k)}$ über der z_k-Ebene, nämlich diejenige der vier Verzweigungspunkte $\pm\sqrt{e_l - e_k}$, $\pm\sqrt{e_m - e_k}$.*

Zufolge der Lage der Verzweigungspunkte ist eine zweite algebraische Funktion der $\mathsf{F}_2^{(k)}$, welche wir unmittelbar zur Verfügung haben, der elliptischen Funktion $\varphi_k(u)$ entsprechend:

(13) $$\sqrt{(z_k^2 - (e_l - e_k))(z_k^2 - (e_m - e_k))}.$$

Nach den allgemeinen Sätzen über algebraische Funktionen ist jede algebraische Funktion der $\mathsf{F}_2^{(k)}$ rational in z_k und der Wurzel (13) darstellbar. Wir merken somit als Ergebnis in algebraischer Gestalt an: *Den drei Kongruenzgruppen zweiter Stufe $\Gamma_{2k}^{(u)}$ entsprechen drei koordinierte Riemannsche Flächen $\mathsf{F}_2^{(k)}$ des Geschlechtes $p = 1$, wobei der Körper der algebraischen Funktionen der einzelnen $\mathsf{F}_2^{(k)}$ in der Gestalt:*

(14) $$R\left(z_k, \sqrt{(z_k^2 - (e_l - e_k))(z_k^2 - (e_m - e_k))}\right)$$

durch die rationalen Funktionen von z_k und der Wurzel (13) *geliefert wird.*

1) S. dessen „Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlechte 3" (Berlin 1876), Abschnitt III.

Das Integral erster Gattung u nimmt, wie man leicht ausrechnet, auf der $\mathsf{F}_2^{(k)}$ die nachfolgende Gestalt an:

$$(15)\qquad u = -\int\limits_{\infty}^{z_k} \frac{dz_k}{\sqrt{(z_k^2 - (e_l - e_k))(z_k^2 - (e_m - e_k))}}.$$

Im übrigen ist selbstverständlich, *daß die algebraischen Funktionen* (14) *in Abhängigkeit von u betrachtet, den Körper der zur* $\Gamma_{2_k}^{(u)}$ *gehörenden elliptischen Funktionen zweiter Stufe liefern, so daß sich diese Funktionen gerade genau mit den gesamten rationalen Funktionen* $R(\psi_k(u), \varphi_k(u))$ *der* $\psi_k(u), \varphi_k(u)$ *decken.*

§ 4. Die Jacobischen Funktionen sn w, cn w, dn w.

Es ist nunmehr darzulegen, in welcher Weise sich die Jacobische Theorie der elliptischen Funktionen hier einordnet. Dabei haben wir, was die Herstellung der algebraischen Grundlage und den Aufbau der Integrale angeht, *eine der drei gleichberechtigten Gruppen* $\Gamma_2^{(u)}$, *nämlich die soeben mit* $\Gamma_{2_1}^{(u)}$ *bezeichnete Gruppe, zu bevorzugen.* Zweitens sind unsere bisherigen Funktionen mit einem solchen, allein von den Perioden ω_1, ω_2 abhängigen Faktor zu versehen, *daß die multiplizierten Funktionen homogen von der Dimension* 0 *in* u, ω_1, ω_2 *sind.* Der hinzuzusetzende Faktor ist $\sqrt{e_2 - e_1}$; derselbe ist in den ω_1, ω_2 von der Dimension -1, wie z. B. unmittelbar aus der Darstellung:

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \sqrt{\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}$$

hervorgeht. Für den algebraischen Standpunkt, der zunächst voranzutreten hat, halten wir an der schon S. 362 gegebenen Erklärung fest, daß das Vorzeichen von $\sqrt{e_2 - e_1}$ vorerst noch beliebig, aber ein für alle Mal fest zu wählen ist.

Statt $z_1 = \sqrt{z - e_1}$ (die zur $\Gamma_{2_1}^{(u)}$ gehörende Wurzelfunktion) führen wir jetzt den mit $\sqrt{e_2 - e_1}$ multiplizierten reziproken Wert von z_1, welcher in der Tat von der Dimension 0 in u, ω_1, ω_2 ist, als neue Variabele z' ein:

$$(1)\qquad z' = \sqrt{\frac{e_2 - e_1}{z - e_1}}.$$

Diese Variabele z' ist somit die Quadratwurzel der in der ersten Gleichung (7) S. 361 erklärten Variabelen z', hat also dieselbe Bedeutung wie die Variabele z' in den Legendreschen Integralen (2) S. 367 oder wie z in den Integralen (3) S. 367. Der daselbst vollzogene Übergang von den Integralen zweiter Stufe zu den Legendreschen Integralen kommt also darauf hinaus, daß wir eine mittelst $\sqrt{e_2 - e_1}$ zu einer Funk-

tion nullter Dimension der u, ω_1, ω_2 ausgestattete Wurzelfunktion der Gruppe $\Gamma_{2_1}^{(u)}$ als neue Variabele einführen und damit der algebraischen Betrachtung die Fläche $\mathsf{F}_2^{(1)}$ zugrunde legen.

An die Gleichung (1) reihen wir, der zweiten und dritten Gleichung (7) S. 361 entsprechend, noch die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad \sqrt{1-z'^2} = \sqrt{\frac{z-e_2}{z-e_1}}, \quad \sqrt{1-k^2z'^2} = \sqrt{\frac{z-e_3}{z-e_1}}$$

an, wobei für das Doppelverhältnis λ die Jacobische Bezeichnung k^2 eingesetzt ist. Hier haben wir zwei algebraische Funktionen der Flächen $\mathsf{F}_2^{(3)}$ und $\mathsf{F}_2^{(2)}$ vor uns, wie aus der Schreibweise:

$$(3) \qquad \sqrt{1-z'^2} = \frac{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}{2(z-e_1)\sqrt{z-e_3}}, \quad \sqrt{1-k^2z'^2} = \frac{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}{2(z-e_1)\sqrt{z-e_2}}$$

der Gleichungen (2) sofort ersichtlich ist.

Das Legendresche Integral erster Gattung $w = u\sqrt{e_2-e_1}$ ist in u, ω_1, ω_2 gleichfalls von nullter Dimension. Als bestimmtes Integral haben wir es in die Gestalt:

$$(4) \qquad w = \int_0^{z'} \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k^2z'^2)}}$$

zu setzen, da der unteren Grenze $z = \infty$ von u zufolge (1) die untere Grenze $z' = 0$ entspricht. An Stelle der ω_1, ω_2 treten für das Integral w (auf der ursprünglichen F_2 gedacht) zufolge (6) S. 370 die Perioden:

$$(5) \qquad \omega_1\sqrt{e_2-e_1} = 2iK', \quad \omega_2\sqrt{e_2-e_1} = 2K.$$

Es besteht nun folgender Hauptsatz: *Die drei in* (1) *und* (2) *gegebenen Größen* $z', \sqrt{1-z'^2}, \sqrt{1-k^2z'^2}$ *sind, wenn wir sie als elliptische Funktionen zweiter Stufe nullter Dimension in Abhängigkeit von* $w = u\sqrt{e_2-e_1}$ *statt von* u *auffassen, unmittelbar die drei Jacobischen Funktionen:*

$$(6) \quad z' = \sin\mathrm{am}\, w, \quad \sqrt{1-z'^2} = \cos\mathrm{am}\, w, \quad \sqrt{1-k^2z'^2} = \Delta\,\mathrm{am}\, w.$$

Diese Bezeichnungsweisen „Sinus amplitudinis w" usw. erinnern an die bei Legendre vorliegende Gestalt des Intgrales (vgl. (4) S. 369):

$$w = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

welche durch die Substitution $z' = \sin\varphi$ gewinnbar ist.[1]) Jacobi bezeichnet $\varphi = \mathrm{am}\, w$ als „Amplitude von w", worauf alsdann z' der Sinus

1) Bei anfänglichen Untersuchungen war k^2 reell, positiv und < 1, φ ein reeller Winkel.

dieser Amplitude wird. Gudermann[1]) hat an Stelle der Jacobischen Bezeichnungen (6) die kürzeren Symbole:

$$(7) \qquad z' = \operatorname{sn} w, \quad \sqrt{1 - z'^2} = \operatorname{cn} w, \quad \sqrt{1 - k^2 z'^2} = \operatorname{dn} w$$

eingeführt, welche wir weiterhin durchweg gebrauchen werden.

Die Beziehung der Jacobischen Funktionen zu unseren Funktionen zweiter Stufe $\psi_k(u)$ ergibt sich unmittelbar:

$$(8) \qquad \operatorname{sn} w = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\psi_1(u)}, \quad \operatorname{cn} w = \frac{\psi_2(u)}{\psi_1(u)}, \quad \operatorname{dn} w = \frac{\psi_3(u)}{\psi_1(u)}.$$

Wollen wir die Zugehörigkeit der Funktionen $\operatorname{cn} w$ und $\operatorname{dn} w$ zu den Gruppen $\Gamma_{2_2}^{(u)}$ und $\Gamma_{2_3}^{(u)}$ besser hervorkehren, so schreiben wir an Stelle der zweiten und dritten Gleichung (8):

$$(9) \qquad \operatorname{cn} w = -\frac{\wp'(u)}{2(\wp(u) - e_1)\psi_3(u)}, \quad \operatorname{dn} w = -\frac{\wp'(u)}{2(\wp(u) - e_1)\psi_2(u)}.$$

Die Verwandtschaft mit den Funktionen erster Stufe ist durch:

$$(10) \quad \operatorname{sn} w = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}, \quad \operatorname{cn} w = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}, \quad \operatorname{dn} w = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_3}}{\sqrt{\wp(u) - e_1}}$$

gegeben. Natürlich können wir die zweite und dritte Gleichung auch durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(11) \quad \operatorname{cn} w = -\frac{\wp'(u)}{2(\wp(u) - e_1)\sqrt{\wp(u) - e_3}}, \quad \operatorname{dn} w = -\frac{\wp'(u)}{2(\wp(u) - e_1)\sqrt{\wp(u) - e_2}}.$$

An sich sind die drei Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ in derselben Art gleichberechtigt wie die drei Gruppen $\Gamma_{2_k}^{(u)}$. Die Voranstellung der $\Gamma_{2_1}^{(u)}$ in der algebraischen Theorie würde freilich äußerlich einen Vorrang der Funktion $\operatorname{sn} w$ nach sich ziehen. Dieser kommt auch bei vielen älteren Darstellungen der Theorie der elliptischen Funktionen zur Geltung, *indem die Funktion* $z = \operatorname{sn} w$ *durch Inversion des elliptischen Integrals erster Gattung:*

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

gewonnen wird, während hierauf die Funktionen $\operatorname{cn} w$ *und* $\operatorname{dn} w$ *durch* $\operatorname{sn} w$ *in der Gestalt erklärt werden:*

$$\operatorname{cn} w = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 w}, \quad \operatorname{dn} w = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w}.$$

Die drei Funktionen zweiter Stufe $\psi_k(u)$ sind ungerade Funktionen von u, die bei $u = 0$ übereinstimmend unendlich werden wie u^{-1} (vgl. S. 383ff). Die Darstellung (8) der Jacobischen Funktionen in den $\psi_k(u)$

1) S. dessen „Theorie der Modularfunktionen und Modularintegrale“, Journ. f. Math., Bde. 18—25 (1838ff.).

lehrt also, *daß* $\operatorname{sn} w$ *eine ungerade Funktion ist,* $\operatorname{cn} w$ *und* $\operatorname{dn} w$ *aber gerade Funktionen sind, sowie daß für* $w = 0$ *bzw.* $\lim w = 0$:

$$(12) \qquad \lim_{w=0}\left(\frac{\operatorname{sn} w}{w}\right) = 1, \quad \operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 0 = 1$$

gilt.

Bei Vermehrung von w um $2K$ und um $2iK'$ (der Vermehrung von u um ω_2 und ω_1 entsprechend) leiten wir aus (7) S. 384 sofort folgendes Verhalten der Jacobischen Funktionen ab:

$$(13) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(w+2K) = -\operatorname{sn} w, & \operatorname{sn}(w+2iK') = +\operatorname{sn} w, \\ \operatorname{cn}(w+2K) = -\operatorname{cn} w, & \operatorname{cn}(w+2iK') = -\operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(w+2K) = +\operatorname{dn} w, & \operatorname{dn}(w+2iK') = -\operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Invariant sind unsere drei Funktionen erst gegenüber den erzeugenden Substitutionen ihrer drei Untergruppen zweiter Stufe, die wir in der hier zu benutzenden, auf w transformierten Gestalt $\Gamma_{2_1}^{(w)}$, $\Gamma_{2_0}^{(w)}$, $\Gamma_{2_2}^{(w)}$, nennen; in der Tat ergeben sich aus (13) sofort die Gleichungen:

$$(14) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(w+4K) = \operatorname{sn} w, & \operatorname{sn}(w+2iK') = \operatorname{sn} w, \\ \operatorname{cn}(w+4K) = \operatorname{cn} w, & \operatorname{cn}(w+2K+2iK') = \operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(w+2K) = \operatorname{dn} w, & \operatorname{dn}(w+4iK') = \operatorname{dn} w. \end{cases}$$

Im Diskontinuitätsbereiche der einzelnen $\Gamma_2^{(w)}$ ist die zugehörige Funktion *zweiwertig*. Da das Verhalten der Funktionen gegenüber den Erzeugenden der Gesamtgruppe $\Gamma^{(w)}$ bekannt ist (vgl. Gleichungen (13)), so ist es ausreichend, die genauere Werteverteilung unserer Funktionen in dem Parallelogramm der Ecken $w = 0,\ 2K,\ 2K+2iK',\ 2iK'$, d. h. im Diskontinuitätsbereiche der Gesamtgruppe $\Gamma^{(w)}$ zu kennen. Es ist wichtig, wenigstens in den vier Punkten $w = 0,\ K,\ K+iK',\ iK'$, von denen die drei letzten den Periodenhälften $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1}{2}$ des Integrals u entsprechen, die Werte der Funktionen sn, cn und dn zu kennen. Aus (10) und den bekannten Beziehungen des „Integralmoduls" $k = \sqrt{\lambda}$ und des „komplementären Moduls" $k' = \sqrt{1-\lambda}$ zu den e_1, e_2, e_3 ergibt sich bei Hinzunahme der Formeln (12) und der zwischen den sn, cn, dn bestehenden Relationen eine Werteverteilung unserer Funktionen in den fraglichen Punkten w, die wir tabellarisch zusammenstellen:

w	sn	cn	dn
0	0	1	1
K	± 1	0	$\pm k'$
$K+iK'$	$\pm \frac{1}{k}$	$\pm \frac{ik'}{k}$	0
iK'	∞	∞	∞

Daß hier einige Vorzeichen noch unentschieden gelassen sind, beruht auf dem Umstande, daß wir von seiten der algebraischen Theorie eine endgültige Festsetzung, mit welchem Vorzeichen die drei Quadratwurzeln $\sqrt{e_2 - e_1}$, $k = \sqrt{\lambda}$, $k' = \sqrt{1-\lambda}$ genommen werden sollen, nicht getroffen haben. Würden wir dies jetzt nachholen, was an sich keine Schwierigkeit bereiten würde, so wäre weiter die Frage, inwieweit von der Auswahl des primitiven Periodenpaares ω_1, ω_2 die Entscheidung über die unentschiedenen Vorzeichen in der Tabelle mit bedingt ist.[1])

Wir werden demnach hier einen anderen Weg gehen, *der uns zugleich zu der grundsätzlich wichtigen Auffassung der in Rede stehenden Größen $\sqrt{e_2 - e_1}$, k, k' als Funktionen der ω_1, ω_2 bzw. des Periodenquotienten ω hinführt.* Wir setzen fest, daß:

$$(15) \qquad \operatorname{sn} K = 1, \qquad \operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{dn} K = k'$$

sein soll. Dies bedeutet, daß $\sqrt{e_2 - e_1}$, k und k' in den *eindeutigen* Funktionen $\psi_1(u)$ und $\psi_3(u)$ die Darstellungen:

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \psi_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad k = \frac{\psi_1\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\psi_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}, \quad k' = \frac{\psi_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\psi_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}$$

besitzen sollen. Zufolge der Gleichungen (4) S. 384 können wir hierfür auch schreiben:

$$(16) \quad \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}, \quad k = \frac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}, \quad k' = \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}.$$

Mit Benutzung des Umstandes, daß $\sigma(u)$ ungerade ist, die $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ aber gerade Funktionen sind, folgt aus (3) S. 384 leicht:

$$\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \sigma_1\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}\omega_2\eta_1}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

$$\sigma_1\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = -e^{\frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_2)\eta_1}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

$$\sigma_3\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \sigma_3\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}\omega_2(\eta_1 + \eta_2)}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)},$$

1) Würden wir etwa für das „reduzierte“ Periodenpaar ω_1, ω_2, das einem Punkte ω im Doppeldreieck der Fig. 43, S. 179, entspricht, die Tabelle endgültig herstellen, so würde sie unverändert nur dann noch erhalten bleiben, wenn wir

so daß wir die drei fraglichen Größen in der ursprünglichen σ-Funktion so darstellen können:

$$(17)\quad \sqrt{e_2-e_1}=e^{-\frac{1}{4}\omega_2\eta_1}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)},\quad k=-e^{\frac{1}{4}\omega_1\eta_1+\frac{1}{2}\omega_2\eta_1}\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}\right)^2,$$

$$k'=e^{\frac{1}{2}\omega_2\eta_1+\frac{1}{4}\omega_2\eta_2}\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}\right)^2.$$

In (16) und (17) haben wir jetzt *eindeutige Darstellungen der Größen* $\sqrt{e_2-e_1}$, *k und k' als Funktionen von ω_1 und ω_2* vor uns.

Nach diesen Festsetzungen wird es sich noch darum handeln, das in der Gleichung:

$$(18)\qquad \operatorname{cn}(K+iK')=\pm\frac{ik'}{k}$$

rechter Hand geltende Vorzeichen zu erkennen. Nun gilt aber:

$$\operatorname{cn}(K+iK')=\frac{\psi_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\psi_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}=\frac{\sigma_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)},$$

und wir lesen ferner aus (3) S. 384 ab:

$$\sigma_2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=-e^{\frac{1}{4}(\omega_1+\omega_2)\eta_2}\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)},$$

so daß wir unter Benutzung des oben für $\sigma_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ angegebenen Ausdrucks in der ursprünglichen σ-Funktion für $\operatorname{cn}(K+iK')$ die Darstellung finden:

$$\operatorname{cn}(K+iK')=e^{\frac{1}{4}((\omega_1+\omega_2)\eta_2-(\omega_1+\omega_2)\eta_1)}\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}\right)^2.$$

Andrerseits folgt aus (17) sofort:

$$\frac{k}{k'}=-e^{\frac{1}{4}(\omega_2\eta_1-\omega_1\eta_2)}\left(\frac{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}\right)^2,$$

über die am Anfang des § 3, S. 383, getroffene Beschränkung hinaus nur noch solche primitive Periodenpaare ω_1, ω_2 zulassen, welche aus dem reduzierten Paare durch die modulo 4 mit der identischen Substitution kongruenten Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ hervorgehen; man vgl. hierzu die im nächsten Kapitel folgenden Betrachtungen über $\sqrt{e_2-e_1}$, k und k' als Modulfunktionen vierter Stufe.

so daß wir durch Multiplikation dieser und der voraufgehenden Gleichung und Benutzung der Legendreschen Relation (6) S. 160 erhalten:

$$\frac{k}{k'}\cdot \mathrm{cn}(K+iK') = -e^{\frac{1}{4}(\omega_1\eta_2-\omega_2\eta_1)} = -e^{\frac{\pi i}{2}} = -i.$$

In Gleichung (18) gilt somit das untere Zeichen, und die Tabelle der Werte $\mathrm{sn}\,0, \ldots, \mathrm{dn}(iK')$ nimmt endgültig die Gestalt an:

w	sn	cn	dn
0	0	1	1
K	1	0	k'
$K+iK'$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{ik'}{k}$	0
iK',	∞	∞	∞

Des besseren Überblicks halber haben wir auch noch in den Figuren 75 ff. die Diskontinuitätsbereiche der drei Gruppen $\Gamma_{2_1}^{(w)}$, $\Gamma_{2_2}^{(w)}$, $\Gamma_{2_3}^{(w)}$ ge-

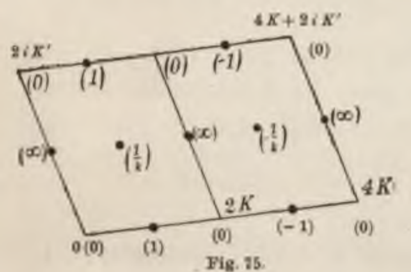


Fig. 75.

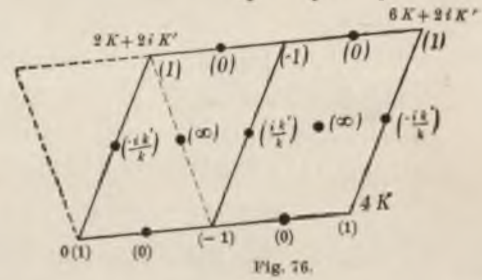


Fig. 76.

zeichnet und die Werte der drei zugehörigen Funktionen $\mathrm{sn}\,w$, $\mathrm{cn}\,w$ und $\mathrm{dn}\,w$, wie sie sich aus den eben tabellarisch zusammengestellten Ergebnissen mit Benutzung der Regeln (13) ergeben, jeweils in Klammern eingetragen. Längs je der beiden gegenüber liegenden Seiten des einzelnen Doppelparallelogramms finden natürlich allemal gleiche Funktionswerte statt.

Wie sich die drei Flächen $\mathsf{F}_2^{(1)}, \ldots$ aus diesen Diskontinuitätsbereichen herstellen lassen, möge am Beispiele der $\mathsf{F}_2^{(1)}$ gezeigt werden. Für die „ungerade" Funktion $\mathrm{sn}\,w$ gilt zufolge (13) die Regel:

$$\mathrm{sn}(2K-w) = \mathrm{sn}\,w.$$

Stellen w, die bezüglich des Punktes $w = K$ diametral liegen, tragen somit gleiche Werte sn. Ordnen

Fig. 77.

wir, wie dies in Fig. 78 geschehen ist, den Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_{2_1}^{(w)}$ symmetrisch um den Punkt K an, so erblicken wir etwa in der schraffierten

Hälfte des Parallelogramms ein vollständiges Abbild der Ebene von $z = \operatorname{sn} w$. Es wiederholen sich hier wieder ähnliche Betrachtungen, wie sie S. 247 ausgeführt sind. Das schraffierte Dreieck können wir als Diskontinuitätsbereich derjenigen Gruppe wählen, die aus der $\Gamma_{2_1}^{(w)}$ durch Zusatz von $w' = 2K - w$ entsteht; die Erzeugenden dieser erweiterten Gruppe weisen die beiden Hälften je der einzelnen Seite des schraffierten Dreiecks der Fig. 78 einander zu.[1]) Die Seitenmitten und Ecken des Dreiecks ergeben die Verzweigungspunkte der $\mathsf{F}_2^{(1)}$, deren zweites Blatt dem freien Dreiecke der Fig. 78 entspricht. Was die beiden anderen Funktionen angeht, so wird man entsprechende Betrachtungen an die beiden Gleichungen:

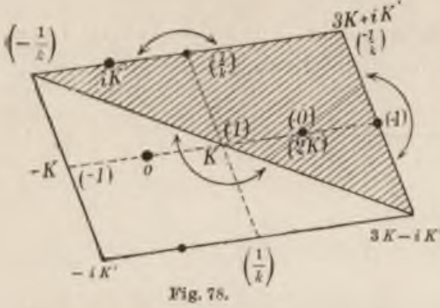


Fig. 78.

$$\operatorname{cn}(2K + 2iK' - w) = \operatorname{cn} w, \quad \operatorname{dn}(2K - w) = \operatorname{dn} w$$

anknüpfen.

Für die Darstellung sonstiger zu den Gruppen $\Gamma_{2_\mu}^{(w)}$ gehörender elliptischer Funktionen zweiter Stufe sind die vorstehenden Betrachtungen zugleich grundlegend. Aus früheren Formeln, z. B. den Gleichungen (10) und (11), ergibt sich leicht:

$$(19) \qquad \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w = -\tfrac{1}{2}\sqrt{e_2 - e_1} \cdot \frac{\wp'(u)}{(\wp(u) - e_1)^2};$$

demnach ist das links stehende Produkt eine zur Gesamtgruppe $\Gamma^{(w)}$ gehörende Funktion. Daraus folgt weiter, daß zur $\Gamma_{2_1}^{(w)}$ neben $\operatorname{sn} w$ auch noch die Funktion $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$ gehört und entsprechend $\operatorname{dn} w \cdot \operatorname{sn} w$ zur $\Gamma_{2_3}^{(w)}$ sowie endlich $\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w$ zur $\Gamma_{2_2}^{(w)}$. Für den algebraischen Standpunkt ist also:

$$\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

diejenige algebraische Funktion von $z = \operatorname{sn} w$, die von sich aus zur Fläche $\mathsf{F}_2^{(1)}$ hinführt. Gegenüber der Substitution $w' = 2K - w$, welche den Austausch der beiden Blätter der $\mathsf{F}_2^{(1)}$ bedeutet, muß $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$ Zeichenwechsel erfahren, was man auch direkt für die „geraden" Funktionen $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ aus den Regeln (13) entnimmt. Auf Grund bekannter Sätze notieren wir (wieder unter Bevorzugung der $\Gamma_{2_1}^{(w)}$) als aus den bisherigen Ergebnissen leicht folgend den Satz: *Jede zur $\Gamma_{2_1}^{(w)}$ gehörende elliptische Funktion zweiter Stufe ist rational durch* $\operatorname{sn} w$ *und* $\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$ *darstellbar:*

$$R(\operatorname{sn} w,\ \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w);$$

1) Dies soll durch die drei Pfeile der Fig. 78 angedeutet sein.

sie ist aber insbesondere bereits in einer der Gestalten:

$$R(\operatorname{sn} w), \qquad \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w \cdot R(\operatorname{sn} w)$$

darstellbar, falls sie gegenüber der Substitution $w' = 2K - w$ unverändert bleibt bzw. Zeichenwechsel erfährt. Entsprechende Sätze für die Gruppen $\Gamma_{2_3}^{(w)}$ und $\Gamma_{2_2}^{(w)}$ wird man leicht aufstellen.

Um eine erste Anwendung dieser Regeln zu vollziehen, wollen wir das Verhalten der Funktionen sn, cn, dn bei Vermehrung des Argumentes w um die Beträge $K, iK', K + iK'$ feststellen. Die zu diesem Zwecke auszuführenden Überlegungen beschreiben wir wieder bei einem zur $\Gamma_{2_1}^{(w)}$ gehörenden Beispiele. Die Funktion $\operatorname{sn}(w + K)$ erleidet gegenüber der Substitution $w' = 2K - w$ zufolge:

$$\operatorname{sn}(w' + K) = \operatorname{sn}(3K - w) = \operatorname{sn}(-K - w) = -\operatorname{sn}(w + K)$$

Zeichenwechsel und gehört übrigens zur $\Gamma_{2_1}^{(w)}$. Es gilt also:

$$\operatorname{sn}(w + K) = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w \cdot R(\operatorname{sn} w);$$

wir können statt dessen auch schreiben:

$$\frac{\operatorname{sn}(w + K) \cdot \operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w} = R_1(\operatorname{sn} w),$$

wenn zur Abkürzung $\operatorname{dn}^2 \cdot R(\operatorname{sn}) = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2) R(\operatorname{sn}) = R_1(\operatorname{sn})$ gesetzt wird. Nun heben sich aber im schraffierten Bereiche der Fig. 78 die bei iK' und $(2K + iK')$ gelegenen Pole des Faktors $\operatorname{dn} w$ im Zähler und des Nenners $\operatorname{cn} w$ gerade auf, der Pol $(K + iK')$ von $\operatorname{sn}(w + K)$ wird durch den daselbst gelegenen Nullpunkt von $\operatorname{dn} w$ aufgehoben und endlich ebenso der Nullpunkt $w = K$ des Nenners $\operatorname{cn} w$ durch den ebendort gelegenen Nullpunkt des im Zähler stehenden Faktors $\operatorname{sn}(w + K)$. Demnach ist $R_1(\operatorname{sn} w)$ polfrei und also von w unabhängig; da endlich $R_1(\operatorname{sn} 0) = 1$ ist, so gilt:

$$\operatorname{sn}(w + K) = \frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}.$$

Genau so leicht können wir jeden anderen der neun Fälle behandeln. Wir gelangen betreffs des Verhaltens unserer drei Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ bei Vermehrung des Argumentes um K, iK', $K + iK'$ zu Ergebnissen, die wir hier gleich wieder tabellarisch zusammenstellen:

w'	$\operatorname{sn} w'$	$\operatorname{cn} w'$	$\operatorname{dn} w'$
$w + K$	$\frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w}$	$-\frac{k' \operatorname{sn} w}{\operatorname{dn} w}$	$\frac{k'}{\operatorname{dn} w}$
$w + iK'$	$\frac{1}{k \operatorname{sn} w}$	$-\frac{i \operatorname{dn} w}{k \operatorname{sn} w}$	$-\frac{i \operatorname{cn} w}{\operatorname{sn} w}$
$w + K + iK'$	$\frac{\operatorname{dn} w}{k \operatorname{cn} w}$	$-\frac{ik'}{k \operatorname{cn} w}$	$\frac{ik' \operatorname{sn} w}{\operatorname{cn} w}$.

Bei der Durchführung dieser Untersuchung leisten die Figuren 75 ff. mit den eingetragenen Werten der Funktionen sn, ... gute Dienste.

§. 5. Die Ableitungen der Funktionen sn *w*, cn *w*, dn *w* und Potenzreihen derselben.

Auf Grund der funktionentheoretischen Sätze des vorigen Paragraphen können wir leicht über die Ableitungen der Funktionen sn *w*, cn *w*, dn *w* eine Reihe von Theoremen aufstellen. Aus den Formeln von S. 388 ff. ergibt sich zunächst auch ohne Inanspruchnahme eines funktionentheoretischen Schlusses unmittelbar:

$$(1) \qquad \frac{d\,\mathrm{sn}\,w}{dw} = \mathrm{cn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w.$$

Mit Rücksicht auf die beiden Relationen:

$$\mathrm{sn}^2 w + \mathrm{cn}^2 w = 1, \qquad k^2 \mathrm{sn}^2 w + \mathrm{dn}^2 w = 1$$

folgern wir hieraus weiter die beiden neben (1) tretenden Formeln:

$$(2) \qquad \frac{d\,\mathrm{cn}\,w}{dw} = -\,\mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{dn}\,w, \qquad \frac{d\,\mathrm{dn}\,w}{dw} = -\,k^2 \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{cn}\,w.$$

Nun ist aber überhaupt jede Ableitung beliebiger Ordnung einer unserer drei Funktionen wieder eine elliptische Funktion der gleichen Gruppe $\Gamma_2^{(w)}$. Betrachten wir als Beispiel wieder die Funktion sn *w*, so erkennen wir in deren Ableitung beliebiger *gerader* Ordnung 2ν:

$$\frac{d^{2\nu}\,\mathrm{sn}\,w}{dw^{2\nu}}$$

eine Funktion der $\Gamma_{2_1}^{(w)}$, welche auch noch gegenüber der Substitution $w' = 2K - w$ invariant ist und also bereits in sn *w* selbst rational ist. Da sie ferner nur mit sn *w* selbst unendlich werden kann und im Pole erster Ordnung von sn *w* einen Pol $(2\nu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat, so haben wir mit einer ganzen rationalen Funktion $(2\nu + 1)^{\text{ten}}$ Grades von sn *w* zu tun. Endlich ist die fragliche Ableitung eine ungerade Funktion von *w*, und also treten in ihrem Ausdruck in sn *w* nur ungerade Potenzen der selbst ungeraden Funktion sn *w* auf. Wir haben somit (unter Fortlassung der Argumente *w* bei sn *w*) folgenden Ansatz:

$$(3) \qquad \frac{d^{2\nu}\,\mathrm{sn}}{dw^{2\nu}} = \mathrm{sn}\left(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\mathrm{sn}^2 + a_2^{(\nu)}\mathrm{sn}^4 + \cdots + a_\nu^{(\nu)}\mathrm{sn}^{2\nu}\right),$$

wo die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ von *w* unabhängig sind.

Differenzieren wir nochmals nach *w*, so folgt mit Benutzung von (1) weiter:

$$(4) \quad \frac{d^{2\nu+1}\,\mathrm{sn}}{dw^{2\nu+1}} = \mathrm{cn}\cdot\mathrm{dn}\left(a_0^{(\nu)} + 3a_1^{(\nu)}\mathrm{sn}^2 + 5a_2^{(\nu)}\mathrm{sn}^4 + \cdots + (2\nu+1)a_\nu^{(\nu)}\mathrm{sn}^{2\nu}\right),$$

wo auch bei cn und dn das Argument w hinzuzudenken ist. Der Gestalt nach hätten wir diesen Ansatz auch durch eine direkte funktionentheoretische Überlegung gewinnen können.

Die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ sind leicht durch eine Rekursionsformel berechenbar. Differenziert man nämlich die Gleichung (4) nochmals nach w und benutzt die Relationen (2) sowie die zwischen sn, cn, dn bestehenden Beziehungen, so muß man zu einem Ergebnis der Gestalt:

$$\frac{d^{2\nu+2}\,\mathrm{sn}}{dw^{2\nu+2}} = \mathrm{sn}\,(a_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu+1)}\mathrm{sn}^2 + \cdots + a_{\nu+1}^{(\nu+1)}\mathrm{sn}^{2\nu+2})$$

gelangen können. Die Rechnung zeigt, daß sich $a_\mu^{(\nu+1)}$ in den Koeffizienten der rechten Seite von (3) so ausdrückt:

$$(5)\qquad a_\mu^{(\nu+1)} = (2\mu-1)2\mu k^2 a_{\mu-1}^{(\nu)} - (2\mu+1)^2(1+k^2)a_\mu^{(\nu)} + (2\mu+2)(2\mu+3)a_{\mu+1}^{(\nu)},$$

wobei nur hinzuzusetzen ist, daß für die beiden höchsten Indizes $\mu=\nu$ und $\mu=\nu+1$ die $a_{\nu+1}^{(\nu)}$, $a_{\nu+2}^{(\nu)}$ gleich 0 zu setzen sind. Da $a_0^{(0)}=1$ ist, so findet man mittelst dieser Rekursionsformel:

$$a_0^{(1)} = -1-k^2,\qquad a_1^{(1)} = 2k^2,$$
$$a_0^{(2)} = 1+14k^2+k^4,\qquad a_1^{(2)} = -20k^2-20k^4,\qquad a_2^{(2)} = 24k^4,$$
$$a_0^{(3)} = -1-135k^2-135k^4-k^6,$$
$$a_1^{(3)} = 182k^2+868k^4+182k^6,$$
$$a_2^{(3)} = -840k^4-840k^6,$$
$$a_3^{(3)} = 720k^6$$
$$a_0^{(4)} = 1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8,$$
. . . .

Mit Rücksicht auf die Gestalt der Rekursionsformel (5) folgern wir leicht allgemein: *Die Ableitungen der Funktion* sn w *sind in den Gestalten* (3) *und* (4) *mittelst ganzer rationaler Funktionen von* sn^2 *darstellbar, wobei die Koeffizienten* $a_\mu^{(\nu)}$ *ganze ganzzahlige Funktionen* ν^{ten} *Grades von* k^2 *sind.*

Bei der Funktion cn w ist jede Ableitung gerader Ordnung invariant gegenüber der Substitution $w' = 2K + 2iK' - w$ und also rational in cn w allein. Wie oben schließen wir, daß die Ableitung der $2\nu^{\text{ten}}$ Ordnung eine ganze Funktion $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Grades von cn w ist, und da dieselbe bei der Substitution $w' = w + 2K$ Zeichenwechsel erfährt, so setzt sich diese ganze Funktion nur aus ungeraden Potenzen von cn w zusammen. Wir gelangen zum Ansatz:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{2\nu}\,\mathrm{cn}}{dw^{2\nu}} = \mathrm{cn}(b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)}\mathrm{cn}^2 + b_2^{(\nu)}\mathrm{cn}^4 + \cdots + b_\nu^{(\nu)}\mathrm{cn}^{2\nu}), \\ \dfrac{d^{2\nu+1}\,\mathrm{cn}}{dw^{2\nu+1}} = -\mathrm{sn}\cdot\mathrm{dn}\,(b_0^{(\nu)} + 3b_1^{(\nu)}\mathrm{cn}^2 + 5b_2^{(\nu)}\mathrm{cn}^4 + \cdots + (2\nu+1)b_\nu^{(\nu)}\mathrm{cn}^{2\nu}). \end{cases}$$

Als Rekursionsformel für die Bestimmung der Koeffizienten erhält man wie oben:

$$(7)\qquad b_\mu^{(\nu+1)} = -(2\mu-1)2\mu k^2 b_{\mu-1}^{(\nu)} + (2\mu+1)^2(2k^2-1)b_\mu^{(\nu)} + (2\mu+2)(2\mu+3)(1-k^2)b_{\mu+1}^{(\nu)}.$$

Für die niedersten Indizes ν ergibt sich:

$$b_0^{(1)} = -1+2k^2,\quad b_1^{(1)} = -2k^2,$$
$$b_0^{(2)} = 1-16k^2+16k^4,\quad b_1^{(2)} = 20k^2-40k^4,\quad b_2^{(2)} = 24k^4,$$
$$b_0^{(3)} = -1+138k^2-408k^4+272k^6,$$
$$b_1^{(3)} = -182k^2+1232k^4-1232k^6,$$
$$b_2^{(3)} = -840k^4+1680k^6,$$
$$b_3^{(3)} = -720k^6.$$

Endlich gilt für die Ableitungen der Funktion $dn w$ der Ansatz:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{2\nu}\,\mathrm{dn}}{dw^{2\nu}} = \mathrm{dn}(c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)}\mathrm{dn}^2 + c_2^{(\nu)}\mathrm{dn}^4 + \cdots + c_\nu^{(\nu)}\mathrm{dn}^{2\nu}), \\ \dfrac{d^{2\nu+1}\,\mathrm{dn}}{dw^{2\nu+1}} = -k^2\mathrm{sn}\cdot\mathrm{cn}(c_0^{(\nu)} + 3c_1^{(\nu)}\mathrm{dn}^2 + 5c_2^{(\nu)}\mathrm{dn}^4 + \cdots + (2\nu+1)c_\nu^{(\nu)}\mathrm{dn}^{2\nu}) \end{cases}$$

mit der Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$:

$$(9)\qquad c_\mu^{(\nu+1)} = -(2\mu-1)\,2\mu c_{\mu-1}^{(\nu)} + (2\mu+1)^2\,(2-k^2)\,c_\mu^{(\nu)} - (2\mu+2)\,(2\mu+3)\,(1-k^2)\,c_{\mu+1}^{(\nu)}.$$

Hier wie in Gleichung (7) ist rechter Hand $c_\mu^{(\nu)} = 0$ zu setzen, so oft $\mu > \nu$ zutrifft. Wir geben wieder für die niedersten Indizes die Werte $c_\mu^{(\nu)}$ explizite an:

$$c_0^{(1)} = 2-k^2,\quad c_1^{(1)} = -2,$$
$$c_0^{(2)} = 16-16k^2+k^4,\quad c_1^{(2)} = -40+20k^2,\quad c_2^{(2)} = 24.$$
$$c_0^{(3)} = 272-408k^2+138k^4-k^6,$$
$$c_1^{(3)} = -1232+1232k^2-182k^4,$$
$$c_2^{(3)} = 1680-840k^2,$$
$$c_3^{(3)} = -720.$$

Mit Rücksicht auf die Bauart der Rekursionsformeln (7) und (9) können wir den Satz aussprechen: *Für die Ableitungen der Funktionen* cn$w$ *und* dn$w$ *gelten die Darstellungen* (6) *und* (8), *in denen die Koeffizienten* $b_\mu^{(\nu)}$ *und* $c_\mu^{(\nu)}$ *ganze ganzzahlige Funktionen* ν^{ten} *Grades von* k^2 *sind.*

Als ein unmittelbares Ergebnis dieser Rechnungen gewinnen wir die *Potenzreihen der Funktionen* sn$w$, cn$w$ *und* dn$w$ *für die Umgebung des Punktes* $w = 0$, *deren gemeinsamer Konvergenzkreis bis an den nächsten Pol, d. h. bis an den am Nullpunkte* $w = 0$ *nächst gelegenen, mit* iK'

bezüglich der Gesamtgruppe $\Gamma^{(w)}$ äquivalenten Punkt heranreicht. Wir haben anzusetzen:

$$(10)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} w = w + a_1 \dfrac{w^3}{3!} + a_2 \dfrac{w^5}{5!} + a_3 \dfrac{w^7}{7!} + \cdots, \\ \operatorname{cn} w = 1 + b_1 \dfrac{w^2}{2!} + b_2 \dfrac{w^4}{4!} + b_3 \dfrac{w^6}{6!} + \cdots, \\ \operatorname{dn} w = 1 + c_1 \dfrac{w^2}{2!} + c_2 \dfrac{w^4}{4!} + c_3 \dfrac{w^6}{6!} + \cdots, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten die folgenden Werte der Ableitungen für $w = 0$ sind:

$$a_\nu = \left(\frac{d^{2\nu+1} sn w}{d w^{2\nu+1}}\right)_{w=0}, \quad b_\nu = \left(\frac{d^{2\nu} cn w}{d w^{2\nu}}\right)_{w=0}, \quad c_\nu = \left(\frac{d^{2\nu} dn w}{d w^{2\nu}}\right)_{w=0}.$$

Setzt man aber in (4) und in den ersten Gleichungen (6) und (8) den Wert $w = 0$ ein, so folgt:

$$a_\nu = a_0^{(\nu)}, \quad b_\nu = b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} + \cdots + b_\nu^{(\nu)}, \quad c_\nu = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} + \cdots + c_\nu^{(\nu)},$$

Es folgt: *In den für* sn w, cn w *und* dn w *angegebenen Potenzreihen* (10) *sind die Koeffizienten a_ν, b_ν, c_ν ganze ganzzahlige Funktionen ν^{ten} Grades von k^2.* Für die niedersten Indizes gilt explizite:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 - k^2, \\ a_2 &= 1 + 14k^2 + k^4, \\ a_3 &= -1 - 135k^2 - 135k^4 - k^6, \\ a_4 &= 1 + 1228k^2 + 5478k^4 + 1228k^6 + k^8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_1 &= -1, \\ b_2 &= 1 + 4k^2, \\ b_3 &= -1 - 44k^2 - 16k^4, \\ b_4 &= 1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1 &= -k^2 \\ c_2 &= 4k^2 + k^4 \\ c_3 &= -16k^2 - 44k^4 - k^6, \\ c_4 &= 64k^2 + 912k^4 + 408k^6 + k^8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

Man kann übrigens auch unmittelbar durch Eintragung der Ansätze (10) in die Differentialgleichungen (1) und (2) zu Rekursionsformeln für die Koeffizienten a_ν, b_ν, c_ν gelangen. Diese Formeln haben, wenn wir den Gleichungen (10) entsprechend $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ setzen, die Gestalten:

$$a_\nu = b_\nu c_0 + \binom{2\nu}{2} b_{\nu-1} c_1 + \binom{2\nu}{4} b_{\nu-2} c_2 + \cdots + \binom{2\nu}{2\nu-2} b_1 c_{\nu-1} + b_0 c_\nu,$$

$$-b_\nu = a_{\nu-1} c_0 + \binom{2\nu-1}{2} a_{\nu-2} c_1 + \binom{2\nu-1}{4} a_{\nu-3} c_2 + \cdots + \binom{2\nu-1}{2\nu-4} a_1 c_{\nu-2} + (2\nu-1) a_0 c_{\nu-1},$$

$$-\frac{1}{k^2} c_\nu = a_{\nu-1} b_0 + \binom{2\nu-1}{2} a_{\nu-2} b_1 + \binom{2\nu-1}{4} a_{\nu-3} b_2 + \cdots + \binom{2\nu-1}{2\nu-4} a_1 b_{\nu-2} + (2\nu-1) a_0 b_{\nu-1},$$

wo die rechts stehenden Klammersymbole Binomialkoeffizienten der Potenzen 2ν und $(2\nu-1)$ sind.

Schreiben wir die Koeffizienten a_ν, b_ν, c_ν als Funktionen von k^2, so zeigen die für die niedersten Indizes explizite angegebenen Gestalten dieser Funktionen, daß eben für diese Indizes ν die Regeln gelten:

$$(11) \qquad \begin{cases} k^{2\nu} \cdot a_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = a_\nu(k^2), \\ k^{2\nu} \cdot b_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = c_\nu(k^2), \\ k^{2\nu} \cdot c_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = b_\nu(k^2), \end{cases}$$

von denen die dritte eine Folge der zweiten ist. Mittels der drei eben angegebenen Rekursionsformeln zeigt man aber durch den Schluß der vollständigen Induktion, daß diese Regeln (11) allgemein gültig sind. Die eigentliche Bedeutung derselben wird unten bei der Besprechung der linearen Transformation der Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ aufgeklärt werden. Endlich weisen wir noch darauf hin, daß zufolge der zweiten und dritten Rekursionsformel b_ν nur den Grad $(\nu-1)$ in k^2 erreicht, während in c_ν das Absolutglied verschwindet.

§ 6. Darstellung der Funktionen sn$w$, cn$w$, dn$w$ als Quotienten ganzer transzendenter Funktionen.

Nach (8) S. 389 und (4) S. 384 gilt:

$$\operatorname{sn} w : \operatorname{cn} w : \operatorname{dn} w : 1 = \sqrt{e_2 - e_1}\, \sigma(u) : \sigma_2(u) : \sigma_3(u) : \sigma_1(u).$$

Will man also die Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ als Quotienten ganzer transzendenter Funktionen darstellen, so kann man hierzu die vier rechts stehenden Glieder dieser Proportion gebrauchen, die ganze transzendente Funktionen sind und durch ihre Nullpunkte die Nullpunkte und Pole der Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ liefern. Dabei sind diese Funktionen homogen von nullter Dimension in u, ω_1, ω_2 und können also auch als Funktionen von w und k^2 aufgefaßt werden. Als solche gestatten sie Entwicklungen in beständig konvergente Potenzreihen nach w, deren Koeffizienten wieder ganze rationale Funktionen von k^2 sind

Natürlich können wir an Stelle dieser vier Funktionen, ohne die angegebene Proportion und die Nullpunkte der Funktionen irgendwie zu stören, auch vier andere Funktionen treten lassen, die aus ihnen durch Behaften mit einem gemeinsamen ganzen transzendenten und nullpunktfreien Faktor hervorgehen. In der Tat treten nun in der älteren Literatur bei Gauß[1]) und besonders ausführlich bei Weierstraß[2]) vier solche Funktionen auf, die von letzterem zu Ehren Abels[3]) mit $Al_1(w), Al_2(w), Al_3(w), Al(w)$ bezeichnet werden und zu den vier eben betrachteten Funktionen in der einfachen Beziehung stehen:

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{e_2-e_1}\,\sigma(u) = e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\,Al_1(w),\\ \sigma_2(u) = e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\,Al_2(w),\\ \sigma_3(u) = e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\,Al_3(w),\\ \sigma_1(u) = e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\,Al(w). \end{cases}$$

Die Darstellung der drei Funktionen $\operatorname{sn} w, \operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w$ in diesen Funktionen $Al(w)$ ist dann einfach:

$$(2)\qquad \operatorname{sn} w = \frac{Al_1(w)}{Al(w)},\quad \operatorname{cn} w = \frac{Al_2(w)}{Al(w)},\quad \operatorname{dn} w = \frac{Al_3(w)}{Al(w)}.$$

Wir können aus unseren früheren Formeln das Auftreten des Exponentialfaktors in (1) rechts sehr leicht verständlich machen. Es gilt nämlich zufolge der Beziehung zwischen $\wp(u)$ und $\operatorname{sn} w$, sowie zwischen den e_1, e_2, e_3 und $\lambda = k^2$:

$$(3)\quad \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} = \frac{\wp(u)-e_1}{e_2-e_1} = \frac{1}{e_2-e_1}\cdot\wp(u) - \frac{e_1}{e_2-e_1} = \frac{1}{e_2-e_1}\cdot\wp(u) + \tfrac{1}{3}(1+k^2).$$

Setzen wir nun für $\wp(u)$ seinen Ausdruck in der σ-Funktion:

$$(4)\qquad \wp(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2}$$

ein, so folgt für die rechte Seite von (3):

$$\frac{1}{e_2-e_1}\cdot\wp(u) + \tfrac{1}{3}(1+k^2) = -\frac{d^2}{dw^2}\log\left(e^{-\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\sqrt{e_2-e_1}\,\sigma(u)\right).$$

Es ergibt sich somit aus (1) und (3):

$$(5)\qquad \frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} = -\frac{d^2\log Al_1(w)}{dw^2}.$$

Die Bedeutung des Zusatzfaktors können wir also dahin kennzeichnen,

1) S. Gauß' Werke, Bd. 8 S. 96.

2) S. die 1840 verfaßte Abhandlung „Über die Entwicklung der Modularfunktionen", Weierstraß' Werke, Bd. 1 S. 1.

3) Abel hatte im „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" Introduction, Nr. 10 auf die Möglichkeit hingewiesen, die elliptischen Funktionen als Quotienten beständig konvergenter Reihen darzustellen; s. Abels „Werke", Bd. 1 S. 527.

daß die vermöge desselben erzielte Funktion $Al_1(w)$ zu der in (3) links stehenden Funktion in derselben einfachen Beziehung steht wie die Funktion $\sigma(u)$ zu $\wp(u)$.

An (5) reihen sich die drei weiteren Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{dn}^2 w}{\mathrm{cn}^2 w} = -\dfrac{d^2 \log Al_2(w)}{dw^2}, \\ \dfrac{k'^2 \mathrm{cn}^2 w}{\mathrm{dn}^2 w} = -\dfrac{d^2 \log Al_3(w)}{dw^2}, \\ k^2 \mathrm{sn}^2 w = -\dfrac{d^2 \log Al(w)}{dw^2}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung (6) geht aus (5) hervor, wenn wir $\mathrm{sn}\, w \cdot Al(w)$ für $Al_1(w)$ eintragen und bei der Zwischenrechnung von den Differentialrelationen (1) und (2) S. 396 Gebrauch machen. Entsprechend ergeben sich die erste und zweite Gleichung (6), wenn wir nacheinander für $Al(w)$ in die dritte Gleichung $Al_2(w) : \mathrm{cn}\, w$ und $Al_3(w) : \mathrm{dn}\, w$ eintragen.

Für die Aufstellung der beständig konvergenten Potenzreihen der Funktionen $Al(w)$ gewinnen wir unten partielle Differentialgleichungen, denen die $Al(w)$ als Funktionen von w und k^2 genügen, und die der partiellen Differentialgleichung (11) S. 322 für die σ-Funktion entsprechen. Aus ihnen folgen Rekursionsformeln zur Berechnung der Koeffizienten jener Potenzreihen. Wir können aber auch schon hier die fraglichen Reihen auf Grund von (6) aus denjenigen der Funktionen $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$, $\mathrm{dn}\, w$ herstellen.

Das Produkt irgend zweier Potenzreihen von der Gestalt:

$$A_0 + A_1 \frac{w}{1!} + A_2 \frac{w^2}{2!} + \cdots + A_\nu \frac{w^\nu}{\nu!} + \cdots,$$

in denen die A_ν ganze ganzzahlige Funktionen ν^{ten} Grades von k sind, liefert wieder eine solche Reihe, in der die Koeffizienten dasselbe Bildungsgesetz in k befolgen. Nun gilt für $k \cdot \mathrm{sn}\, w$ zufolge (10) S. 399 eine solche Reihe, und wir finden:

$$k^2 \mathrm{sn}^2 w = 2k^2 \frac{w^2}{2!} - (8k^2 + 8k^4) \frac{w^4}{4!} + (32k^2 + 208k^4 + 32k^6) \frac{w^6}{6!} - \cdots,$$

wo insbesondere im Gliede mit $w^{2\nu}$ eine ganze ganzzahlige Funktion ν^{ten} Grades von k^2 auftritt, die mit k^2 verschwindet. Die letzte Gleichung (6) liefert demnach vermittelst zweimaliger Integration für die Umgebung von $w = 0$:

$$\log Al(w) = C_0 + C_1 w - 2k^2 \frac{w^4}{4!} + (8k^2 + 8k^4) \frac{w^6}{6!}$$
$$- (32k^2 + 208k^4 + 32k^6) \frac{w^8}{8!} + \cdots,$$

wo C_0 und C_1 die Integrationskonstanten sind. Nun ist aber $\sigma_1(u)$ eine gerade Funktion von u, die für $u = 0$ den Wert 1 annimmt, und

zufolge der letzten Gleichung (1) gilt dasselbe für $Al(w)$ als Funktion von w; es gilt also $C_0 = 0$, $C_1 = 0$ und:

$$\log Al(w) = -2k^2 \frac{w^4}{4!} + (8k^2 + 8k^4) \frac{w^6}{6!}$$
$$-(32k^2 + 208k^4 + 32k^6) \frac{w^8}{8!} + \cdots.$$

Gehen wir zur Exponentialfunktion von $\log Al(w)$ über, so folgt:

$$(7) \quad Al(w) = 1 - 2k^2 \frac{w^4}{4!} + (8k^2 + 8k^4) \frac{w^6}{6!} - (32k^2 + 68k^4 + 32k^6) \frac{w^8}{8!} + \cdots$$

als beständig konvergente Reihe der ganzen transzendenten Funktion $Al(w)$.

Durch Multiplikation dieser Reihe mit denen von $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$, $\mathrm{dn}\, w$ erhält man auf Grund von (2) die beständig konvergenten Reihen der ganzen transzendenten Funktionen $Al_1(w)$, $Al_2(w)$, $Al_3(w)$:

$$(8) \begin{cases} Al_1(w) = w - (1+k^2)\frac{w^3}{3!} + (1+4k^2+k^4)\frac{w^5}{5!} - (1+9k^2+9k^4+k^6)\frac{w^7}{7!} + \cdots \\ Al_2(w) = 1 - \frac{w^2}{2!} + (1+2k^2)\frac{w^4}{4!} - (1+6k^2+8k^4)\frac{w^6}{6!} + \cdots \\ Al_3(w) = 1 - k^2 \frac{w^2}{2!} + (2k^2+k^4)\frac{w^4}{4!} - (8k^2+6k^4+k^6)\frac{w^6}{6!} + \cdots. \end{cases}$$

Es gelten für die ganzen ganzzahligen Funktionen von k^2, die hier als Koeffizienten auftreten, mehrere den Gleichungen (11) S. 400 entsprechende Relationen, welche wir aus jenen Gleichungen leicht herstellen. Wir schreiben zu diesem Zwecke unsere Reihen (8) und (7) abgekürzt:

$$Al_1(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \frac{w^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \qquad Al_2(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{w^{2\nu}}{(2\nu)!},$$
$$Al_3(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \frac{w^{2\nu}}{(2\nu)!}, \qquad Al(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu \frac{w^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

Dann ergibt sich zunächst zufolge der Herleitung der vierten Reihe aus der sn-Reihe, daß die erste Relation (11) S. 400 für die Koeffizienten D_ν erhalten bleibt:

$$(9) \qquad k^{2\nu} \cdot D_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = D_\nu(k^2).$$

Übrigens findet man bei dieser Herleitung, daß abgesehen von $D_0 = 1$ die D_ν mit k^2 verschwindende ganze ganzzahlige Funktionen $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grades von k^2 sind. Weiter gilt, unter a_ν die Koeffizienten der sn-Reihe verstanden:

$$A_\nu = a_\nu D_0 + \binom{2\nu+1}{2} a_{\nu-1} D_1 + \binom{2\nu+1}{4} a_{\nu-2} D_2 + \cdots + \binom{2\nu+1}{2\nu} a_0 D_\nu,$$

und durch analoge Gleichungen stellen sich B_ν und C_ν mittelst der

Koeffizienten b_ν und c_ν der Reihen für $\operatorname{cn} w$ und $\operatorname{dn} w$ dar. Aus (11) S. 400 und der eben angegebenen Gleichung folgt jetzt unmittelbar, daß für die Koeffizienten der vier Al-Reihen die folgenden Relationen gelten:

$$(10)\qquad \begin{cases} k^{2\nu}\cdot A_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = A_\nu(k^2), \\ k^{2\nu}\cdot B_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = C_\nu(k^2), \\ k^{2\nu}\cdot C_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = B_\nu(k^2), \\ k^{2\nu}\cdot D_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = D_\nu(k^2), \end{cases}$$

von denen die letzte die schon unter (9) genannte ist. Auch ist aus den früheren Gesetzen der b_ν, c_ν und den eben über die D_ν gemachten Angaben ersichtlich, daß abgesehen von $B_0 = 1$ und $C_0 = 1$ die sämtlichen ganzen Funktionen ν^{ten} Grades C_ν von k^2 mit k^2 verschwinden, während die B_ν nur den Grad $(\nu - 1)$ in k^2 erreichen.

§ 7. Produktentwicklungen der elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Wir haben oben (S. 264 ff.) die Abbildung der u-Ebene auf eine Riemannsche Fläche F_∞ über der t-Ebene vermittelst der Funktion:

$$(1)\qquad t = e^{\frac{2i\pi u}{\omega_2}}$$

untersucht und in Fig. 55 erläutert, wobei das Periodenparallelogramm der Ecken $0, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1$ in den schraffierten Kreisring der Figur überging. Die elliptischen Funktionen (erster Art) erster Stufe wurden, als Funktionen von t aufgefaßt, zu den eindeutigen Funktionen des Kreisrings; und auch die Funktionen $\zeta(u)$ und $\sigma(u)$ wurden nach geeigneter Normierung eindeutige Funktionen von t, welche gegenüber der erzeugenden Substitution $t' = q^2 t$ der damals durch $\Gamma^{(0)}$ bezeichneten Gruppe ein einfaches Verhalten darboten.

Im Anschluß hieran hatten wir Produktentwicklungen dieser Funktionen von t und Laurentsche Reihen nach Potenzen von t untersucht. Indem wir zuvörderst entsprechende Produktdarstellungen für die Funktionen zweiter Stufe angeben wollen, haben wir nicht nötig, ausführlich auf funktionentheoretische Betrachtungen in der t-Ebene zurückzugehen. Es genügt vielmehr, auf die aus (8) S. 268 sich ergebende Darstellung der σ-Funktion:

$$(2)\qquad \sigma(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} - \frac{\pi i u}{\omega_2}} \cdot \frac{\omega_2}{2i\pi}(t-1)\cdot \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - tq^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^{-1}q^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})^2}$$

zurückzugehen, um von hier aus rein rechnerisch zu verfahren. Man wolle sich nur daran erinnern, *daß die rechter Hand auftretenden Produkte in jedem endlichen Bereiche der t-Ebene, der den Nullpunkt $t = 0$ weder im Innern noch auf dem Rande enthält, absolut und gleichmäßig konvergent sind.*

Man wolle nun in (2) der Reihe nach für u die Werte:

$$u = \frac{\omega_1}{2}, \qquad u = \frac{\omega_2}{2}, \qquad u = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = -\frac{\omega_3}{2}$$

eintragen, denen die Werte $t = q$, $t = -1$ und $t = -q$ entsprechen. Wir erhalten auf diese Weise Produktdarstellungen für $\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$, welche unter wiederholter Verwendung der Legendreschen Relation (6) S. 160 die einfachen Gestalten annehmen:

$$(3)\quad \begin{cases} \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = i\,\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_1\omega_1}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2, \\ \sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\omega_2}{\pi}\, e^{\frac{\eta_2\omega_2}{8}} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2, \\ \sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\omega_2}{2\pi}\, e^{\frac{\eta_3\omega_3}{8}}\, q^{-\frac{1}{4}} \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n}}\right)^2. \end{cases}$$

Die Zusammenfassung der in den Zählern und Nennern zunächst getrennt auftretenden Produkte je in ein einziges ist wegen der unbedingten Konvergenz der Produkte statthaft.

Um für die in (3) S. 384 erklärten Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ Produktdarstellungen zu gewinnen, hat man in (2) für u der Reihe nach einzutragen $u - \frac{\omega_1}{2}$, $u - \frac{\omega_2}{2}$, $u - \frac{\omega_3}{2}$, sodann den Exponentialfaktor zuzusetzen und durch den in Betracht kommenden Ausdruck (3) zu teilen. *Die Rechnung führt auf folgende Produktdarstellungen der drei geraden Funktionen zweiter Stufe* $\sigma_1(u), \ldots$:

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}, \\ \sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cos\frac{\pi u}{\omega_2} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + 2q^{2n}\cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}, \\ \sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2}. \end{cases}$$

Wir haben rechts wieder durchweg u eingeführt und erinnern daran,

daß diese Produktdarstellungen in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Teilen wir diese Gleichungen durch die von S. 268 her bekannte Gleichung:

$$(5)\qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n}\cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

so ergeben sich zufolge (4) S. 384 Produktentwicklungen für die drei Funktionen zweiter Stufe $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, $\psi_3(u)$.

Zwischen den vier in den vorstehenden Formeln auftretenden Produkten[1]):

$$(6)\quad \Pi(1-q^{2n}),\quad \Pi(1+q^{2n}),\quad \Pi(1-q^{2n-1}),\quad \Pi(1+q^{2n-1})$$

besteht eine wichtige Beziehung. Zufolge der unbedingten Konvergenz dieser Produkte gelten nämlich die Gleichungen:

$$\Pi(1-q^{2n})\cdot\Pi(1+q^{2n}) = \Pi(1-q^{4n}),$$
$$\Pi(1-q^{2n-1})\ \Pi(1+q^{2n-1}) = \Pi(1-q^{4n-2}).$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen miteinander, so erscheint rechts bei Zusammenfassung beider Produkte in eines das erste Produkt (6) wieder. Die Werte der drei letzten Produkte (6) ergeben also miteinander multipliziert 1:

$$(7)\qquad \Pi(1+q^{2n})\cdot\Pi(1-q^{2n-1})\cdot\Pi(1+q^{2n-1}) = 1.$$

Ehe wir zu Produktdarstellungen für die Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ übergehen, wollen wir die in (17) S. 392 als eindeutige Funktionen der Perioden erklärten Größen $\sqrt{e_2-e_1}$, k, k' mit entsprechenden Darstellungen versehen. Dieselben ergeben sich, wenn wir in die in (17) S. 392 rechts stehenden σ-Quotienten die inzwischen gewonnenen Produktausdrücke (3) eintragen, dabei wiederholt von der Legendreschen Relation (6) S. 160 Gebrauch machen und endlich bei der Berechnung der Gleichung für $\sqrt{e_2-e_1}$ die eben angegebene Relation (7) heranziehen:

$$\sqrt{e_2-e_1} = \frac{\pi}{\omega_2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^4,$$
$$(8)\qquad k = 4q^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4,\quad k' = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^4.$$

Erklären wir die beiden Ausdrücke $\sqrt{e_2-e_3}$ und $\sqrt{e_3-e_1}$ im Anschluß an die Gleichungen:

$$k'^2 = \frac{e_2-e_3}{e_2-e_1},\quad k^2 = \frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}$$

1) n hat stets alle ganzen positiven Zahlen zu durchlaufen, was der Kürze halber nicht immer angegeben ist.

als eindeutige Funktionen der Perioden durch:

$$\sqrt{e_2-e_3}=k'\sqrt{e_2-e_1}\,,\quad \sqrt{e_3-e_1}=k\sqrt{e_2-e_1}\,,$$

so finden wir als Produktdarstellungen für die fraglichen Quadratwurzeln der Differenzen der e:

$$(9)\quad \begin{cases} \sqrt{e_2-e_3}=\frac{\pi}{\omega_2}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^4, \\ \sqrt{e_2-e_1}=\frac{\pi}{\omega_2}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^4, \\ \sqrt{e_3-e_1}=4\,\frac{\pi}{\omega_2}\,q^{\frac{1}{2}}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^4. \end{cases}$$

Andrerseits ergeben die Gleichungen (8) die Möglichkeit, auch *die achten Wurzeln aus den Integralmoduln* k^2 *und* k'^2 *als eindeutige Funktionen des Periodenquotienten* ω zu erklären, was durch die Gleichungen geschehen soll:

$$(10)\qquad \sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right),\quad \sqrt[4]{k'}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right).$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen miteinander und benutzen die Relation (7), so ergibt sich durch Ausziehen der Kubikwurzel für *die 24. Wurzel des Produktes* $k^2\cdot k'^2$ *der Integralmoduln die Darstellung als eindeutige Funktion des Periodenquotienten* ω:

$$(11)\qquad \sqrt[12]{kk'}=\sqrt[6]{2}\,q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+q^{2n-1}}\right).$$

Die Diskriminante Δ stellt sich als Quadrat des Differenzenproduktes der e_1, e_2, e_3 so dar:

$$\Delta=16\,[(e_2-e_1)(e_2-e_3)(e_3-e_1)]^2.$$

Die Gleichungen (9) ergeben sonach mit Benutzung der Relation (7) als Produktentwicklung der Diskriminante Δ:

$$(12)\qquad \Delta=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12}q^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{24},$$

was wir auf anderem Wege bereits S. 313 erhalten hatten.

Den Übergang zu den Jacobischen Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ vollziehen wir jetzt auf Grund von:

$$\operatorname{sn} w=\frac{\sqrt{e_2-e_1}\,\sigma(u)}{\sigma_1(u)},\quad \operatorname{cn} w=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)},\quad \operatorname{dn} w=\frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)}.$$

Nach Eintragung der Produktausdrücke für $\sqrt{e_2-e_1}$ und die σ-Quotienten wolle man bei $sn\,w$ von der Relation (7) Gebrauch machen und

kann übrigens die von u freien Produkte nach (10) durch $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$ ausdrücken. Führen wir w und K an Stelle von u und ω_2 auf Grund der bekannten Beziehungen ein, *so finden wir als in jedem endlichen Bereiche der w-Ebene unbedingt konvergente Produktdarstellungen der Funktionen* $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$, $\mathrm{dn}\, w$:

$$(13)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\, w = 2q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi w}{2K} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n-2}}\right), \\ \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\, w = 2q^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi w}{2K} \prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n-2}}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\, w = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+q^{4n-2}}\right). \end{cases}$$

§ 8. Laurentsche und Fouriersche Reihen für die Funktionen sn, cn und dn.

Aus den vorstehenden Produktentwicklungen kann man auf rein rechnerischem Wege (nach Vorgang von Jacobi) zu Fourierschen Reihen für die Funktionen $\mathrm{sn}\, w$, $\mathrm{cn}\, w$ und $\mathrm{dn}\, w$ gelangen. Doch führt eine selbständige Herleitung dieser Reihen aus den Eigenschaften unserer drei Funktionen sogleich tiefer in die Bedeutung dieser Reihen ein (vgl. S. 269).

Für die Untersuchung der Funktion $\mathrm{sn}\, w$ bilden wir die u-Ebene mittelst der Exponentialfunktion:

$$(1)\qquad t = e^{\frac{\pi i}{\omega_1}\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)} = e^{\frac{\pi i}{2K}(w - iK')}$$

auf eine unendlich-blättrige Fläche F_∞ über der t-Ebene ab, wobei wir zu ähnlichen Verhältnissen kommen wie S. 264. Arbeiten wir des besseren Anschlusses an $\mathrm{sn}\, w$ halber sogleich mit der w-Ebene, so wird das aus zwei Parallelogrammen des ursprünglichen Netzes zusammengesetzte Parallelogramm der Ecken $w = \pm iK'$, $w = 4K \pm iK'$ eindeutig auf einen Ring der t-Ebene abgebildet, dessen innerer Rand der Einheitskreis der t-Ebene ist, während der äußere Rand aus diesem Kreise mittelst der Substitution $t' = q^{-1}t$ hervorgeht. Wir wollen diesen ringförmigen Bereich B_0 nennen. Üben wir auf das fragliche „Doppelparallelogramm" der w-Ebene die sämtlichen Substitutionen:

$$w' = w \pm 2iK',\quad w' = w \pm 4iK',\quad w' = w \pm 6iK', \ldots$$

aus und fügen die entstehenden Doppelparallelogramme dem ursprüng-

lichen an, so ergibt sich ein Parallelstreifen der w-Ebene, der sich auf ein schlichtes Blatt der F_∞ über der t-Ebene abbildet. Den beiden erzeugenden Substitutionen:

$$w' = w + 2iK', \quad w' = w + 2K$$

der Gruppe $\Gamma^{(w)}$ entsprechen die Substitutionen:

$$(2) \qquad t' = qt, \quad t' = -t,$$

aus denen wir eine wieder mit $\Gamma^{(t)}$ zu bezeichnende Gruppe herstellen. Der Bereich B_0 geht durch die erste dieser Substitutionen in einen ringförmigen Bereich B_1 über, welcher sich längs des Einheitskreises glatt an B_0 anlagert. Den aus B_0 und B_1 zusammengesetzten „Doppelring" nennen wir $(B_0 + B_1)$.

Im Punkte $t = 1$ (der Stelle $w = iK'$ entsprechend) liegt ein Pol erster Ordnung der Funktion $\operatorname{sn} w$. Der entsprechende Wert von u ist $\frac{\omega_1}{2}$, in dessen unmittelbarer Nähe zufolge (1) und der Eigenschaften der Funktionen σ und σ_1 (vgl. (3) S. 384) folgende Entwicklung gilt:

$$t - 1 = \frac{\pi i}{\omega_2}\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{\pi i}{\omega_2}\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{\omega_2} e^{-\frac{\eta_1 \omega_1}{4}} \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma_1(u).$$

Andrerseits ist zufolge der aus (2) und (1) S. 401 sich ergebenden Darstellung der Funktionen $\operatorname{sn} w$ durch die Funktionen $\sigma(u), \sigma_1(u)$ unendlich nahe am Punkte $u = \frac{\omega_1}{2}$, dem Nullpunkte von $\sigma_1(u)$:

$$\operatorname{sn} w = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_1(u)}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der voraufgehenden folgt:

$$\lim_{t=1}\left((t-1)\cdot \operatorname{sn} w\right) = -\frac{\pi i}{\omega_2}\sqrt{e_2 - e_1}\cdot e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{4}}\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2.$$

Trägt man für $\sqrt{e_2 - e_1}$ und $\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ die Produktentwicklungen (9) S. 407 und (3) S. 405 ein, so folgt unter Benutzung von (7) S. 406:

$$\lim_{t=1}\left((t-1)\cdot \operatorname{sn} w\right) = \frac{\pi i}{4\pi q^{\frac{1}{2}} \prod (1 - q^{2n})^2 \prod (1 + q^{2n})^4}.$$

Aus der letzten Gleichung (9) S. 407 ergibt sich damit:

$$\lim_{t=1}\left((t-1)\cdot \operatorname{sn} w\right) = \frac{\pi i}{\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1}} = \frac{\pi i}{2Kk}.$$

Als Funktion von t ist $\operatorname{sn} w$ im Innern des Ringes B_0 überall analytisch, während auf jeder der beiden Randkurven ein Paar von Polen gelegen ist. Da $\operatorname{sn} w$ gegenüber der zweiten Substitution (2) Zeichenwechsel erfährt und also eine ungerade Funktion von t ist, so existiert

für den Bereich B_0 als Konvergenzbereich eine bestimmte Laurentsche Reihe:

$$\operatorname{sn} w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^{2n-1}$$

als Darstellung von $\operatorname{sn} w$. In den Punkten $t = 1$ und $t = -1$, den auf dem inneren Rande von B_0 gelegenen Polen, wird $\operatorname{sn} w$ unendlich wie:

$$\frac{\pi i}{2Kk}(t-1)^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\pi i}{2Kk}(t+1)^{-1},$$

so daß die Differenz:

$$\operatorname{sn} w - \frac{\pi i}{2Kk}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) = \operatorname{sn} w - \frac{\pi i}{Kk}\frac{t}{t^2-1}$$

an den beiden fraglichen Stellen analytisch bleibt. Im Innern von B_0 ist $|t| > 1$, so daß für den Subtrahenden daselbst die konvergente Entwicklung:

$$\frac{\pi i}{Kk} \cdot \frac{t}{t^2-1} = \frac{\pi i}{Kk} \sum_{n=-\infty}^{0} t^{2n-1},$$

und also für die Differenz die Darstellung:

$$\operatorname{sn} w - \frac{\pi i}{Kk}\frac{t}{t^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{0}\left(c_n - \frac{\pi i}{Kk}\right) t^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{2n-1}$$

gültig ist. Die hier links stehende Funktion ist im Innern des Doppelringes $(B_0 + B_1)$ überall analytisch, während auf dessen Rande Pole liegen; die auf der rechten Seite stehende Laurentsche Reihe hat somit $(B_0 + B_1)$ zum Konvergenzbereiche.

Man verstehe jetzt unter t einen Punkt im Innern von B_1, so daß $|t| < 1$ und also die konvergente Entwicklung:

$$\frac{\pi i}{Kk}\frac{t}{t^2-1} = -\frac{\pi i}{Kk} \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$$

gilt. Tragen wir dieselbe in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich für $\operatorname{sn} w$ die im Innern von B_1 konvergente Entwicklung:

$$\operatorname{sn} w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(c_n - \frac{\pi i}{Kk}\right) t^{2n-1}$$

Dem jetzigen Punkte t entspricht durch die zur ersten Substitution (2) inverse Substitution der im Innern von B_0 gelegene Punkt $t' = q^{-1}t$. Da $\operatorname{sn} w$ gegenüber dieser Substitution unverändert bleibt und für den Bereich B_0 die ursprünglich angesetzte Laurentsche Reihe gilt, so ist:

$$\operatorname{sn} w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(c_n q^{-(2n-1)}\right) \cdot t^{2n-1}$$

die für B_1 gültige Laurentsche Entwicklung, welche demnach wegen ihrer eindeutigen Bestimmtheit mit der eben zuvor angegebenen Reihe identisch sein muß. Es gilt also:

$$c_n - \frac{\pi i}{Kk} = c_n q^{-(2n-1)}, \qquad c_n = \frac{\pi i}{Kk} \cdot \frac{q^{2n-1}}{q^{2n-1}-1},$$

womit die für den Bereich B_0 gültige Laurentsche Reihe von $\operatorname{sn} w$ gewonnen ist; tragen wir für t den zweiten Ausdruck (1) ein, so folgt:

$$(3) \qquad \operatorname{sn} w = \frac{\pi i}{Kk} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{2n-1}-1} e^{(2n-1)\frac{\pi i w}{2K}}.$$

Für die Funktion $\operatorname{cn} w$ gilt eine ganz entsprechende Überlegung. In nächster Nähe der Stelle $\frac{\omega_1}{2}$ hat man zunächst:

$$\operatorname{cn} w = \frac{\sigma_2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_1(u)} = \frac{\sigma_2\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_1(u)} = e^{-\frac{\eta_2 \omega_1}{4}} \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\sigma_1(u)},$$

so daß sich durch Multiplikation mit dem S. 409 für $(t-1)$ angegebenen Ausdrucke ergibt:

$$\lim_{t=1} ((t-1)\cdot \operatorname{cn} w) = -\frac{\pi i}{\omega_2} e^{-\frac{(\eta_1+\eta_2)\omega_1}{4}} \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}.$$

Durch Eintragung der Produkte für die rechts stehenden σ-Werte findet man unter Benutzung der Gleichung (7) S. 406 und der Legendreschen Relation (6) S. 160:

$$\lim_{t=1} ((t-1)\operatorname{cn} w) = \frac{\pi}{4\pi q^{\frac{1}{2}} \prod(1-q^{2n})^2 \cdot \prod(1+q^{2n})^4} = \frac{\pi}{\omega_2\sqrt{e_3-e_1}} = \frac{\pi}{2Kk},$$

woraus das Verhalten von $\operatorname{cn} w$ in den Polen $t = 1$ und $t = -1$ zu entnehmen ist. Im übrigen hat man nur noch zu beachten, daß $\operatorname{cn} w$ bei Ausübung der ersten Substitution (2) Zeichenwechsel erfährt. Tragen wir in die für B_0 gültige Laurentsche Reihe von $\operatorname{cn} w$ an Stelle von t gleich wieder den zweiten Ausdruck (1) ein, so folgt:

$$(4) \qquad \operatorname{cn} w = \frac{\pi}{Kk} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{2n-1}+1} e^{(2n-1)\frac{\pi i w}{2K}}.$$

Die dritte Funktion $\operatorname{dn} w$ bleibt bei der zweiten Substitution (2) unverändert und ist also als gerade Funktion von t anzusetzen. Das Verhalten von $\operatorname{dn} w$ im Punkte $t = 1$ schließt man am kürzesten aus der Relation:

$$\frac{d \operatorname{sn} w}{dt} \cdot \frac{dt}{dw} = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w,$$

welche mit Rücksicht auf das schon festgestellte Verhalten von $\operatorname{sn} w$ und $\operatorname{cn} w$ im fraglichen Punkte die Gestalt annimmt:

$$-\frac{\pi i}{2Kk}\left(\frac{1}{t-1}\right)^2\cdot\frac{\pi i}{2K}=\frac{\pi}{2Kk}\cdot\frac{1}{t-1}\cdot\operatorname{dn} w.$$

Da übrigens $\operatorname{dn} w$ eine gerade Funktion ist, so ergibt sich, daß $\operatorname{dn} w$ in den Punkten $t=1$ und $t=-1$ unendlich wird wie:

$$\frac{\pi}{2K}\cdot\frac{1}{t-1}\quad\text{und}\quad-\frac{\pi}{2K}\cdot\frac{1}{t+1}.$$

Weiter ist noch zu beachten, daß auch $\operatorname{dn} w$ wie $\operatorname{cn} w$ gegenüber der ersten Substitution (2) Zeichenwechsel erfährt. Es reiht sich an (3) und (4) als Darstellung von $\operatorname{dn} w$:

$$(5)\qquad \operatorname{dn} w=\frac{\pi}{K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{q^n}{q^{2n}+1}\,e^{\frac{n\pi i w}{K}}.$$

Zu Fourierschen Reihen für unsere Funktionen gelangen wir nun einfach durch Zusammenfassung der Glieder in (3), (4) und (5) zu Paaren: *Für die Funktionen* $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$ *und* $\operatorname{dn} w$ *gelten folgende Darstellungen in Fourierschen Reihen:*

$$(6)\qquad \begin{cases}\dfrac{Kk}{2\pi}\operatorname{sn} w=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\cdot\sin(2n-1)\frac{\pi w}{2K},\\[2ex] \dfrac{Kk}{2\pi}\operatorname{cn} w=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cdot\cos(2n-1)\frac{\pi w}{2K},\\[2ex] \dfrac{2K}{\pi}\operatorname{dn} w=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4q^n}{1+q^{2n}}\cos\frac{n\pi w}{K};\end{cases}$$

der gemeinsame Konvergenzbereich derselben entspricht dem Ringe B_0 *und stellt also einen Parallelstreifen der* w*-Ebene dar, begrenzt durch zwei Gerade, deren eine durch die Pole* $w=iK'+2\nu K$ *läuft, während die andere die Pole* $w=-iK'+2\nu K$ *verbindet.*

Zu bemerkenswerten Spezialfällen der Gleichungen (6) gelangt man durch Eintragung der besonderen Werte $w=0,\ K,\ K+iK'$, wobei man die Werte der linken Seiten der Gleichungen (6) an diesen Stellen aus der Tabelle von S. 393 meist direkt ablesen kann. Wir notieren etwa die für $w=0$ entstehenden Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases}\dfrac{K^2k}{\pi^2}=\dfrac{q^{\frac12}}{1-q}+\dfrac{3q^{\frac32}}{1-q^3}+\dfrac{5q^{\frac52}}{1-q^5}+\dfrac{7q^{\frac72}}{1-q^7}+\cdots,\\[2ex] \dfrac{Kk}{2\pi}=\dfrac{q^{\frac12}}{1+q}+\dfrac{q^{\frac32}}{1+q^3}+\dfrac{q^{\frac52}}{1+q^5}+\dfrac{q^{\frac72}}{1+q^7}+\cdots,\\[2ex] \dfrac{2K}{\pi}=1+\dfrac{4q}{1+q^2}+\dfrac{4q^2}{1+q^4}+\dfrac{4q^3}{1+q^6}+\dfrac{4q^4}{1+q^8}+\cdots.\end{cases}$$

§ 9. Die Fouriersche Reihen für die ganzen Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ und die Thetafunktionen.

Die ganzen transzendenten Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ sind nach geeigneter Normierung durch einen Exponentialfaktor (S. 266) in Abhängigkeit von t betrachtet Funktionen, die in der ganzen t-Ebene, abgesehen von den beiden wesentlich singulären Punkten $t = 0$ und $t = \infty$ analytisch sind. Hieraus bestimmt sich der Konvergenzbereich der zugehörigen Laurentschen Reihen und der aus ihnen hervorgehenden Fourierschen Reihen, welche letztere in jedem endlichen Bereiche der u-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergent sind.

Wir brauchen nun für die Gewinnung der fraglichen Reihen nicht wieder eine grundsätzliche funktionentheoretische Betrachtung anzustellen, sondern können an die Fouriersche Reihe (19) S. 272 für die σ-Funktion anknüpfen und von hieraus den Übergang zu den Entwicklungen der drei σ-Funktionen zweiter Stufe durch einfache Umrechnung gewinnen. Ehe dies geschehen kann, ist noch eine kurze Vorentwicklung auszuführen, welche den in (19) S. 272 links stehenden Faktor $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ betrifft.

Versieht man die in der mehrfach genannten Gleichung rechts stehende Reihe mit dem Faktor $q^{\frac{1}{4}}$, so gelangt man zur Jacobischen ϑ_1-Reihe, welche man unter Einführung der Variabelen:

$$v = \frac{u}{\omega_2} = \frac{w}{2K} \tag{1}$$

an Stelle von u bzw. w durch:

$$\vartheta_1(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v \tag{2}$$

zu erklären pflegt; will man die Abhängigkeit von ω bzw. von q hervorheben, so schreibt man $\vartheta_1(v, q)$. Das Produkt von $q^{\frac{1}{4}}$ und $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ nennen wir gleich selbst wieder $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ und haben also für diese allein von den Perioden abhängige Funktion die Darstellung:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2} q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^{1\cdot 2} + 5q^{2\cdot 3} - 7q^{3\cdot 4} + \cdots), \tag{3}$$

welche für jedes im Innern der positiven Halbebene gelegene ω konvergiert und, woran wir beiläufig erinnern, einen von 0 verschiedenen Summenwert liefert. Letzteren können wir nun leicht mittelst der Diskriminante Δ darstellen, was hier zunächst geschehen soll.

Zu diesem Zwecke leiten wir erstlich eine wichtige partielle Differentialgleichung für die Funktion $\vartheta_1(v, q)$ aus der Reihe (2) ab. Da es

sich bei Differentiationen nach v im Grunde um Differentiationen der Laurentschen Reihe nach t handelt, so gilt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial v^2} = -2\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 \cdot q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v,$$

wo die Reihe den gleichen Konvergenzbereich hat, wie die Reihe (2). Bis auf einen konstanten Faktor gelangt man zu derselben Reihe, wenn man ϑ_1 einmal nach ω differenziert. Die Vergleichung der sich ergebenden Formel mit der letzten liefert den Satz: *Die Funktion* $\vartheta_1(v, q)$ *befriedigt die partielle Differentialgleichung:*

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \omega}.$$

Diese Gleichung wollen wir auf u und den S. 316 erklärten Differentiationsprozeß D_η umrechnen. Zunächst gilt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial v^2} = \omega_2^2 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u^2} = \omega_2^2 \vartheta_1 \cdot \left[\frac{\partial^2 \log \vartheta_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u}\right)^2\right],$$

wie man durch einfache Differentiation feststellt. Bei der Ausübung von D_η auf ϑ_1 hat man zu beachten, daß ω_2 als Nenner in v vorkommt und außerdem ω im zweiten Argumente q der Funktion auftritt. Es folgt:

$$D_\eta(\log \vartheta_1) = \frac{1}{\vartheta_1} D_\eta(\vartheta_1) = \frac{1}{\vartheta_1}\left(-\eta_2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} \cdot \frac{u}{\omega_2^2} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \omega} D_\eta(\omega)\right).$$

Bei Benutzung der Legendreschen Relation (6) S. 160 findet man:

$$D_\eta(\omega) = \eta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \omega_2} = \frac{\eta_1}{\omega_2} - \frac{\omega_1 \eta_2}{\omega_2^2} = -\frac{2i\pi}{\omega_2^2}.$$

Die letzte Gleichung ergibt somit:

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \omega} = -\omega_2^2 \vartheta_1 \left(2u \frac{\eta_2}{\omega_2} \frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u} + 2 D_\eta(\log \vartheta_1)\right).$$

Hiernach lautet die umgerechnete Differentialgleichung (4):

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \log \vartheta_1}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u}\right)^2 + 2u \frac{\eta_2}{\omega_2} \frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u} + 2 D_\eta(\log \vartheta_1) = 0.$$

Nun gilt zufolge der Gleichung (19) S. 272 bei der jetzigen Bedeutung von $\varphi(\omega_1, \omega_2)$:

$$\log \sigma(u) = \tfrac{1}{2} u^2 \frac{\eta_2}{\omega_2} + \log \vartheta_1(v) - \log \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

während andrerseits nach S. 322 die σ-Funktion die Differentialgleichung befriedigt:

$$\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 + 2 D_\eta(\log \sigma) + \tfrac{1}{12} g_2 u^2 = 0.$$

Aus der voraufgehenden Gleichung ergibt sich aber:

$$\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} = \frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{\partial^2 \log \vartheta_1}{\partial u^2},$$

$$\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 = u^2 \frac{\eta_2^2}{\omega_2^2} + 2u \frac{\eta_2}{\omega_2} \frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log \vartheta_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$2D_\eta(\log \sigma) = u^2 D_\eta\left(\frac{\eta_2}{\omega_2}\right) + 2D_\eta(\log \vartheta_1) - 2D_\eta(\log \varphi).$$

Tragen wir diese Ausdrücke für die ersten drei Glieder der Differentialgleichung der σ-Funktion ein, so folgt bei Benutzung der Gleichung (5):

$$u^2\left(\frac{\eta_2^2}{\omega_2^2} + D_\eta\left(\frac{\eta_2}{\omega_2}\right) + \tfrac{1}{12}g_2\right) + \left(\frac{\eta_2}{\omega_2} - 2D_\eta(\log \varphi)\right) = 0.$$

Da diese Gleichung in u identisch besteht, so muß:

$$\frac{\eta_2^2}{\omega_2^2} + D_\eta\left(\frac{\eta_2}{\omega_2}\right) + \tfrac{1}{12}g_2 = 0, \quad 2D_\eta(\log \varphi) - \frac{\eta_2}{\omega_2} = 0$$

zutreffen. Die erste dieser Gleichungen bestätigt sich auch sofort, wenn wir:

$$D_\eta\left(\frac{\eta_2}{\omega_2}\right) = \eta_2 D_\eta\left(\frac{1}{\omega_2}\right) + \frac{1}{\omega_2} D_\eta(\eta_2) = -\frac{\eta_2^2}{\omega_2^2} + \frac{D_\eta(\eta_2)}{\omega_2}$$

setzen und den S. 325 bestimmten Ausdruck von $D_\eta(\eta_2)$ eintragen. Die zweite Gleichung können wir umschreiben in:

$$D_\eta(\log \varphi^2) - D_\eta(\log \omega_2) = D_\eta\left(\log\left(\frac{\varphi^2}{\omega_2}\right)\right) = 0.$$

Diese Gleichung bleibt unverändert bestehen, falls wir dem Ausdrucke unter dem Logarithmus den konstanten Faktor 2π zufügen. Wir gelangen dadurch zu der homogenen Funktion $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension der Perioden:

$$\psi(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot \varphi^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 q^{\frac{1}{2}} (1 - 6q^2 + 9q^4 + \cdots), \tag{6}$$

für welche also die Gleichung gilt:

$$D_\eta(\log \psi) = \eta_1 \frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_2} = 0.$$

Daneben reihen wir jetzt die „Homogeneitätsrelation“:

$$D_\omega(\log \psi) = \omega_1 \frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_2} = -3$$

und finden durch Auflösung nach den Ableitungen von $\log \psi$ unter Benutzung der Legendreschen Relation und der Gleichungen (7) S. 313:

$$\frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_1} = \frac{-3\eta_2}{2i\pi} = \frac{1}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1},$$

$$\frac{\partial \log \psi}{\partial \omega_2} = \frac{3\eta_1}{2i\pi} = \frac{1}{4} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \log\left(\frac{\psi}{\sqrt[4]{\Delta}}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega_2} \log\left(\frac{\psi}{\sqrt[4]{\Delta}}\right) = 0.$$

Die eine dieser Gleichungen ist übrigens eine Folge der anderen, da der unter dem Logarithmus stehende Quotient homogen von *nullter* Dimension in den ω_1, ω_2 ist. Wir schließen aber aus den vorstehenden Gleichungen, *daß dieser Quotient überhaupt von den ω_1, ω_2 unabhängig und also eine numerische Konstante ist.* Erklären wir $\sqrt[4]{\Delta}$ im Anschluß an (12) S. 407 als eindeutige Funktion der Perioden ω_1, ω_2 durch:

$$(7) \quad \sqrt[4]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 q^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^6 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 q^{\frac{1}{2}} (1 - 6q^2 + 9q^4 + \cdots),$$

so ergibt der Vergleich mit (6) als Darstellungen von ψ und damit von φ durch die Diskriminante Δ:

$$(8) \quad \psi = \sqrt[4]{\Delta}, \qquad \varphi = \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\, \sqrt[8]{\Delta}.$$

Die Beziehung von $\sigma(u)$ zur Funktion $\vartheta_1(v)$ nimmt daraufhin die neue Gestalt an:

$$(9) \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\, \sqrt[8]{\Delta} \cdot \sigma(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\, \vartheta_1(v),$$

wo $\vartheta_1(v)$ durch die in jedem endlichen Bereiche der v-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe (2) *gegeben ist und der linker Hand bei $\sigma(u)$ auftretende Faktor als eindeutige Funktion der Perioden ω_1, ω_2 erklärt ist durch:*

$$(10) \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\, \sqrt[8]{\Delta} = \frac{2\pi}{\omega_2} q^{\frac{1}{4}} (1 - 3q^{1\cdot 2} + 5q^{2\cdot 3} - 7q^{3\cdot 4} + \cdots),$$

eine Gleichung, die wir auch ersetzen können durch:

$$(11) \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\, \sqrt[8]{\Delta} = \frac{2\pi}{\omega_2} q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^3.$$

Der Übergang zu den drei σ-Funktionen zweiter Stufe ist nun sehr leicht vollzogen. Wir erklären erstlich (vgl. (9) S. 407) durch:

$$(12) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_2 - e_1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})^2, \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_2 - e_3} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2, \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\, \sqrt[4]{e_3 - e_1} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n})^2 \end{cases}$$

die drei links stehenden Ausdrücke als eindeutige Funktionen von ω.

Mit Hilfe dieser Erklärung können wir aus (11) und den Produktentwicklungen (3) S. 405 entnehmen:

$$(13)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot \sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = ie^{\frac{\eta_1\omega_1}{8}}\cdot\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}, \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot \sigma\left(\frac{\omega_2}{3}\right) = e^{\frac{\eta_2\omega_2}{8}}\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1}, \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\cdot \sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\eta_3\omega_3}{8}}\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}. \end{cases}$$

Nun gilt aber zufolge der Erklärung der σ-Funktionen zweiter Stufe (vgl. S. 384):

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2}\eta_1 u}\,\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma_2(u) = e^{-\frac{1}{2}\eta_2 u}\,\sigma\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma_3(u) = e^{-\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)u}\,\sigma\left(u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).$$

Setzen wir demnach der Reihe nach in (9) statt u ein $u+\frac{\omega_1}{2}$, $u+\frac{\omega_2}{2}$ und $u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, so gelangen wir unter Benutzung der Gleichungen (13) und der Legendreschen Relation nach einer leichten Zwischenrechnung zu den Gleichungen:

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\cdot\sigma_1(u) = -ie^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\,\vartheta_1\left(v+\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1}\cdot\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_1\left(v+\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\cdot\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\,\vartheta_1\left(v+\frac{1+\omega}{2}\right).$$

Setzen wir:

$$(14)\quad \begin{cases} -iq^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\cdot\vartheta_1\left(v+\frac{\omega}{2}\right) = \vartheta_0(v), \\ \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v), \\ q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\,\vartheta_1\left(v+\frac{1+\omega}{2}\right) = \vartheta_3(v), \end{cases}$$

so haben wir damit die drei geraden Thetafunktionen Jacobis gewonnen, die also mit den σ-Funktionen zweiter Stufe durch:

$$(15)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\cdot\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_0(v), \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_3-e_1}\cdot\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_2(v), \\ \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\cdot\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\,\vartheta_3(v) \end{cases}$$

zusammenhängen. Als Funktionen von v und q schreiben wir die Thetafunktionen ausführlich $\vartheta_0(v, q)$, $\vartheta_1(v, q)$, ...; ihre Reihenentwicklungen pflegt man zunächst in die Gestalt zu kleiden:

$$(16)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v, q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi v i}, \\ \vartheta_1(v, q) = \frac{1}{i} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi v i}, \\ \vartheta_2(v, q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi v i}, \\ \vartheta_3(v, q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi v i}. \end{cases}$$

Die ϑ_1-Reihe gewinnt man sofort aus der Gleichung (2); aus der ϑ_1-Reihe gehen dann die übrigen drei Reihen einfach auf Grund der Erklärungen (14) hervor. Als Fouriersche Reihen der ϑ-Funktionen haben wir hiernach:

$$(17)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v, q) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \cdots, \\ \vartheta_1(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \cdots, \\ \vartheta_2(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \cdots, \\ \vartheta_3(v, q) = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \cdots, \end{cases}$$

womit dann auf Grund von (15) zugleich die Fourierschen Reihen für die drei σ-Funktionen zweiter Stufe gewonnen sind. Natürlich sind diese Reihen sämtlich wie die ϑ_1-Reihe in jedem endlichen Bereiche der v-Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergent. Tragen wir in (9) und (15) für die σ-Funktionen die Produkte (5) und (4) S. 405ff. ein und ziehen die Formeln (11) und (12) S. 416 heran, so ergeben sich für die ϑ-Funktionen folgende Produktentwicklungen:

$$(18)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v, q) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\ \vartheta_1(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \cdot \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \vartheta_2(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \cdot \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \vartheta_3(v, q) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{cases}$$

welche gleichfalls in jedem endlichen Bereiche der v-Ebene unbedingt konvergent sind.

Bei Änderung von u um ω_1 und ω_2 und also von v um ω und 1 zeigen die Thetafunktionen folgendes Verhalten:

$$(19)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v+\omega) = -q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_0(v), & \vartheta_0(v+1) = +\vartheta_0(v), \\ \vartheta_1(v+\omega) = -q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_1(v), & \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_2(v+\omega) = +q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_2(v), & \vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+\omega) = +q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_3(v), & \vartheta_3(v+1) = +\vartheta_3(v), \end{cases}$$

wie man aus dem entsprechenden Verhalten der $\mathfrak{S}$-Funktionen oder auch direkt aus den Reihen (16) abliest. Das Verhalten der Thetafunktionen bei Vermehrung des Argumentes v um Periodenhälften, wie es sich aus (14) und (19) leicht berechnen läßt, stellen wir gleich tabellarisch zusammen:

$v' =$	$v + \frac{\omega}{2}$	$v + \frac{1}{2}$	$v + \frac{1+\omega}{2}$
$\vartheta_0(v') =$	$iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_1(v)$	$\vartheta_3(v)$	$q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_2(v)$
$\vartheta_1(v') =$	$iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_0(v)$	$\vartheta_2(v)$	$q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_3(v)$
$\vartheta_2(v') =$	$q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_3(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$-iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_0(v)$
$\vartheta_3(v') =$	$q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_2(v)$	$\vartheta_0(v)$	$iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi v i}\vartheta_1(v)$

Setzen wir in den drei geraden Thetafunktionen $v = 0$, so ergeben sich die drei kurz durch ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 zu bezeichnenden „Thetanullwerte“:

$$(20)\quad \begin{cases} \vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \cdots, \\ \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots, \\ \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \cdots; \end{cases}$$

sie sind identisch mit den in (12) eindeutig erklärten Wurzelausdrücken:

$$(21)\quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_1} = \vartheta_3, \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3} = \vartheta_0, \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_3 - e_1} = \vartheta_2.$$

Für die durch (10) S. 407 miterklärten vierten Wurzeln der Integralmoduln k^2 und k'^2 findet sich weiter:

$$(22)\quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3},$$

so daß zwischen den drei Thetanullwerten die Relation besteht:

$$(23)\quad \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4.$$

Der Nullwert der ersten Ableitung von $\vartheta_1(v)$ heiße kurz ϑ_1':

$$(24)\quad \vartheta_1' = 2\pi(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - 7q^{\frac{49}{4}} + \cdots);$$

teilen wir durch ω_2, so gelangen wir zur rechten Seite der Gleichung (10) zurück, so daß wir finden:

(25) $$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta} = \frac{1}{\omega_2}\cdot\vartheta_1'.$$

Da (vgl. z. B. die Formeln (11) und (12)):

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_3-e_1}\,\sqrt[4]{e_2-e_1} = \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}$$

gilt, so liefern die Formeln (21) und (25) zwischen den Thetanullwerten weiter die Beziehung:

(26) $$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3.$$

Die doppeltperiodischen Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ selbst stellen sich in den Thetafunktionen so dar:

(27) $$\sqrt{k}\operatorname{sn} w = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\operatorname{cn} w = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\operatorname{dn} w = \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

wofür wir auch schreiben könnten:

(28) $$\operatorname{sn} w = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \operatorname{cn} w = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\quad \operatorname{dn} w = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.$$

Die zwischen den $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ bestehenden quadratischen Relationen schreiben sich demnach in den Thetafunktionen so:

(29) $$\begin{cases}\vartheta_3^2\vartheta_1(v)^2 + \vartheta_0^2\vartheta_2(v)^2 = \vartheta_2^2\vartheta_0(v)^2,\\ \vartheta_2^2\vartheta_1(v)^2 + \vartheta_0^2\vartheta_3(v)^2 = \vartheta_3^2\vartheta_0(v)^2,\end{cases}$$

so daß zwischen den Quadraten der vier Thetafunktionen zwei lineare Relationen mit von v unabhängigen Koeffizienten identisch bestehen. Wir können hinzusetzen, daß für je drei unter diesen vier Quadraten eine solche Relation besteht; denn aus (29) folgen mit Hilfe von (23) sofort die beiden weiteren Relationen:

(30) $$\begin{cases}\vartheta_0^2\vartheta_0(v)^2 + \vartheta_2^2\vartheta_2(v)^2 = \vartheta_3^2\vartheta_3(v)^2,\\ \vartheta_0^2\vartheta_1(v)^2 + \vartheta_3^2\vartheta_2(v)^2 = \vartheta_2^2\vartheta_3(v)^2.\end{cases}$$

§ 10. Die Thetafunktionen mit beliebiger Charakteristik.

Die Nullpunkte der Thetafunktionen liegen in den Ecken, den Seitenmitten und dem Mittelpunkte des ursprünglich ausgewählten Periodenparallelogramms der Ecken $0, \omega_2, \omega_1+\omega_2, \omega_1$. Will man die Thetafunktionen zur Darstellung der elliptischen Funktionen der drei verschiedenen Arten gebrauchen, ähnlich wie oben (S. 212 ff.) zu diesem Zwecke $\sigma(u)$ herangezogen wurde, so hat man entsprechend dem Übergange von $\sigma(u)$ zur Funktion $\sigma(u-u_0)$ mit beliebigem Nullpunkte u_0 eine Thetafunktion mit derart abgeändertem Argumente her-

zustellen, daß der Nullpunkt an einer beliebig vorzuschreibenden Stelle des Parallelogramms liegt.

Wir können hierbei an irgendeine unter den vier Thetafunktionen anknüpfen; jedoch empfiehlt es sich, $\vartheta_3(v)$ zu bevorzugen. Wir setzen an:

$$\vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right)$$

und haben damit eine Funktion hergestellt, deren Nullpunkt bei:

$$v_0 = \frac{(1+g)\omega + (1-h)}{2}$$

liegt. Wenn wir demnach unter g und h zwei reelle Größen der Intervalle $-1 < g \leqq +1$, $-1 < h \leqq +1$ verstehen, so werden gerade die gesamten Punkte v_0 des auf die v-Ebene übertragenen Periodenparallelogramms erschöpft. Doch gelten die nachfolgenden Betrachtungen auch dann, wenn wir unter g und h irgendwelche reelle Größen verstehen. Die in Ansatz gebrachte Funktion wollen wir noch mit einem unten näher zu bestimmenden Exponentialfaktor versehen und schreiben alsdann abkürzend:

$$e^{av+b}\,\vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) = \vartheta_{gh}(v).$$

Die Zusammenstellung (g, h) der beiden reellen Zahlen g, h nennen wir die „*Charakteristik*" der hergestellten Funktion und bezeichnen die letztere auch als „*Thetafunktion der Charakteristik* (g, h)".

Den hinzugefügten Exponentialfaktor bestimmen wir in der Weise, daß die Funktion $\vartheta_{gh}(v)$ sowohl bei Vermehrung von v um 1 und um ω als auch in ihrer Abhängigkeit von ω ein tunlichst einfaches Verhalten zeigt.

Vermehren wir v um ω, so finden wir unter Benutzung der letzten Formel (19) S. 419:

$$\vartheta_{gh}(v+\omega) = e^{-\pi i h} \cdot e^{(a+\pi i g)\omega} \cdot q^{-1} e^{-2\pi i v}\,\vartheta_{gh}(v).$$

Es wird sich also empfehlen, $a = -\pi i g$ zu setzen, damit der zweite Exponentialfaktor rechts gleich 1 wird. Schreiben wir den noch nicht bestimmten Faktor e^b in Abhängigkeit von ω allein $\varphi(\omega)$, so gilt also:

$$\vartheta_{gh}(v) = \varphi(\omega) \cdot e^{-\pi i g v} \cdot \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right).$$

Bei der Auswahl von $\varphi(\omega)$ gehen wir von der Tatsache aus, *daß die unter* (4) S. 414 *angegebene Differentialgleichung der* ϑ_1-*Funktion von allen vier Thetafunktionen* $\vartheta_\nu(v, q)$ *befriedigt wird:*

(1) $$\frac{\partial^2 \vartheta(v,q)}{\partial v^2} = 4 i\pi \frac{\partial \vartheta(v,q)}{\partial \omega},$$

wie z. B. aus den Reihenentwicklungen (17) S. 418 sofort folgt. Es ist

nun möglich, den Faktor $\varphi(\omega)$ so zu bestimmen, daß auch $\vartheta_{gh}(v)$ dieser Differentialgleichung genügt. Gebrauchen wir für die beiden ersten Ableitungen von $\vartheta_3(v, q)$ nach dem *ersten* Argumente die Bezeichnungen ϑ_3' und ϑ_3'', während wir die erste Ableitung nach dem im zweiten Argumente q enthaltenen ω als Differentialquotient schreiben, so gilt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{gh}(v,q)}{\partial v^2} = \varphi(\omega) \cdot e^{-\pi i g v} \left\{ \vartheta_3''\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) - 2\pi i g \vartheta_3'\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) - \pi^2 g^2 \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) \right\},$$

$$\frac{\partial \vartheta_{gh}(v,q)}{\partial \omega} = \varphi(\omega) \cdot e^{-\pi i g v} \left\{ \frac{\partial \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right)}{\partial \omega} - \tfrac{1}{2} g \vartheta_3'\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) + \frac{d \log \varphi}{d\omega} \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) \right\}.$$

Nun ist, da für die ϑ_3-Funktion die Differentialgleichung (1) gilt:

$$\vartheta_3''\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right)}{\partial \omega},$$

so daß aus den vorstehenden Gleichungen sich ergibt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{gh}(v,q)}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{gh}(v,q)}{\partial \omega} = -4\pi i \vartheta_{gh}(v,q) \cdot \left(\frac{d \log \varphi(\omega)}{d\omega} - \tfrac{1}{4} \pi i g^2 \right).$$

Soll demnach die Differentialgleichung (1) auch von der Funktion ϑ_{gh} erfüllt sein, so haben wir $\varphi(\omega)$ aus:

$$\frac{d \log \varphi(\omega)}{d\omega} = \tfrac{1}{4} \pi i g^2 \quad \text{zu} \quad \varphi(\omega) = c \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i g^2 \omega}$$

zu bestimmen, unter c eine numerische Konstante verstanden.

Wir verfügen über diese Konstante in der Art, daß wir nunmehr endgültig:

$$\vartheta_{gh}(v,q) = e^{-\pi i g\left(v - \frac{1}{4} g\omega - \frac{1}{2} h\right)} \vartheta_3\left(v - \frac{g\omega - h}{2}\right) \tag{2}$$

schreiben. Dann gilt der Satz: *Die Thetafunktion* (2) *der Charakteristik* (g, h) *hat ihren einzigen im Periodenparallelogramm gelegenen Nullpunkt erster Ordnung an der oben angegebenen Stelle* v_0, *genügt als Funktion von* v *und* ω *der partiellen Differentialgleichung* (1) *und zeigt bei Vermehrung von* v *um* 1 *und um* ω *das Verhalten:*

$$\begin{cases} \vartheta_{gh}(v+1) = e^{-\pi i g} \vartheta_{gh}(v) \\ \vartheta_{gh}(v+\omega) = e^{-\pi i h} q^{-1} e^{-2\pi i v} \vartheta_{gh}(v). \end{cases} \tag{3}$$

Da die beiden reellen Größen g, h auf die Intervalle $-1 < g \leqq +1$, $-1 < h \leqq +1$ beschränkt werden können, so sind die einzigen *ganzzahligen* Charakteristiken, die man auch als „*Hauptcharakteristiken*" bezeichnet, die vier (0,0), (1,0), (0,1), (1,1). Mit Hilfe der Tabelle von S. 419 stellt

man leicht fest, daß diese genau zu den vier ursprünglichen Thetafunktionen führen:

(4) $$\vartheta_{01}(v) = \vartheta_0(v), \quad \vartheta_{11}(v) = \vartheta_1(v), \quad \vartheta_{10}(v) = \vartheta_2(v), \quad \vartheta_{00}(v) = \vartheta_3(v).$$

Das Formelpaar (3) faßt entsprechend die vier Paare (19) in einen Ausdruck zusammen.

§ 11. Die Thetafunktionen höherer Ordnung mit beliebiger Charakteristik.

Die Entwicklungen von § 10 verallgemeinern wir jetzt durch folgende Erklärung: *Indem wir die Zahlen g, h in der bisherigen Bedeutung beibehalten, verstehen wir unter einer Thetafunktion der positiven ganzzahligen Ordnung m und der Charakteristik (g, h) eine ganze transzendente Funktion $\vartheta_{gh}^{(m)}(v, q)$, welche bei Vermehrung von v um 1 und um ω das Verhalten zeigt:*

(1) $$\begin{cases} \vartheta_{gh}^{(m)}(v+1) = e^{-\pi i g}\vartheta_{gh}^{(m)}(v), \\ \vartheta_{gh}^{(m)}(v+\omega) = e^{-\pi i h} q^{-m} e^{-2m\pi i v}\vartheta_{gh}^{(m)}(v), \end{cases}$$

und welche als Funktion von v und ω die Differentialgleichung:

(2) $$\frac{\partial^2 \vartheta_{gh}^{(m)}(v, q)}{\partial v^2} = 4i\pi m \frac{\partial \vartheta_{gh}^{(m)}(v, q)}{\partial \omega}$$

befriedigt. Für $m = 1$ kommen wir auf die in § 10 betrachteten Funktionen $\vartheta_{gh}(v)$ zurück.

Betrachten wir zunächst die Charakteristik (0,0), so wird eine hierher gehörige Funktion zufolge der ersten Gleichung (1) in eine Laurentsche Reihe nach $t = e^{2\pi i v}$ entwickelbar sein, welche wieder denselben Konvergenzbereich wie die ursprünglichen ϑ-Reihen hat. Wir setzen diese Reihe gleich in die Gestalt:

$$\vartheta_{00}^{(m)}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2n\pi i v},$$

wo die Koeffizienten c_n von v unabhängig sind. Hieraus folgt:

$$\vartheta_{00}^{(m)}(v+\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n q^{2n})\, e^{2n\pi i v};$$

und da andererseits:

$$q^{-m} e^{-2m\pi i v}\vartheta_{00}^{(m)}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_{n+m} q^{-m}) e^{2n\pi i v}$$

gilt, so liefert die zweite Gleichung (1) wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Laurentschen Reihe in ihrem Konvergenzbereiche die Rekursionsformel:

$$c_{n+m} = c_n q^{2n+m}.$$

Ist $m = 1$, d. h. haben wir den bisher allein betrachteten Fall der Thetafunktionen erster Ordnung, so sind alle Koeffizienten durch einen unter ihnen, etwa c_0, aus der Rekursionsformel berechenbar. Ist $m > 1$, so haben wir entsprechend der Bauart dieser Formel etwa $c_0, c_1 \ldots, c_{m-1}$ vorerst noch unbestimmt zu lassen und finden dann aus einem unter diesen Koeffizienten, den wir c_ν nennen, durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformel:

$$c_{km+\nu} = c_\nu q^{k^2 m + 2k\nu}, \quad (k = -\infty, \cdots, +\infty; \; \nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1),$$

so daß mit c_ν alle diejenigen Koeffizienten c_n eindeutig bestimmt sind, deren Indizes n modulo m mit ν kongruent sind. An Stelle der m Koeffizienten c_ν wollen wir noch eintragen:

$$c_\nu = c'_\nu \cdot q^{\frac{\nu^2}{m}}$$

und findet dann unter Zusammenfassung aller Reihenglieder, die das einzelne c'_ν als Faktor aufweisen, für $\vartheta_{00}^{(m)}(v)$ ein Aggregat der Gestalt:

$$\vartheta_{00}^{(m)}(v) = c'_0 \vartheta_{00}^{(m)}(v)_0 + c'_1 \vartheta_{00}^{(m)}(v)_1 + \cdots + c'_{m-1} \vartheta_{00}^{(m)}(v)_{m-1}, \tag{3}$$

wobei $\vartheta_{00}^{(m)}(v)_\nu$ zu erklären ist durch:

$$\vartheta_{00}^{(m)}(v)_\nu = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(km+\nu)^2}{m}} e^{2(km+\nu)\pi i v}. \tag{4}$$

Die hier rechts stehende Reihe können wir nun auch so schreiben:

$$q^{\frac{\nu^2}{m}} e^{2\nu\pi i v} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{k^2 m} e^{2k\pi i(mv+\nu\omega)}.$$

Damit aber kommen wir auf die ϑ_3-Funktion mit den Argumenten $(mv + \nu\omega)$ und q^m zurück:

$$\vartheta_{00}^{(m)}(v, q)_\nu = q^{\frac{\nu^2}{m}} e^{2\nu\pi i v} \vartheta_3(mv + \nu\omega, q^m), \tag{5}$$

so daß sich die besonderen Funktionen (4) *der Charakteristik* (0,0) *in der einfachen Gestalt* (5) *durch die ursprüngliche* ϑ_3*-Funktion darstellen lassen.*

Man beachte weiter, daß die m Funktionen (4) linear-unabhängig sind. Bestände nämlich zwischen ihnen eine lineare homogene Relation mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten identisch, so würde dieselbe auf t umgeschrieben eine Laurentsche Reihe mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten[1]), aber von identisch verschwindendem Summenwerte liefern, was unmöglich ist. Da übrigens jede die Bedingungen (1) befriedigende Funktion der Charakteristik (0,0) in der Gestalt (3) durch die Funktion (4) darstellbar war, so gewinnen wir das

1) Man beachte, daß $\vartheta_{00}^{(m)}(v)_\nu$ diejenigen Glieder der Laurentschen Reihe liefert, deren Exponenten modulo m mit ν kongruent sind.

Ergebnis: *Die Reihen* (4) *liefern m ganze transzendente, voneinander linear-unabhängige Funktionen, die den Bedingungen* (1) *für die Charakteristik* (0,0) *genügen; und umgekehrt ist jede solche Funktion in den m Funktionen* (4) *linear und homogen mit von v unabhängigen Koeffizienten darstellbar.*

Was nun zweitens die Differentialgleichung (2) angeht, so ist aus der Reihe in (4) rechts leicht zu zeigen, daß jede der m Funktionen $\vartheta_{00}^{(m)}(v)_\nu$ jene Gleichung befriedigt. Hieraus folgt, daß ein Ausdruck:

$$(6) \qquad \vartheta_{00}^{(m)}(v, q) = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu \vartheta_{00}^{(m)}(v, q)_\nu$$

mit von v unabhängigen Koeffizienten c_ν die Gleichung (2) stets und nur dann befriedigt, wenn:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{dc_\nu}{d\omega} \vartheta_{00}^{(m)}(v, q)_\nu = 0$$

identisch besteht. Dies erfordert aber, daß alle m Ableitungen $\frac{dc_\nu}{d\omega}$ verschwinden, weil wir andernfalls bei Umschreibung auf t wieder zu einer Laurentschen Reihe mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten, aber identisch verschwindendem Summenwerte gelangen würden. Die c_ν sind also auch von ω unabhängig. *Die* $\vartheta_{00}^{(m)}(v, q)_\nu$ *sind m voneinander linear-unabhängige Thetafunktionen* m^{ter} *Ordnung der Charakteristik* (0,0); *durch sie läßt sich jede solche Funktion in der Gestalt* (6) *mittels numerischer, d. h. von v und ω unabhängiger Koeffizienten darstellen.*

Die Thetafunktionen m^{ter} Ordnung der übrigen Charakteristiken (g, h) kann man genau, wie dies in § 10 für die erste Ordnung ausgeführt wurde, aus denjenigen der Charakteristik (0, 0) herstellen. Setzt man:

$$\vartheta_{gh}^{(m)}(v, q) = \varphi(\omega) \cdot e^{-\pi i g v} \cdot \vartheta_{00}^{(m)}\left(v - \frac{g\omega - h}{2m}, q\right),$$

wo $\varphi(\omega)$ von v unabhängig ist, so genügt diese Funktion jedenfalls den Bedingungen (1). Die Forderung, daß die Differentialgleichung (2) erfüllt ist, führt aber, von unwesentlichen Änderungen abgesehen, wieder genau zur Entwicklung von S. 422 zurück. Für das Bestehen der Gleichung (2) ist die Bedingung:

$$\frac{d \log \varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{\pi i g^2}{4m}$$

hinreichend und notwendig, wodurch $\varphi(\omega)$ bis auf einen numerischen Faktor eindeutig bestimmt ist. Um eine Formel zu gewinnen, in der die Gleichung (2) S. 422 als Spezialfall $m = 1$ enthalten ist, setzen wir:

$$(7) \qquad \vartheta_{gh}^{(m)}(v, q) = e^{-\pi i g\left(v - \frac{g\omega}{4m} - \frac{h}{2m}\right)} \cdot \vartheta_{00}^{(m)}\left(v - \frac{g\omega - h}{2m}, q\right)$$

und haben auf diese Weise sicher eine Thetafunktion m^{ter} Ordnung der Charakteristik (g, h) gewonnen. Ist andrerseits eine beliebige solche Funktion in $\vartheta_{gh}^{(m)}(v)$ vorgelegt, so erkennt man in:

$$e^{\pi i g\left(v + \frac{g\omega}{4m} - \frac{h}{m}\right)} \vartheta_{gh}^{(m)}\left(v + \frac{g\omega - h}{2m}\right)$$

sofort eine Thetafunktion m^{ter} Ordnung der Charakteristik (0, 0). *Die Gleichung* (7) *liefert uns gerade genau die gesamten Thetafunktionen m^{ter} Ordnung der Charakteristik (g, h), falls rechter Hand $\vartheta_{00}^{(m)}$ alle Thetafunktionen m^{ter} Ordnung der Charakteristik* (0, 0) *durchläuft.*

Die weiter über die Charakteristik (0, 0) entwickelten Sätze übertragen sich jetzt sofort auf jede andere Charakteristik. Wir gelangen zu dem Ergebnis: *Den m besonderen Funktionen $\vartheta_{00}^{(m)}(v)_\nu$ entsprechen vermöge* (7) *m linear-unabhängige Thetafunktionen m^{ter} Ordnung $\vartheta_{gh}^{(m)}(v, q)_\nu$ der Charakteristik (g, h), in denen sich jede Funktion dieser Art linear und homogen mit numerischen Koeffizienten darstellt.*

§ 12. Die Thetafunktionen m^{ter} Ordnung als ganze elliptische Funktionen dritter Art.

Führen wir an Stelle von v das Argument u wieder ein, so können wir die Gleichungen (1) S. 423, denen eine Thetafunktion m^{ter} Ordnung der Charakteristik (g, h) genügt, in die Gestalt:

$$\vartheta_{gh}^{(m)}\left(\frac{u + \omega_1}{\omega_2}\right) = e^{2i\pi\left(-\frac{m}{\omega_2}u - \frac{1}{2}m\omega - \frac{1}{2}h\right)} \vartheta_{gh}^{(m)}\left(\frac{u}{\omega_2}\right)$$

$$\vartheta_{gh}^{(m)}\left(\frac{u + \omega_2}{\omega_2}\right) = e^{2i\pi\left(-\frac{1}{2}g\right)} \vartheta_{gh}^{(m)}\left(\frac{u}{\omega_2}\right)$$

setzen. Wir erkennen also in unseren Thetafunktionen m^{ter} Ordnung nach den Erklärungen von S. 217 und S. 221 *ganze elliptische Funktionen dritter Art,* und zwar haben die in den Exponentialfaktoren der Gleichungen (2) S. 217 auftretenden Koeffizienten μ, ν hier die folgende Bedeutung:

$$\mu_1 = -\frac{m}{\omega_2}, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \nu_1 = -\tfrac{1}{2}m\omega - \tfrac{1}{2}h, \qquad \nu_2 = -\tfrac{1}{2}g.$$

Nach einem S. 220 aufgestellten Satze muß für jede elliptische Funktion dritter Art der Ausdruck $(\omega_1\mu_2 - \omega_2\mu_1)$ eine ganze Zahl darstellen, welche wir als „Ordnung“ der Funktion bezeichneten, und welche den Überschuß der Anzahl der Nullpunkte über diejenige der Pole der Funktion im Periodenparallelogramm liefert. Wir folgern aus den eben angegebenenen Werten von μ_1, μ_2: *Eine Thetafunktion m^{ter} Ordnung gehört auch als elliptische Funktion dritter Art zur Ordnung m und hat*

demnach als ganze Funktion im Periodenparallelogramm insgesamt m einfache Nullpunkte, die natürlich auch irgendwie zusammenfallen dürfen.

Um die Beziehung der Thetafunktionen zu den ganzen elliptischen Funktionen dritter Art weiter darzulegen, verstehen wir unter $\psi(u)$ irgendeine ganze elliptische Funktion dritter Art der Ordnung m und gehen auf die eben bereits genannten Gleichungen:

$$\psi(u + \omega_1) = e^{2i\pi(\mu_1 u + \nu_1)}\psi(u), \qquad \psi(u + \omega_2) = e^{2i\pi(\mu_2 u + \nu_2)}\psi(u)$$

zurück, wobei also für μ_1, μ_2 die Bedingung gilt:

$$\omega_1 \mu_2 - \omega_2 \mu_1 = m.$$

Da im übrigen die $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ beliebige komplexe Größen sind, so scheinen zunächst die Funktionen $\psi(u)$ insofern weiter als die Thetafunktionen zu reichen, als doch in den entsprechenden Definitionsgleichungen (1) S. 423 die g, h *reelle* Werte haben sollten. *Dieser Unterschied ist indessen nur scheinbar und kann durch eine „Normierung" von $\psi(u)$ mit einem Exponentialfaktor hinweg gehoben werden.* In der Tat wollen wir von $\psi(u)$ zur Funktion:

$$\varphi(u) = e^{-\frac{\pi i \mu_2}{\omega_2}u^2 - \pi i \lambda u}\,\psi(u)$$

übergehen, indem wir uns die nähere Bestimmung von λ vorbehalten. Das Verhalten dieser Funktion $\varphi(u)$ bei Vermehrung des Argumentes u um ω_2 und um ω_1 ist infolge der vorstehenden Gleichungen:

$$\varphi(u + \omega_2) = e^{-\pi i(\lambda\omega_2 + \mu_2\omega_2 - 2\nu_2)}\varphi(u),$$

$$\varphi(u + \omega_1) = e^{-\pi i(\lambda\omega_1 + \mu_1\omega_1 - 2\nu_1)}\,q^{-m}\,e^{-2i\pi m\frac{u}{\omega_2}}\varphi(u).$$

Wir können nun λ eindeutig durch die Forderung festlegen, daß die beiden Klammerausdrücke in den Exponenten rechter Hand *reell* ausfallen. Schreiben wir unter Trennung der reellen und imaginären Bestandteile $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, $\omega_2 = \omega_2' + i\omega_2''$, ..., so kleidet sich jene Forderung in die Gleichungen:

$$\lambda'\omega_2'' + \lambda''\omega_2' = 2\nu_2'' - \mu_2'\omega_2'' - \mu_2''\omega_2',$$
$$\lambda'\omega_1'' + \lambda''\omega_1' = 2\nu_1'' - \mu_1'\omega_1'' - \mu_1''\omega_1',$$

aus denen wir, da $\omega_1'\omega_2'' - \omega_1''\omega_2' < 0$ gilt, λ' und λ'' und damit λ eindeutig berechnen können. Auf diese Weise gewinnen wir zwei eindeutig bestimmte *reelle* Größen:

$$(1) \qquad g = (\lambda + \mu_2)\omega_2 - 2\nu_2, \qquad h = (\lambda + \mu_1)\omega_1 - 2\nu_1;$$

auch können wir, da in den Bedingungsgleichungen der Funktion $\psi(u)$ eine Abänderung von ν_1 und ν_2 um irgendwelche ganze Zahlen ohne Folge ist, die Größen ν_1 und ν_2 so bestimmt denken, daß die beiden reellen Zahlen g, h unseren oben vorgeschriebenen Intervallen $-1 < g \leqq +1$,

$-1 < h \leqq +1$ angehören. Es rechnet sich nun das oben für $\varphi(u)$ angegebene Gleichungenpaar, wenn wir noch die Bezeichnung gebrauchen:

$$\varphi(u) = \varphi(v\omega_2) = \theta(v),$$

in die folgende Gestalt um:

$$(2) \qquad \begin{cases} \theta(v+1) = e^{-\pi i g}\theta(v), \\ \theta(v+\omega) = e^{-\pi i h}q^{-m}e^{-2m\pi i v}\theta(v). \end{cases}$$

Hiermit haben wir in der Tat die Bedingungsgleichungen (1) S. 423 der Thetafunktionen wieder gewonnen und wollen die Funktion $\theta(v)$ dieserhalb genauer mit $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ bezeichnen. Die an jene Gleichungen (1) S. 423 geknüpften Rechnungen des vorigen Paragraphen dürfen wir demnach auf $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ in Anwendung bringen. Auf Grund jener Rechnungen oder auch aus dem gleich wieder ausführlich zu betrachtenden Hermiteschen Prinzip (vgl. S. 228) folgt die Darstellbarkeit jeder Funktion $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ in der Gestalt:

$$\theta_{gh}^{(m)}(v) = c_0\vartheta_{gh}^{(m)}(v)_0 + c_1\vartheta_{gh}^{(m)}(v)_1 + \cdots + c_{m-1}\vartheta_{gh}^{(m)}(v)_{m-1}$$

mit Koeffizienten, die von v unabhängig sind. Das hier rechts stehende Aggregat liefert offenbar auch dann noch eine die Relationen (2) befriedigende Funktion, wenn die c_ν irgendwelche Funktionen von ω sind. Hieraus geht hervor, daß zwar für $m = 1$ jede Funktion $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ durch Behaften mit einem weiteren von ω allein abhängenden Faktor zu einer Thetafunktion gemacht werden kann, daß dies indes für $m > 1$ nicht mehr stets möglich ist; denn diese Möglichkeit erfordert nach dem Schlußsatze von § 11 offenbar, daß die Quotienten der $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ von ω unabhängig sind, was eine Besonderheit ist. Nennen wir demnach jede den Bedingungen (2) genügende ganze transzendente Funktion eine *„allgemeine" Thetafunktion m^{ter} Ordnung $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ der Charakteristik (g, h), so umfassen dieselben zwar die Thetafunktionen $\vartheta_{gh}^{(m)}(v)$ als Spezialfälle, werden ihrerseits aber nicht durch diese Thetafunktionen erschöpft; die zweite Bedingung (2) S. 423, die Differentialgleichung der Funktionen $\vartheta_{gh}^{(m)}(v)$, kommt demnach für die allgemeinen Thetafunktionen $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ in Fortfall.* Die Beziehung zu den ganzen elliptischen Funktionen dritter Art gestaltet sich nun einfach so, *daß die letzteren nach Hinzufügung des oben bestimmten Exponentialfaktors gerade die gesamten allgemeinen Thetafunktionen $\theta_{gh}^{(m)}(v)$ liefern.*

Eine Bemerkung ist noch über die Beschränkung der reellen Zahlen g, h auf die Intervalle $-1 < g \leqq +1$, $-1 < h \leqq +1$ nachzutragen. Ändern wir etwa in der Gleichung (7) S. 425, welche wir auf beliebige reelle g, h beziehen, g und h um irgendwelche gerade ganze Zahlen, so

bleibt die durch jene Gleichung dargestellte Thetafunktion keineswegs unverändert. Indessen bleibt sie eine Thetafunktion *der anfänglichen Charakteristik,* da in den erklärenden Gleichungen (1) S. 423 und auch (2) S. 428 eine Änderung der g, h um gerade ganze Zahlen folgenlos ist. Die Zulassung von Zahlen g, h außerhalb der angegebenen Intervalle würde uns also keine neuen Funktionen mehr liefern können.

Für die gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen dritter Art hatten wir S. 227 auf Grund funktionentheoretischer Erwägungen das *Hermitesche Prinzip* abgeleitet: *Unter den gleichändrigen ganzen elliptischen Funktionen dritter Art m^{ter} Ordnung gibt es stets im ganzen m linear-unabhängige, in denen alle weiteren linear und homogen mit von u unabhängigen Koeffizienten darstellbar sind.* Zu diesem Prinzipe führten uns die Reihenentwicklungen des § 11 aufs neue hin, und zwar sowohl für die allgemeinen Thetafunktionen m^{ter} Ordnung wie auch für die speziellen, für die letzteren in der besonderen Gestalt, daß die Funktionen gleicher Charakteristik stets in m linear-unabhängigen unter ihnen linear und homogen mit numerischen, d. h. auch von ω unabhängigen Koeffizienten darstellbar waren.

Die ganzen elliptischen Funktionen dritter Art wurden S. 221 aus σ-Produkten aufgebaut. Statt der σ-Funktionen können wir auch die Thetafunktionen erster Ordnung $\vartheta_{gh}(v)$ benutzen. Ein Produkt von m Funktionen $\vartheta_{gh}(v)$ erster Ordnung stellt zufolge (3) S. 422 allemal eine allgemeine Thetafunktion m^{ter} Ordnung:

$$\theta_{gh}^{(m)}(v,q) = \prod_{\nu=1}^{m} \vartheta_{g_\nu, g_\nu}(v,q)$$

dar, deren Charakteristik sich aus:

$$g \equiv g_1 + g_2 + \cdots + g_m, \quad h \equiv h_1 + h_2 + \cdots + h_m \pmod{2}$$

bestimmt. Sind die Charakteristiken (g_ν, h_ν) sämtlich ganzzahlig („Hauptcharakteristiken“), so gilt dasselbe von (g, h). Einige hierauf bezügliche Ausführungen mögen sich hier anschließen.

Im Falle der Ordnung $m = 2$ haben wir in den vier Quadraten der ursprünglichen ϑ-Funktionen und in ihren Produkten zu zweien lauter Funktionen $\theta_{gh}^{(2)}(v)$ vor uns, und zwar verteilen sie sich auf die vier ganzzahligen Charakteristiken so:

$$\begin{array}{ll}
(0,0) & \vartheta_0(v)^2, \quad \vartheta_1(v)^2, \quad \vartheta_2(v)^2, \quad \vartheta_3(v)^2, \\
(1,0) & \vartheta_0(v)\,\vartheta_1(v), \quad \vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v), \\
(0,1) & \vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v), \quad \vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v), \\
(1,1) & \vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v), \quad \vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v).
\end{array}$$

Je die zwei Funktionen der drei letzten Paare sind linear-unabhängig,

wie man z. B. aus dem Umstande entnimmt, daß die eine Funktion gerade und die andere ungerade ist. Es läßt sich also z. B. jede Funktion $\theta_{11}^{(2)}(v)$ in der Gestalt:

$$\theta_{11}^{(2)}(v) = c_0\,\vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v) + c_1\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)$$

darstellen, wo die Koeffizienten c_0, c_1 von v unabhängig sind. Auch $\vartheta_0(v)^2$, $\vartheta_1(v)^2$ erkennt man leicht als linear-unabhängig, so daß z. B. die Funktionen $\vartheta_2(v)^2$ und $\vartheta_3(v)^2$ in den Gestalten:

$$\vartheta_2(v)^2 = c_0\vartheta_0(v)^2 + c_1\vartheta_1(v)^2,$$
$$\vartheta_3(v)^2 = c_0'\vartheta_0(v)^2 + c_1'\vartheta_1(v)^2$$

darstellbar sein müssen. Die Koeffizienten lassen sich leicht durch die Thetanullwerte $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ darstellen. Es ergibt sich nämlich, wenn wir $v = 0$ eintragen:

$$\vartheta_2^2 = c_0\vartheta_0^2, \quad \vartheta_3^2 = c_0'\vartheta_0^2,$$

sowie wenn wir $v = \frac{1}{2}$ setzen und die Tabelle von S. 419 benutzen:

$$0 = c_0\vartheta_3^2 + c_1\vartheta_2^2, \quad \vartheta_0^2 = c_0'\vartheta_3^2 + c_1'\vartheta_2^2.$$

Hieraus berechnet man, wenn man bei der Bestimmung von c_1' noch die Relation (23) S. 419 benutzt:

$$(3)\qquad \begin{cases} \vartheta_2(v)^2 = \dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\vartheta_0(v)^2 - \dfrac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}\,\vartheta_1(v)^2, \\[2mm] \vartheta_3(v)^2 = \dfrac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}\,\vartheta_0(v)^2 - \dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\vartheta_1(v)^2, \end{cases}$$

womit die Relationen (29) S. 420 wiedergewonnen sind.

Bei beliebiger Ordnung $m > 2$ werden diese Relationen (3) von Bedeutung. Zufolge derselben gelangen wir nämlich bereits zu allen linear-unabhängigen Produkten von je m Faktoren, wenn wir $\vartheta_2(v)$ und $\vartheta_3(v)$ höchstens in den ersten Potenzen zulassen. Wir gelangen alsdann gerade genau zu $4m$ Produkten:

$$\vartheta_0(v)^{m-\nu}\,\vartheta_1(v)^{\nu}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m),$$
$$\vartheta_0(v)^{m-\nu}\,\vartheta_1(v)^{\nu-1}\,\vartheta_2(v), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, m),$$
$$\vartheta_0(v)^{m-\nu}\,\vartheta_1(v)^{\nu-1}\,\vartheta_3(v), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, m),$$
$$\vartheta_0(v)^{m-\nu}\,\vartheta_1(v)^{\nu-2}\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v), \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots, m),$$

von denen man leicht erkennt, daß sie sich zu je m auf die vier ganzzahligen Charakteristiken verteilen. Auch erweisen sich je die n Produkte der gleichen Charakteristik als linear-unabhängig, so daß sie für die Darstellung aller Funktionen der in Betracht kommenden Charakteristik zugrunde gelegt werden können. Die Verhältnisse gestalten sich ein wenig verschieden, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Als Beispiel betrachten wir etwa eine ungerade Ordnung m und die Charakteristik (1, 1). Die zugehörigen m Produkte sind:

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v)^{m-1}\vartheta_1(v),\ \vartheta_0(v)^{m-3}\vartheta_1(v)^3,\ \vartheta_0(v)^{m-5}\vartheta_1(v)^5, \ldots, \vartheta_1(v)^m, \\ \vartheta_0(v)^{m-2}\vartheta_2(v)\vartheta_3(v),\ \vartheta_0(v)^{m-4}\vartheta_1(v)^2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v), \ldots \\ \qquad \ldots, \vartheta_0(v)\vartheta_1(v)^{m-3}\vartheta_2(v)\vartheta_3(v), \end{cases}$$

wobei in der ersten Zeile $\frac{m+1}{2}$, in der zweiten und dritten $\frac{m-1}{2}$ Produkte stehen. Jene Produkte sind ungerade, diese gerade Funktionen. Würde demnach zwischen den Funktionen (4) eine lineare Relation mit von v unabhängigen Koeffizienten identisch bestehen, so würde notwendig bereits eine solche Relation entweder für die geraden oder für die ungeraden Funktionen gelten. Setzen wir aber eine solche Relation etwa für die ungeraden Funktionen an, so wird dieselbe nach Fortheben des gemeinsamen Faktors $\vartheta_1(v)$ aller Glieder die Gestalt annehmen:

$$c_0\vartheta_0(v)^{m-1} + c_1\vartheta_0(v)^{m-3}\vartheta_1(v)^2 + c_2\vartheta_0(v)^{m-5}\vartheta_1(v)^4 + \cdots = 0.$$

Für $v = 0$ folgt $c_0\vartheta_0^{m-1} = 0$, so daß $c_0 = 0$ ist und also:

$$c_1\vartheta_0(v)^{m-3} + c_2\vartheta_0(v)^{m-5}\vartheta_1(v)^2 + \cdots = 0$$

nach Fortheben von $\vartheta_1(v)^2$ gewonnen wird. Indem man erneut $v = 0$ einträgt, folgt ebenso $c_1 = 0$ usw. In derselben Weise zeigt man, daß auch zwischen den geraden Funktionen (4) keine lineare Beziehung der fraglichen Art identisch bestehen kann. Das System der m Funktionen (4) ist also nach dem Hermiteschen Prinzip zur Dartellung aller Funktionen $\theta_{11}^{(m)}(v)$ geeignet.

Im niedersten Falle $m = 3$ haben wir hiernach die drei Funktionen:

$$(5)\qquad \vartheta_0(v)^2\vartheta_1(v),\quad \vartheta_1(v)^3,\quad \vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)$$

für die Signatur (1, 1) zugrunde zu legen, die letzte als einzige gerade Funktion. Jede gerade Funktion $\theta_{11}^{(3)}(v)$ ist demnach mit der dritten Funktion (5) bis auf einen von v unabhängigen Faktor identisch, während sich jede ungerade Funktion in den beiden ersten Funktionen (5) darstellen läßt.

Als linear-unabhängige Funktionen $\theta_{11}^{(3)}(v)$ gewinnen wir auf der anderen Seite aus (7) S. 425 die drei Thetafunktionen:

$$\vartheta_{11}^{(3)}(v, q)_\nu = e^{-\pi i\left(v - \frac{1}{12}\omega - \frac{1}{6}\right)}\vartheta_{00}^{(3)}\left(v - \frac{\omega - 1}{6}, q\right)_\nu,$$

welche wir unter Benutzung von (5) S. 424 auch in die Gestalt kleiden können:

$$\vartheta_{11}^{(3)}(v, q)_\nu = e^{\frac{(2\nu+1)\pi i}{6}} q^{\frac{(2\nu-1)^2}{12}} e^{(2\nu-1)\pi i v}\vartheta_3\left(3v - \frac{\omega - 1}{2} + \nu\omega, q^3\right)\cdot$$

Nach Eintragung der ϑ_3-Reihe ergibt sich:

$$e^{-\frac{\pi i}{6}}\vartheta_{11}^{(3)}(v,q)_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} e^{-(6n+1)\pi i v},$$

$$-i\,\vartheta_{11}^{(3)}(v,q)_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} e^{(6n+1)\pi i v},$$

$$-e^{\frac{\pi i}{6}}\vartheta_{11}^{(3)}(v,q)_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{3(2n+1)^2}{4}} e^{3(2n+1)\pi i v}.$$

An letzter Stelle haben wir zufolge der zweiten Gleichung (16) S. 418 die ungerade Funktion $i\vartheta_1(3v, q^3)$ vor uns; durch Subtraktion der beiden ersten Gleichungen folgt eine zweite ungerade Funktion, durch ihre Addition eine *gerade* Funktion:

$$e^{-\frac{\pi i}{6}}\vartheta_{11}^{(3)}(v,q)_0 - i\vartheta_{11}^{(3)}(v,q)_1 = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} \cos(6n+1)\pi v.$$

Für die hier rechts stehende Reihe gilt also der Ansatz:

(6) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} \cos(6n+1)\pi v = c\cdot\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v),$$

wo c von v unabhängig ist, aber ω noch enthalten mag.

Zur Bestimmung der Größe c leiten wir vorerst eine auch in anderer Hinsicht sehr wichtige *Reihenentwicklung für die 24. Wurzel aus der Diskriminante* Δ ab:

(7) $$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\Delta} = q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}).$$

Aus der zweiten Gleichung (18) S. 418 folgt:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},q) = \sqrt{3}\,q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}+q^{4n}) = \sqrt{3}\,q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{6n}),$$

so daß wir für die eindeutige Funktion (7) von ω die Darstellung:

(8) $$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vartheta_1(\tfrac{1}{3}, q^{\frac{1}{3}})$$

gewinnen. Aus der unter (17) S. 418 gegebenen ϑ_1-Reihe aber folgt:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},q) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{(2k+1)^2}{4}} \sin\frac{(2k+1)\pi}{3}.$$

Alle Glieder dieser Reihe, in denen $k \equiv 1$ (mod. 3) ist, fallen aus; wir haben also nur zu setzen $k = 3n$, wo n die Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots$ durchläuft, und $k = -3n-1$, wo n die Zahlen $-1, -2, -3, \cdots$ zu durchlaufen hat. Wir erhalten also:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{4}}\sin\frac{\pi}{3} + 2\sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^{n-1} q^{\frac{(-6n-1)^2}{4}}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

was sich sofort zusammenfaßt zu:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3}, q) = \sqrt{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{4}}.$$

Indem wir $\sqrt{3}$ nach links setzen und $q^{\frac{1}{3}}$ an Stelle von q eintragen, ergibt sich die Reihenentwicklung für die in (8) rechts stehende Funktion und damit die Reihe für die 24. Wurzel aus $\varDelta$:

$$(9)\qquad \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\varDelta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} = q^{\frac{1}{12}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{3n^2+n}.$$

Die Bestimmung der Größe c in (6) ist nun sofort geleistet. Indem wir $v=0$ setzen, tritt links gerade die in (9) gewonnene Reihe auf, so daß wir zu der Relation gelangen:

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\varDelta} = c\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3.$$

Für das Produkt der Nullwerte der drei geraden Thetafunktionen aber folgt aus (26) und (25) S. 420:

$$\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = \frac{\omega_2}{\pi}\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\varDelta}.$$

Die Größe c läßt sich also mittelst der Diskriminante so darstellen:

$$c = \frac{\pi}{\omega_2}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{\varDelta}},$$

und die Gleichung (6) kann man in die endgültige Gestalt setzen:

$$(10)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}\cos(6n+1)\pi v = \frac{\pi\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\omega_2\sqrt[12]{\varDelta}}.$$

Drittes Kapitel.

Die Modulfunktionen zweiter Stufe und die lineare Transformation der elliptischen Funktionen zweiter Stufe.

Als eine Eigenschaft einer elliptischen Funktion zweiter Stufe haben wir nach den allgemeinen Erklärungen von S. 376 auch noch zu fordern, daß dieselbe als Funktion von ω_1 und ω_2 unverändert bleiben soll gegenüber den Substitutionen der in der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ enthaltenen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe. Diese im Laufe der letzten Entwicklungen zurückgetretene Eigenschaft unserer Funktionen haben wir jetzt näher zu untersuchen. Wir werden uns dabei nicht auf die Stufe 2 beschränken können, müssen vielmehr mit Rücksicht auf die Größen $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[12]{kk'}$, $\sqrt[12]{\varDelta}$ usw. vielfach auch auf höhere Stufen eingehen, ohne indes die letzteren einer grundsätzlichen Untersuchung zu unterziehen.

Für den Entwicklungsgang wird das fünfte Kapitel des ersten Abschnitts vorbildlich sein. Das Verhalten der auch u enthaltenden elliptischen Funktionen zweiter Stufe gegenüber den Substitutionen der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ wird uns zur Lehre von der „linearen Transformation" der Funktionen zweiter Stufe führen, der bei den Funktionen erster Stufe freilich noch kein Analogon gegenüberstand, da diese Funktionen gegenüber der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ invariant sind.

§ 1. Der Diskontinuitätsbereich der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe.

Alle in der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ enthaltenen Substitutionen:

$$\omega' = V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

deren Koeffizienten die Kongruenzen befriedigen:

$$(1) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

bilden eine Untergruppe, die wir als „Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe" benennen wollten, und die zunächst mit der Bezeichnung $\Gamma^{(\omega)}_{(2)}$ belegt werden möge. Nach der S. 284 ausgeführten Überlegung erkennt man, daß die $\Gamma^{(\omega)}_{(2)}$ ebenso wie die Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ durch die Spiegelung an der imaginären ω-Achse $\bar{U}(\omega) = -\bar{\omega}$ in sich transformiert wird. Der Zusatz von $\bar{U}$ zur $\Gamma^{(\omega)}_{(2)}$ liefert demnach eine Gruppe:

$$\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)} = \Gamma^{(\omega)}_{(2)} + \Gamma^{(\omega)}_{(2)} \cdot \bar{U},$$

die wir als die „erweiterte Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe" bezeichnen, und die neben den die $\Gamma^{(\omega)}_{(2)}$ bildenden Substitutionen „erster Art" V noch die gesamten die Kongruenzen (1) befriedigenden Substitutionen „zweiter Art":

$$\omega' = \bar{V}(\omega) = V\bar{U}(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \delta}$$

enthält.

Um die Diskontinuitätsbereiche dieser Gruppen zu gewinnen, betrachten wir, wie bei der Gesamtgruppe $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ (vgl. S. 286 ff.), zunächst die in der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ enthaltenen Spiegelungen, für welche die Gleichung $\delta = \alpha$ charakteristisch ist (vgl. S. 285). Ist $\gamma = 0$, so ist die Gleichung des Symmetriekreises (der hier eine Gerade darstellt) $2\xi = \beta$; für $\gamma \gtrless 0$ ist die Gleichung des Symmetriekreises:

$$\left(\xi - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2,$$

wenn wir (wie S. 175) $\omega = \xi + i\eta$ schreiben.

Da β zufolge (1) eine gerade Zahl ist, so sind die Geraden unter den Symmetriekreisen durch $\xi = 0$, $\xi = \pm 1$, $\xi = \pm 2, \ldots$ gegeben;

unter den eigentlichen Kreisen haben wir für $\gamma = 2$ diejenigen mit den größten Radien, nämlich die Kreise der Radien $\frac{1}{2}$ um die reellen Mittelpunkte $\omega = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \cdots$. Die drei speziellen unter den Symmetriekreisen, welche durch die Gleichungen:

$$\xi = 0, \qquad \xi + 1 = 0, \qquad (\xi + \tfrac{1}{2})^2 + \eta^2 = (\tfrac{1}{2})^2$$

dargestellt sind, grenzen das obere Kreisbogendreieck der Winkel 0 in Fig. 60, S. 289 ein. Die zugehörigen Spiegelungen bezeichnen wir, um eine mit (1) S. 296 möglichst konforme Schreibweise zu gebrauchen, durch:

$$(2) \qquad \bar{U}(\omega) = -\bar{\omega}, \qquad \bar{T}'(\omega) = -\bar{\omega} - 2, \qquad \bar{S}'(\omega) = -\frac{\bar{\omega}}{2\bar{\omega} + 1}.$$

Von jenem Kreisbogendreieck der Winkel 0 aus stellten wir durch den Spiegelungsprozeß ein ganzes Netz solcher Dreiecke her, welches die positive ω-Halbebene schlicht und vollständig bedeckte, und dessen Natur S. 288 ff. ausführlich dargelegt wurde. Nehmen wir noch hinzu, daß die drei Symmetriekreise („Höhen" des ersten Dreiecks der Winkel 0):

$$2\xi + 1 = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1, \qquad (\xi + 1)^2 + \eta^2 = 1,$$

welche die Zerlegung des fraglichen Dreiecks der Winkel 0 in die sechs Elementardreiecke der Gesamtgruppe $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ leisteten, *nicht* zu den Symmetriekreisen der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ gehören, so gelangen wir zu dem Ergebnisse, *daß das in* Fig. 60, S. 289 *begonnene, die positive ω-Halbebene schlicht bedeckende Dreiecksnetz der Winkel* 0 *gerade genau die gesamten Symmetriekreise der Untergruppe $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ erschöpft.* In der Tat gehören alle diese Kreise der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ an, da sie durch Ketten von Spiegelungen (2) vom ersten Dreieck aus erreichbar sind. Es kann aber auch kein weiterer Symmetriekreis hinzukommen; denn wäre irgendeines der Dreiecke des fraglichen Netzes von einem weiteren Kreise der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ durchzogen, so würde auch das erste Dreieck von einem bezüglich der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ äquivalenten Kreise durchzogen.

Homologe Punkte in den Dreiecken des fraglichen Netzes, d. h. solche Punkte, die aus einem unter ihnen durch irgendeine Kette von Spiegelungen (2) hervorgehen, erweisen sich bezüglich der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ als äquivalent. Für jeden bestimmten im Innern der ω-Halbebene gewählten Punkt gibt es demnach sicher mindestens einen bezüglich der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ äquivalenten Punkt im „Ausgangsdreieck" des Netzes, d. h. im Dreieck der Spitzen $\omega = 0, -1, i\infty$. Andrerseits können keine zwei verschiedene Punkte dieses Dreiecks bezüglich der $\bar{\Gamma}^{(\omega)}_{(2)}$ äquivalent sein. Zwar sind bezüglich der Gesamtgruppe $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ die Punkte des Dreiecks immer zu sechs äquivalent, indem

$i\infty$

$\omega = -1$ $\omega = 0$

Fig. 79.

sie entsprechend der in Fig. 79 ausgeführten Unterteilung des Dreiecks in sechs Elementardreiecke der $\Gamma^{(\omega)}$ aus einem unter ihnen, ω, durch die sechs Substitutionen:

$$(3)\qquad \begin{cases} V_0(\omega) = \omega, \; V_1(\omega) = -\omega - 1, \; V_2(\omega) = \dfrac{\omega + 1}{-\omega}, \\ V_3(\omega) = \dfrac{-\omega}{\omega + 1}, \; V_4(\omega) = \dfrac{-1}{\omega + 1}, \; V_5(\omega) = \dfrac{1}{\omega} \end{cases}$$

hervorgehen. Keine einzige dieser Substitutionen gehört aber der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ an, so daß in der Tat keine zwei bezüglich dieser Untergruppe äquivalente, voneinander verschiedene Punkte im Dreieck der Ecken $\omega = 0$, -1, $i\infty$ auffindbar sind. *Das Kreisbogendreieck der Winkel* 0 *mit den Ecken* $\omega = 0$, -1, $i\infty$ *ist demnach ein Diskontinuitätsbereich der erweiterten Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe* $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$, *und diese Gruppe ist also erzeugbar durch die drei unter* (2) *angegebenen Spiegelungen* $\overline{S}', \overline{T}', \overline{U}$.

Der Rückgang zur Gesamtgruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ wird dadurch vollzogen, daß wir jedes der Dreiecke des eben besprochenen Netzes durch seine drei „Höhen" (vgl. Fig. 59, S. 288) in sechs Dreiecke der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ zerlegen. Irgendein Dreieck des zur $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ gehörenden Netzes ist mit einem bestimmten unter den sechs Dreiecken der Fig. 79 bezüglich $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$ äquivalent. Zu diesem Dreiecke aber gelangen wir vom Diskontinuitätsbereiche der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, d. h. vom Elementardreiecke der Ecken $\omega = i, \varrho, i\infty$ durch eine bestimmte unter den sechs Substitutionen (3). Wir erschöpfen demnach die $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ gerade einmal und vollständig, wenn wir jede der sechs Substitutionen (3) mit den gesamten Substitutionen der Untergruppe $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$ kombinieren:

$$(4)\qquad \overline{\Gamma}^{(\omega)} = \overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)} + \overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)} V_1 + \overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)} V_2 + \cdots + \overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)} V_5;$$

hier im ersten Gliede der rechten Seite für $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)} V_0$ gleich wieder $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$ geschrieben. Die Substitutionen der Gesamtgruppe ordnen sich auf diese Weise den sechs Gliedern der Gleichung entsprechend in sechs Systeme an, von denen keine zwei eine Substitution gemeinsam haben; das erste System umfaßt die Untergruppe $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$, jedes folgende System entsteht aus dem ersten durch Kombinierung mit einer der Substitutionen (3). *Wir drücken dies dahin aus, daß wir die* $\overline{\Gamma}_{(2)}^{(\omega)}$ *eine Untergruppe „des Index 6" in der Gesamtgruppe nennen, und bezeichnen sie dieserhalb weiterhin durch* $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)}$.

Um den Übergang zur ursprünglichen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ zu gewinnen, lagern wir neben den in Fig. 80 schraffierten Diskontinuitätsbereich der $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)}$ sein in der Figur freigelassenes Spiegelbild bezüglich der imaginären ω-Achse. Zu einem beliebig im Innern

der Halbebene gewählten Punkte ω gibt es dann im Bereiche der Fig. 80 stets zwei und nur zwei bezüglich der $\ddot{\Gamma}_6^{(\omega)}$ äquivalente Punkte ω' und $\omega'' = \overline{U}(\omega')$. Von den beiden diese Äquivalenzen vermittelnden Substitutionen entsteht die eine aus der anderen durch Zusatz von $\overline{U}$, so daß eine von der ersten und die andere von der zweiten Art ist. Die erste unter ihnen gehört bereits der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ an; wir erkennen hieraus: *Der aus zwei Dreiecken der Winkel* 0 *zusammengesetzte Bereich der Fig. 80 ist ein Diskontinuitätsbereich der ursprünglichen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe* $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$.

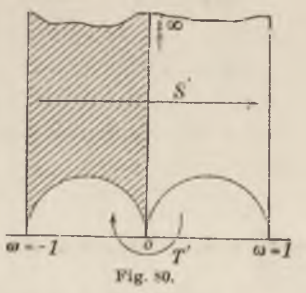


Fig. 80.

Auch die Herstellung der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ aus erzeugenden Substitutionen ist von der $\ddot{\Gamma}_6^{(\omega)}$ aus sofort verständlich. Eine Substitution *erster* Art der $\ddot{\Gamma}_6^{(\omega)}$ stellt sich symbolisch als Produkt von Spiegelungen (2) mit einer *geraden* Faktorenanzahl dar. Dabei brauchen, da $\overline{U}^2 = 1$, $\overline{S}'^2 = 1$, $\overline{T}'^2 = 1$ gilt, keine zwei aufeinanderfolgende Faktoren einander gleich zu sein. Man kann demnach jede Substitution der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ symbolisch als Produkt der drei Substitutionen:

$$S' = \overline{U}\,\overline{T}', \quad T' = \overline{S}'\overline{U}, \quad U' = \overline{T}'\overline{S}'$$

und ihrer inversen Substitutionen:

$$S'^{-1} = \overline{T}'\overline{U}, \quad T'^{-1} = \overline{U}\,\overline{S}', \quad U'^{-1} = \overline{S}'\overline{T}'$$

schreiben. Die letzten drei Substitutionen gelten mit S', T', U' zugleich als gegeben; zwischen den drei ersten besteht die Relation:

$$U'T'S' = \overline{T}' \cdot (\overline{S}')^2 \cdot (\overline{U})^2 \cdot \overline{T}' = 1,$$

so daß sich U' in der Gestalt $S'^{-1}T'^{-1}$ durch S' und T' ausdrückt. So bleiben schließlich nur S' und T': *Die ursprüngliche Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe* $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ *läßt sich aus den beiden Substitutionen*:

$$(5) \qquad S'(\omega) = \omega + 2, \quad T'(\omega) = \frac{\omega}{-2\omega + 1}$$

erzeugen. Die erste führt den linken geraden Rand des in Fig. 80 gezeichneten Diskontinuitätsbereiches in den rechten über, was in der Figur durch einen Pfeil angezeigt ist; die Substitution T' führt entsprechend den rechten halbkreisförmigen Rand des Bereiches in der linken über. Der fortgesetzten Kombination der Substitutionen S' und T' entspricht geometrisch die schrittweise zu vollziehende Bedeckung der ω-Halbebene mit Paaren von Kreisbogendreiecken der Winkel 0; die hier vorliegenden Verhältnisse sind ganz analog denen, die wir oben (S. 296 ff.) für die gesamte Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ ausführlich besprachen. Übrigens gilt:

$$S'^m(\omega) = \omega + 2m, \quad T'^m(\omega) = \frac{-1}{2m - \frac{1}{\omega}}.$$

Schreiben wir aber irgendeine Substitution der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ in der Gestalt:

$$\omega' = S'^{m_1} T'^{m_2} S'^{m_3} T'^{m_4} \cdots T'^{m_{2\nu}}(\omega),$$

so haben hierbei die Exponenten m irgendwelche ganzen Zahlen zu bedeuten, die wir übrigens, von der ersten und letzten abgesehen, stets als von 0 verschieden voraussetzen dürfen. Bei der angegebenen Gestalt der Potenzen S'^m, T'^m gelangen wir somit zu einer Kettenbruchentwicklung der Substitutionen der $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$:

$$\omega' = 2m_1 - \cfrac{1}{2m_2 - \cfrac{1}{2m_3 - \cdots - \cfrac{1}{2m_{2\nu} - \cfrac{1}{\omega}}}},$$

welche sich der S. 298 aufgestellten Kettenbruchentwicklung der Substitutionen der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ anschließt.

Da die Spiegelung $\overline{U}$ in der $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)}$ enthalten ist, so wird das Substitutionssystem $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)} \cdot \overline{U}$ wieder mit $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)}$ identisch sein. Es gilt somit auch:

$$\overline{\Gamma}_6^{(\omega)} \overline{V} = \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} \overline{U} \overline{V} = \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} \cdot (\overline{U} \overline{V}).$$

Setzen wir demnach die aus der zweiten, vierten und sechsten Substitution (3) hervorgehenden Substitutionen $\overline{U}\overline{V}_k = V_k$, so können wir die Gleichung (4) in die Gestalt kleiden:

$$\overline{\Gamma}^{(\omega)} = \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} + \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} V_1 + \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} V_2 + \cdots + \overline{\Gamma}_6^{(\omega)} V_5,$$

wobei also an Stelle des Systemes (3) die sechs Substitutionen *erster* Art treten:

$$(6) \quad \begin{cases} V_0(\omega) = \omega, \;\; V_1(\omega) = \omega + 1, \;\; V_2(\omega) = \dfrac{\omega + 1}{-\omega}, \\ V_3(\omega) = \dfrac{\omega}{\omega + 1}, \;\; V_4(\omega) = \dfrac{-1}{\omega + 1}, \;\; V_5(\omega) = \dfrac{-1}{\omega}. \end{cases}$$

Im einzelnen Systeme $\overline{\Gamma}_6^{(\omega)} V_k$ sind die Substitutionen erster Art durch das Symbol $\Gamma_{(2)}^{(\omega)} V_k$ zu bezeichnen. Für die ursprüngliche Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ ergibt sich damit die Darstellung:

$$(7) \qquad \Gamma^{(\omega)} = \Gamma_{(2)}^{(\omega)} + \Gamma_{(2)}^{(\omega)} V_1 + \Gamma_{(2)}^{(\omega)} V_2 + \cdots + \Gamma_{(2)}^{(\omega)} V_5,$$

wobei wieder die gesamten Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ in sechs Systeme angeordnet sind, von denen entsprechende Aussagen gelten, wie von den in (4) rechts stehenden sechs Systemen. *Die $\Gamma_{(2)}^{(\omega)}$ heiße demnach wieder eine Untergruppe „vom Index 6" innerhalb der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ und werde fortan durch $\Gamma_6^{(\omega)}$ bezeichnet.*

Wir nennen zwei Substitutionen V_i und V_k der gesamten Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ modulo 2 einander kongruent, falls die Koeffizienten derselben die Bedingungen erfüllen:

$$\alpha_i \equiv \alpha_k, \quad \beta_i \equiv \beta_k, \quad \gamma_i \equiv \gamma_k, \quad \delta_i \equiv \delta_k \pmod{2};$$

wir fassen dieselben kurz in die Kongruenz $V_i \equiv V_k$ (mod. 2) zusammen. Ist $V_i \equiv V_k$ und $V_l \equiv V_m$ (mod. 2), so lehren die Regeln (2) S. 127 der Zusammensetzung der Substitutionen, daß auch $V_i V_l \equiv V_k V_m$ gilt. Ist V mit der identischen Substitution $V_0 = 1$ kongruent, so gilt sowohl $V_k V \equiv V_k$ als auch $V V_k \equiv V_k$ für jede Substitution V_k der $\Gamma^{(\omega)}$. Insbesondere folgt $V_k V V_k^{-1} \equiv 1$, sobald $V \equiv 1$ (mod. 2) zutrifft. Nach der S. 128 erklärten Sprechweise heißt dies, daß eine Substitution V der Untergruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$ bei Transformation vermöge irgendeiner Substitution V_k von $\Gamma^{(\omega)}$ wieder eine Substitution $V' = V_k V V_k^{-1}$ der $\Gamma_6^{(\omega)}$ liefert. Da wir auch umgekehrt eine beliebige Substitution V' der $\Gamma_6^{(\omega)}$ nach diesem Gesetze aus der dieser Untergruppe angehörenden Substitution $V = V_k^{-1} V' V_k$ gewinnen, so geht die Untergruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$, wenn wir sie (wie dies S. 129 bei den endlichen Gruppen ausgeführt wurde) durch irgendeine Substitution V_k der Gesamtgruppe transformieren, hierbei *in sich selbst über:*

$$(8) \qquad V_k \Gamma_6^{(\omega)} V_k^{-1} = \Gamma_6^{(\omega)};$$

die Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe heißt dieserhalb eine „ausgezeichnete" Untergruppe der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$.

Die gesamten Substitutionen des Systems $\Gamma_6^{(\omega)} V_k$ sind untereinander und also mit V_k kongruent; demgegenüber sind die sechs Substitutionen (6), wie man sieht, modulo 2 durchweg inkongruent, so daß es, da die $\Gamma^{(\omega)}$ zufolge (7) durch die sechs Systeme $\Gamma_6^{(\omega)} V_k$ erschöpft wird, *im ganzen sechs modulo 2 inkongruente Substitutionen in der* $\Gamma^{(\omega)}$ *gibt.* Dies kann man auch leicht unmittelbar bestätigen, indem man die inkongruenten Lösungen der Kongruenz:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

in Quadrupeln ganzer Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ abzählt.

Sind $V, V', V'', \ldots$ Substitutionen der $\Gamma_6^{(\omega)}$, während V_k, V_l, V_m dem Systeme (6) angehören, so gilt mit Rücksicht auf (8):

$$V V_k \cdot V' V_l = V \cdot V_k V' V_k^{-1} \cdot V_k V_l = V V'' \cdot V_k V_l \equiv V''' \cdot V_m,$$

falls wir die mit $V_k V_l$ kongruente unter den Substitutionen (6) mit V_m bezeichnen. Wenn wir also irgend zwei Substitutionen der Systeme $\Gamma_6^{(\omega)} V_k$ und $\Gamma_6^{(\omega)} V_l$ miteinander kombinieren, so entsteht immer eine Substitution eines *bestimmten* dritten Systems $\Gamma_6^{(\omega)} V_m$. Wir können dies dahin ausdrücken, *daß die sechs Systeme* $\Gamma_6^{(\omega)} V_k$ *gegenüber Kombination eine Gruppe* G_6 *der endlichen Ordnung 6 bilden.* Die Sachlage läßt sich auch in der Weise auffassen, daß wir die mod. 2 kongruenten Substitutionen des einzelnen Systems $\Gamma_6^{(\omega)} V_k$ als nicht wesentlich verschieden

auffassen und durch eine unter ihnen, etwa V_k, repräsentieren. Für die sechs „Repräsentanten“ (6) gelten dann die Kongruenzen:

$$V_k V_l \equiv V_m \qquad (\text{mod. } 2),$$

und man kann das gewonnene Ergebnis auch so aussprechen: *Die gesamte Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ reduziert sich modulo 2 auf die sechs inkongruenten Substitutionen $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots, V_5$, welche gegenüber Kombination eine Gruppe G_6 der endlichen Ordnung 6 bilden.*

Da übrigens, wie schon am Anfang des Paragraphen benutzt wurde, die $\Gamma_6^{(\omega)}$ auch durch die Spiegelung $\overline{U}$ in sich transformiert wird, *so ist sie auch noch in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ als „ausgezeichnete“ Untergruppe enthalten*, und zwar in ihr als eine solche *vom Index 12* entsprechend der Zerlegung der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ in die 12 Systeme:

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(\omega)} = \Gamma_6^{(\omega)} + \Gamma_6^{(\omega)} V_1 + \Gamma_6^{(\omega)} V_2 + \cdots + \Gamma_6^{(\omega)} V_5 \\ + \Gamma_6^{(\omega)} \overline{U} + \Gamma_6^{(\omega)}(\overline{U}\, V_1) + \cdots + \Gamma_6^{(\omega)}(\overline{U}\, V_5).\end{aligned}$$

Übertragen wir die Kongruenzbetrachtungen auf die $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, so ergibt sich der Satz: *Die erweiterte Modulgruppe $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ reduziert sich modulo 2 auf zwölf inkongruente Substitutionen 1, $V_1, \ldots, V_5, \overline{U}, \overline{U}\, V_1, \ldots, \overline{U}\, V_5$, welche gegenüber Kombination eine Gruppe G_{12} der endlichen Ordnung 12 bilden.*

§ 2. Die elliptischen Modulfunktionen zweiter Stufe.

Für die Begriffsbestimmung der elliptischen Modulfunktionen zweiter Stufe sind die auf die erste Stufe bezüglichen Erklärungen von S. 299 ff. vorbildlich. Der Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_6^{(\omega)}$ ist in Fig. 81 in die zwölf Elementardreiecke der $\Gamma^{(\omega)}$ zerlegt, welche im Innern desselben gelegen sind. Trennen wir durch die von $\omega = \frac{1+i}{2}$ zur imaginären Achse parallel laufende Gerade die drei rechts gelegenen Elementardreiecke ab und üben auf dieselben die Substitution S'^{-1} aus, so ergibt sich der Bereich der Fig. 82, der offenbar gleichfalls als Diskontinuitätsbereich der $\Gamma_6^{(\omega)}$ brauchbar ist. Hier kommen dann für die Äquivalenz der Randpunkte zu Paaren alle drei S. 437 aufgestellten erzeugenden Substitutionen S', T', U' der $\Gamma_6^{(\omega)}$ gleichmäßig zur Geltung; durch S' wird die eine Randgerade in die andere übergeführt, durch T' der eine von $\omega = 0$

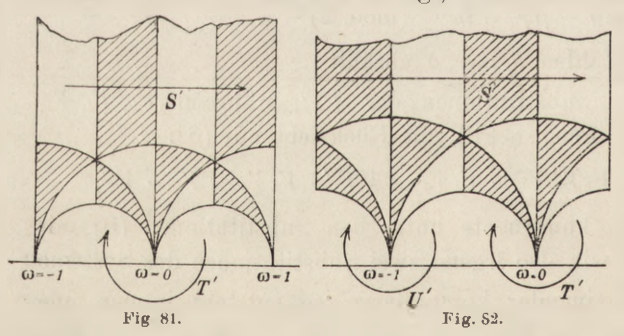


Fig. 81. Fig. 82.

auslaufende, den Bereich begrenzende Kreisquadrant in den anderen und endlich durch U' der eine von $\omega = -1$ ausziehende Quadrant in den zweiten. An dieser Figur mache man sich deutlich, daß die drei Zipfel, mit denen der Bereich an die Punkte $\omega = i\infty$, $\omega = 0$ und $\omega = -1$ heranragt, vermittelst der Exponentialfunktionen:

$$q = e^{\pi i \omega}, \quad q' = e^{-\frac{\pi i}{\omega}}, \quad q'' = e^{-\frac{\pi i}{\omega + 1}}$$

je auf die schlichte und vollständig bedeckte Umgebung des Nullpunktes der Ebene von q, q' und q'' abgebildet werden, wobei dann jedesmal die äquivalenten Randpunkte im Abbilde zur Deckung kommen.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Als eine elliptische Modulfunktion zweiter Stufe bezeichnen wir jede analytische Funktion von ω, welche die (aus ihren gesamten Innenpunkten bestehende) positive ω-Halbebene zum Felde hat, gegenüber den Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_6^{(\omega)}$ invariant ist und sich bei Annäherung an die drei Spitzen des Diskontinuitätsbereiches als eine Funktion der betreffenden Variabeln q erweist, die im Nullpunkte $q = 0$ analytisch ist oder einen Pol endlicher Ordnung aufweist.*

Eine erste diesen Bedingungen genügende Funktion haben wir in der Modulfunktion erster Stufe $J(\omega)$ vor uns, deren Werteverteilung im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma_6^{(\omega)}$ durch eine der beiden letzten Figuren klargelegt ist. Jedes der sechs schraffierten Dreiecke ist ein volles Abbild der positiven J-Halbebene, jedes freie ein solches der negativen J-Halbebene (vgl. S. 303). Irgendeinen vorgeschriebenen komplexen Wert nimmt demnach die Funktion $J(\omega)$ stets an sechs Stellen des Diskontinuitätsbereiches an (wobei man natürlich zwei äquivalente Randpunkte nur als einen Punkt zu zählen hat). Diese sechs Punkte ω liegen im allgemeinen voneinander getrennt; doch kommen folgende Ausnahmen vor: Die sechs Punkte mit $J = 0$ fallen zu je drei an den beiden Stellen $\omega = \varrho$ und $\omega = -\varrho^2$ zusammen, desgleichen fallen die sechs Punkte mit $J = 1$ an den drei Stellen $\omega = i$, $\omega = -1 + i\ (= 1 + i)$ und $\omega = \frac{-1+i}{2}$ $\left(= \frac{1+i}{2}\right)$ zu Paaren zusammen, und endlich fallen gleichfalls zu Paaren die sechs Pole in die Spitzen des Diskontinuitätsbereiches.

Dem entspricht es, daß ein einfacher Umlauf z. B. um den Punkt $\omega = \varrho$ in der ω-Halbebene (der ja die sechs hier heranragenden Dreiecke der Fig. 81 durchläuft) sich auf einen dreifachen Umlauf um $J = 0$ in der J-Ebene abbildet. Die Umgebung von $\omega = \varrho$ liefert, wie wir dies ja bereits S. 303 ausführlich erörterten, eine dreiblättrige Windungsfläche (vgl. S. 28) mit dem Verzweigungspunkte $J = 0$. Das durch die Funktion $J(\omega)$ gelieferte Abbild des ganzen Diskontinuitätsbereiches der $\Gamma_6^{(\omega)}$

über der J-Ebene ist daraufhin leicht zu übersehen. Indem wir je zwei äquivalente Randpunkte des Bereiches im Abbilde verschmelzen, gewinnen wir offenbar eine sechsblättrige geschlossene Riemannsche Fläche $\mathbf{F}_6$ über der J-Ebene, deren Verzweigungspunkte den Ecken der Elementardreiecke im Bereiche der Fig. 81 entsprechen. Es liegen somit bei $J = 0$ zwei dreiblättrige Verzweigungspunkte übereinander, desgleichen bei $J = 1$ und bei $J = \infty$ je drei zweiblättrige Verzweigungspunkte.

Hiernach hat die $\mathbf{F}_6$ zufolge der Regel (4) S. 88 das Geschlecht $p = 0$, d. h. sie stellt eine *einfach* zusammenhängende geschlossene Fläche dar; sehen wir in Fig. 81 äquivalente Randpunkte als identisch an, so kommt diese Tatsache des einfachen Zusammenhangs an der Gestalt dieses Bereiches unmittelbar zur Anschauung. Dies Ergebnis wird für die Darstellung der gesamten Modulfunktionen zweiter Stufe grundlegend. Die Wege der ω-Halbebene zwischen Punkten, die bezüglich der $\Gamma_6^{(\omega)}$ äquivalent sind, übertragen sich auf geschlossene Wege der $\mathbf{F}_6$[1]): Die Modulfunktionen zweiter Stufe liefern, als Funktionen von J aufgefaßt, gerade die gesamten algebraischen Funktionen der Riemannschen Fläche $\mathbf{F}_6$ des Geschlechtes $p = 0$.

Der Körper der algebraischen Funktionen einer solchen Fläche gestaltet sich aber sehr einfach: Es existieren *einwertige* Funktionen auf der Fläche; ist z eine solche, so wird der Funktionenkörper gerade von den gesamten rationalen Funktionen $R(z)$ geliefert (vgl. S. 94). Zugleich ist mit z jede lineare Funktion nicht-verschwindender Determinante von z wieder einwertig, und wir erschöpfen durch diese linearen Funktionen von z alle einwertigen Funktionen der Fläche. Eine einzelne dieser Funktionen können wir dadurch festlegen, daß wir drei Werte der Funktion, z. B. die Werte $z = 0, 1, \infty$ als an irgend drei verschiedenen Stellen der $\mathbf{F}_6$ zutreffend vorschreiben.

Hiervon wollen wir jetzt in der Weise Gebrauch machen, daß wir diejenige einwertige Funktion z bevorzugen, welche in den drei den Zipfeln $\omega = i\infty$, 0 und -1 des Diskontinuitätsbereiches entsprechenden Punkten der $\mathbf{F}_6$ die Werte 0, 1 und ∞ annimmt. In Abhängigkeit von ω nennen wir diese Modulfunktion zweiter Stufe $\lambda(\omega)$, so daß also ihre Definition unter den gesamten einwertigen Funktionen durch:

$$(1) \qquad \lambda(i\infty) = 0, \qquad \lambda(0) = 1, \qquad \lambda(-1) = \infty$$

gegeben ist. *Die gesamten elliptischen Modulfunktionen zweiter Stufe werden dann gerade geliefert durch den Körper der rationalen Funktionen $R(\lambda(\omega))$ von $\lambda(\omega)$.*

Es ist nun leicht zu erkennen, daß wir in $\lambda(\omega)$ das früher mit λ

1) S. die entsprechenden Betrachtungen für die erste Stufe S. 303 ff.

bezeichnete „Doppelverhältnis" und damit den Legendreschen Integralmodul k^2, in Abhängigkeit von ω betrachtet, wiedergewonnen haben. Um dies zu zeigen, ziehen wir zunächst einige Folgerungen aus dem Umstande, daß die $\Gamma_6^{(\omega)}$ in der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ sowie auch in der erweiterten $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ als „ausgezeichnete" Untergruppe enthalten ist.

Ist V irgendeine Substitution der $\Gamma^{(\omega)}$, so ist $\lambda(V(\omega))$ eine Funktion von ω, die gegenüber den Substitutionen der Gruppe $V^{-1}\Gamma_6^{(\omega)}V$ invariant ist. Aber diese Gruppe ist mit $\Gamma_6^{(\omega)}$ identisch (S. 439), so daß $\lambda(V(\omega))$ wieder eine Modulfunktion zweiter Stufe ist. Bildet man entsprechend $\lambda(\overline{V}(\omega))$ mit irgendeiner Substitution zweiter Art $\overline{V}$ der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$, so hat man zu berücksichtigen, daß durch $\overline{V}$ eine konforme Abbildung „mit Umlegung der Winkel" (indirekte Kreisverwandtschaft, vgl. S. 73ff.) dargestellt wird. Ist demnach $\overline{\lambda}(\overline{V}(\omega))$ der zu $\lambda(\overline{V}(\omega))$ konjugiert komplexe Wert, so wird erst $\overline{\lambda}(\overline{V}(\omega))$ wieder eine Modulfunktion zweiter Stufe sein. Wir gehen nun insbesondere auf die drei erzeugenden Spiegelungen:

$$\overline{S}(\omega) = \frac{1}{\overline{\omega}}, \qquad \overline{T}(\omega) = -\overline{\omega} - 1, \qquad \overline{U}(\omega) = -\overline{\omega}$$

der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ zurück (vgl. S. 296). Jede dieser Spiegelungen stellt eine umkehrbar eindeutige Transformation des Diskontinuitätsbereiches der $\Gamma_6^{(\omega)}$ dar, wie dies für $\overline{S}$ und $\overline{U}$ unmittelbar aus Fig. 81, für $\overline{T}$ aber ebenso aus Fig. 82 hervorgeht. Demnach wird, wenn $\overline{V}$ eine beliebige jener drei Spiegelungen ist, $\overline{\lambda}(\overline{V}(\omega))$ wieder eine „einwertige" Modulfunktion zweiter Stufe und also $\lambda(\overline{V}(\omega))$ eine lineare Funktion von $\overline{\lambda}(\omega)$ sein, unter $\overline{\lambda}(\omega)$ den zu $\lambda(\omega)$ konjugiert komplexen Wert verstanden:

$$\lambda(\overline{V}(\omega)) = \frac{a\overline{\lambda}(\omega) + b}{c\overline{\lambda}(\omega) + d}.$$

Es ist nun sehr leicht, auf Grund der Bestimmungen (1) die explizite Gestalt dieser drei linearen Funktionen von $\lambda(\omega)$ festzustellen. Da nämlich z. B. durch $\overline{S}$ die Spitzen $i\infty$ und 0 des Bereiches der Fig. 81 ausgetauscht werden, während der Punkt $\omega = -1$ in sich transformiert wird, so entsprechen den drei Werten $\overline{\lambda}(\omega) = 0, 1, \infty$ die drei Werte $\lambda(\overline{V}(\omega)) = 1, 0, \infty$, woraus sich sofort ergibt $d = b$, $b = -a$, $c = 0$. Indem man die Betrachtung auf $\overline{T}$ und $\overline{U}$ ausdehnt, findet man folgende Wirkung dieser drei Spiegelungen auf $\lambda(\omega)$:

$$(2) \quad \lambda\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right) = -\overline{\lambda}(\omega) + 1, \quad \lambda(-\overline{\omega} - 1) = \frac{\overline{\lambda}(\omega)}{\overline{\lambda}(\omega) - 1}, \quad \lambda(-\overline{\omega}) = \overline{\lambda}(\omega).$$

Nun lassen sich aber alle Substitutionen der $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ aus $\overline{S}, \overline{T}, \overline{U}$ erzeugen. Wir gelangen hierbei, da modulo 2 kongruente Substitutionen auf $\lambda(\omega)$ die gleiche Wirkung ausüben, im ganzen zu zwölf verschie-

denen linearen Substitutionen von λ, von denen sechs der ersten und sechs der zweiten Art angehören. Für die unter (6) S. 438 angegebenen sechs Substitutionen erster Art finden wir:

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda(V_0(\omega)) = \lambda(\omega), & \lambda(V_1(\omega)) = \frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega)-1}, & \lambda(V_2(\omega)) = \frac{\lambda(\omega)-1}{\lambda(\omega)}, \\ \lambda(V_3(\omega)) = \frac{1}{\lambda(\omega)}, & \lambda(V_4(\omega)) = \frac{1}{1-\lambda(\omega)}, & \lambda(V_5(\omega)) = 1-\lambda(\omega). \end{cases}$$

In gekürzter Gestalt schreiben wir die sechs so gewonnenen λ-Substitutionen:

$$(4)\quad \lambda' = \lambda,\ \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \lambda' = \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \lambda' = \frac{1}{\lambda},\ \lambda' = \frac{1}{1-\lambda},\ \lambda' = 1-\lambda.$$

Sie liefern eine neue Darstellung der Gruppe G_6, auf die sich die $\Gamma^{(\omega)}$ modulo 2 reduziert; im übrigen sind wir zurückgeführt zur Diëdergruppe G_6, welche wir genau in dieser Gestalt bereits S. 347 gewonnen hatten und damals an die allgemeinen gruppentheoretischen Entwicklungen von S. 128 ff. anschlossen. Wir gelangen noch unmittelbarer zu den letzteren Entwicklungen zurück, wenn wir auch die Wirkung der Substitutionen zweiter Art, von denen wir drei bereits unter (2) erledigten, allgemein feststellen. Wir haben zu diesem Zwecke einfach die sechs Substitutionen (4) mit der dritten unter (2) gegebenen Substitution $\lambda' = \bar{\lambda}$ zu kombinieren, was die sechs λ-Substitutionen zweiter Art ergibt:

$$(5)\quad \lambda' = \bar{\lambda},\ \lambda' = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1},\ \lambda' = \frac{\bar{\lambda}-1}{\bar{\lambda}},\ \lambda' = \frac{1}{\bar{\lambda}},\ \lambda' = \frac{1}{1-\bar{\lambda}},\ \lambda' = 1-\bar{\lambda}.$$

Diese bilden zusammen mit den Substitutionen (4) *eine „durch Spiegelungen erweiterte“ Diëdergruppe* $\bar{G}_{12}$, welche uns in neuer Gestalt die G_{12} liefert, auf die sich die $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ modulo 2 reduziert.

Die Substitutionen (5) sind, abgesehen von der dritten und fünften, durchweg Spiegelungen; ihre Symmetriekreise sind, falls wir $\lambda = x + iy$ setzen, gegeben durch:

$$y = 0,\quad x^2 + y^2 - 2x = 0,\quad x^2 + y^2 = 1,\quad 2x = 1,$$

Zeichnen wir diese vier Kreise in der λ-Ebene, was in Fig. 83 geschehen ist, so entsteht eine Einteilung dieser Ebene in zwölf Kreisbogendreiecke, welche den zwölf Dreiecken der Fig. 81 entsprechen. *Hier haben wir die Abbildung des Diskontinuitätsbereiches der $\bar{\Gamma}_6^{(\omega)}$ auf die schlicht und vollständig bedeckte λ-Ebene vor uns.* Zugleich haben wir diejenige Figur wiedergewonnen, an welche wir S. 348 ff. die geometrischen Entwicklungen über die Diëdergruppe anknüpften.

Die Modulfunktion $J(\omega)$ als sechswertige Funktion auf der oben betrachteten $\mathbf{F}_6$ ist eine rationale Funktion sechsten Grades von λ. Die sechs schraffierten Dreiecke der Fig. 83 sind Bilder der positiven J-Halb-

ebene, die sechs freien Dreiecke Abbilder der negativen Halbebene. Die sechs Punkte λ, in denen J verschwindet, fallen zu je dreien an den beiden Stellen $\lambda = -\varrho$ und $\lambda = -\varrho^2$ zusammen; die sechs Punkte mit $J = 1$ fallen zu Paaren an die drei Stellen $\lambda = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 2$, endlich die sechs Punkte mit $J = \infty$ zu Paaren an die drei Stellen

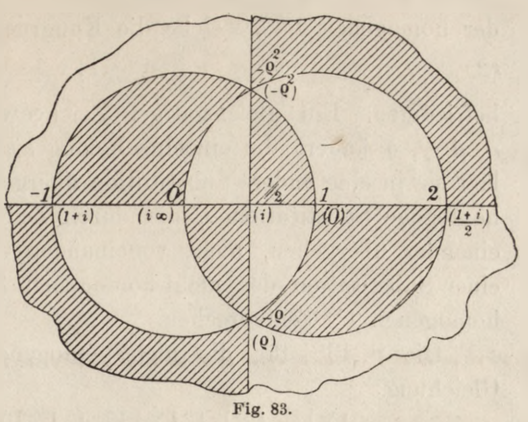


Fig. 83.

$\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und $\lambda = \infty$. Für die Bestimmung von J als rationale Funktion sechsten Grades von λ gilt somit der Ansatz:

$$J = c\,\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}, \quad J - 1 = c'\,\frac{(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Die Konstanten c und c' kann man durch die Forderung bestimmen, daß die durch Subtraktion der beiden vorstehenden Gleichungen sich ergebende Gleichung:

$$c(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 - c'(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 = \lambda^2(1-\lambda)^2$$

in λ identisch bestehen muß. Setzt man $\lambda = 0$ und hernach $\lambda = -1$ ein, so folgt:

$$c - 4c' = 0, \qquad 27c = 4,$$

woraus $c = \frac{4}{27}$, $c' = \frac{1}{27}$ folgt. Man kann demnach J als rationale Funktion von λ durch die Proportion darstellen:

(6) $J : (J-1) : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2.$

Damit haben wir die Gleichung (3) S. 347 zwischen der absoluten rationalen Invariante J und dem Doppelverhältnis λ endgültig wiedergewonnen und können den Satz aufstellen: *Die Modulfunktion zweiter Stufe $\lambda(\omega)$, in der alle Funktionen dieser Stufe rational darstellbar sind, ist identisch mit dem Doppelverhältnis λ und also dem Legendreschen Integralmodul k^2, aufgefaßt als eindeutige Funktionen des Periodenquotienten ω.*

§ 3. Die elliptischen Modulformen zweiter Stufe.

Für die Begriffsbestimmung einer Modulform der zweiten Stufe sind die auf die erste Stufe bezüglichen Erklärungen von S. 305 vorbildlich. Wir haben zunächst von der bisher betrachteten nicht-homogenen Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$ zur „homogenen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe“ überzugehen, die wir wieder durch $\Gamma_6^{(\omega)}$ bezeichnen; sie besteht nach S. 375 aus den gesamten Substitutionen:

(1) $$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$, welche die Kongruenzen:

(2) $$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$$

befriedigen. Ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der vier Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ändert die einzelne homogene Substitution wesentlich, d. h. läßt sie in eine andere Substitution übergehen. Dagegen sind zwei nicht-homogene Substitutionen, die durch Zeichenwechsel der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ineinander übergehen, nicht voneinander verschieden, so daß allgemein einer Substitution der nicht-homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ zwei verschiedene in der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ entsprechen.

Die S. 438 für die nicht-homogenen Substitutionen aufgestellte Gleichung:

$$\Gamma^{(\omega)} = \Gamma_6^{(\omega)} + \Gamma_6^{(\omega)} V_1 + \Gamma_6^{(\omega)} V_2 + \cdots + \Gamma_6^{(\omega)} V_5$$

überträgt sich unverändert auf die homogenen Gruppen $\Gamma^{(\omega)}$ und $\Gamma_6^{(\omega)}$, und zwar deshalb, weil mit der einzelnen in der $\Gamma_6^{(\omega)}$ enthaltenen Substitution (1) stets auch:

(3) $$\omega_1' = -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2, \quad \omega_2' = -\gamma\omega_1 - \delta\omega_2$$

dieser Gruppe angehört.[1]) *Die homogene Kongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_6^{(\omega)}$ ist also wieder eine Untergruppe des Index* 6, *und zwar, wie man leicht feststellt, eine „ausgezeichnete" Untergruppe in der homogenen Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$.*

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Als eine elliptische Modulform zweiter Stufe bezeichnen wir jede homogene Funktion ganzzahliger Dimensionen d der ω_1, ω_2, die, mit ω_2^{-d} multipliziert, als eine analytische Funktion von ω die positive ω-Halbebene zum Felde hat, die gegenüber den Substitutionen der homogenen Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe invariant ist, und die in den drei Spitzen des Diskontinuitätsbereiches mit ω_2^{-d} bzw. ω_1^{-d} und $(\omega_1 + \omega_2)^{-d}$ multipliziert, als Funktion von q bzw. q′ und q″* (vgl. S. 441) *analytisch bleibt oder einen Pol endlicher Ordnung besitzt.*

1) Bei den Hauptkongruenzgruppen n^{ter} Stufe $\Gamma_{(n)}^{(\omega)}$ mit $n > 2$ gestalten sich die Verhältnisse anders: genügt die Substitution (1) den Kongruenzen:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

so wird nun die Substitution (3) diese Bedingungen eben nicht mehr befriedigen, so daß sie in der „homogenen" Hauptkongruenzgruppe nicht enthalten ist. Die nicht-homogene Gruppe $\Gamma_{(n)}^{(\omega)}$ spaltet sich demnach bei Fortgang zu den homogenen Substitutionen in zwei Systeme von Substitutionen, von denen das eine die homogene $\Gamma_{(n)}^{(\omega)}$ ist und das andere aus dieser letzten Gruppe durch Zusatz der Substitution $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$ entsteht. Der Index der homogenen $\Gamma_{(n)}^{(\omega)}$ als Untergruppe in der Gesamtgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ ist demnach für $n > 2$ doppelt so groß als der Index der nicht-homogenen $\Gamma_{(n)}^{(\omega)}$.

Zu diesen Modulformen gehören natürlich auch die ganzen Modulformen erster Stufe der Dimensionen -4, -6 und -12:

$$g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(\omega_1, \omega_2) \quad \Delta(\omega_1, \omega_2),$$

deren Heranziehung uns zu einem wichtigen Satze über die Anzahl der Nullpunkte und Pole irgendeiner Form zweiter Stufe im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma_6^{(\omega)}$ hinführen wird und uns zugleich eine Darstellungsart aller Modulformen zweiter Stufe liefert. Nach den Entwicklungen von S. 306 ff. hat g_2 je einen Nullpunkt erster Ordnung an den beiden Stellen $\omega = \varrho$ und $\omega = -\varrho^2$ des Diskontinuitätsbereiches oder, wie wir auch sagen können, an den Stellen $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; desgleichen hat g_3 je einen Nullpunkt erster Ordnung an den drei Stellen $\lambda = -1$, $\frac{1}{2}$, 2, und endlich hat Δ je einen Nullpunkt zweiter Ordnung in den drei Bereichspitzen, d. h. bei $\lambda = 0$, 1 und ∞.

Da jede Modulform zweiter Stufe gegenüber der Substitution:

$$\omega_1' = -\omega_1, \quad \omega_2' = -\omega_2$$

invariant ist, so muß ihre Dimension d notwendig eine *gerade* Zahl sein. Setzen wir demnach $d = 2\nu$ und nennen eine beliebig vorgelegte Form dieser Dimension $\psi_{2\nu}(\omega_1, \omega_2)$, so liefert das Produkt:

$$\psi_{2\nu}(\omega_1, \omega_2) \cdot \left(\frac{\Delta}{g_2 g_3}\right)^\nu$$

eine Form nullter Dimension und also eine Modul*funktion* zweiter Stufe, die als solche rational in λ darstellbar ist: *Die Modulformen zweiter Stufe sind darstellbar in der Gestalt:*

$$\psi_{2\nu}(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{g_2 g_3}{\Delta}\right)^\nu \cdot R(\lambda), \tag{4}$$

woraus wir ablesen, daß die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte vermindert um die Summe der Ordnungen aller Pole im Diskontinuitätsbereiche der $\Gamma_6^{(\omega)}$ gleich $-\nu$ ist.

Als ein wichtiges Beispiel einer Modulform zweiter Stufe $(-6)^{\text{ter}}$ Dimension leiten wir aus den Gleichungen (16) S. 124 und (6) S. 445 ab:

$$\sqrt{\Delta} = 27 g_3 \frac{\lambda(1-\lambda)}{2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2};$$

da diese Form polfrei ist, so hat sie drei Nullpunkte im Diskontinuitätsbereiche, die in den drei Spitzen desselben liegen.

Der S. 316 eingeführte Differentiationsprozeß D_η war gegenüber allen Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ invariant. Da indessen $\lambda(\omega)$ nur gegenüber den Substitutionen der $\Gamma_6^{(\omega)}$ unveränderlich ist, so wird die Anwendung von D_η auf λ nur erst eine Modulform zweiter Stufe, und zwar der Dimensionen -2 liefern:

$$D_\eta(\lambda) = \frac{d\lambda}{d\omega} D_\eta(\omega) = -\frac{2i\pi}{\omega_2^2}\frac{d\lambda}{d\omega} = 2i\pi \frac{d\lambda}{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1}.$$

Da die Umgebung jedes inneren Punktes der ω-Halbebene sich konform auf die Umgebung eines endlichen Punktes der λ-Ebene abbildet, so kann $D_\eta(\lambda)$ zufolge der rechten Seite der letzten Gleichung nur in den Spitzen des Diskontinuitätsbereiches verschwinden oder unendlich werden. Die Darstellungen von λ nach Potenzen der S. 441 genannten Größen q, q', q'' zeigen, daß in den Spitzen $i\infty$ und 0 des Diskontinuitätsbereiches je Nullpunkte erster Ordnung, in der dritten bei $\omega = -1$ gelegenen Spitze ein Pol erster Ordnung eintreten. Demnach ist:

$$\frac{1}{\lambda} D_\eta(\lambda) = D_\eta(\log \lambda)$$

eine ganze, d. h. polfreie Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, deren einer Nullpunkt erster Ordnung in der Spitze $\omega = 0$ gelegen ist. Von hieraus gewinnen wir durch Ausübung der Substitutionen T und S auf ω in:

$$-D_\eta\left(\log \lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right) = -D_\eta(\log(1-\lambda(\omega))) = D_\eta\left(\log\frac{1}{1-\lambda}\right)$$
$$D_\eta(\log \lambda(\omega+1)) = \quad D_\eta\left(\log\left(\frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega)-1}\right)\right) = D_\eta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$$

zwei ganze Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, deren Nullpunkte in den Spitzen $i\infty$ bzw. -1 liegen.

In anderer Gestalt sind uns diese drei Formen seit lange bekannt. Man beachte, daß der Quotient von $\sqrt{\Delta}$ und $\lambda(1-\lambda)$ eine ganze Form $(-6)^{\text{ter}}$ Dimension liefert, die einen einzigen Nullpunkt dritter Ordnung in der Spitze $\omega = -1$ hat. Nach den S. 346 ff. mitgeteilten Gleichungen gilt aber in den damaligen Bezeichnungen:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda(1-\lambda)} = \pm 4 M^3 = \pm 4(e^{(1)} - e^{(3)})^3 = \pm 4(e_1 - e_2)^3.$$

Auch noch die Kubikwurzel dieses Ausdrucks ist zufolge der Darstellung durch die $\wp$-Funktion:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda(1-\lambda)}} = \sqrt[3]{\pm 4}\,(e_1 - e_2) = \sqrt[3]{\pm 4}\left(\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)$$

eine ganze Modulform *zweiter* Stufe der Dimension -2, die ihren Nullpunkt erster Ordnung in der Spitze $\omega = -1$ hat. Der Quotient derselben und der Form $D_\eta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$ ist demnach eine polfreie *Funktion* zweiter Stufe und als solche mit einer Konstanten identisch:

$$D_\eta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = c(e_2 - e_1).$$

Zur Bestimmung der Konstanten c spezialisiere man diese Gleichung für die Umgebung der Spitze $\omega = i\infty$, wo $\lambda = 16q$ gilt und $(e_2 - e_1)$ zufolge (12) S. 416 gleich $\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2$ wird; wir finden:

$$D_\eta(\log(-16q)) \cong D_\eta(\log q) = \pi i D_\eta(\omega) = 2\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 = c\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2,$$

so daß $c = 2$ ist. *Durch Heranziehung der Substitutionen S und T gelangen wir schließlich zu folgenden drei Beziehungen:*

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} D_\eta\left(\log \frac{\lambda}{\lambda - 1}\right) = e_2 - e_1 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \\ \frac{1}{2} D_\eta(\log \lambda) \qquad = e_2 - e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \\ \frac{1}{2} D_\eta\left(\log \frac{1}{1 - \lambda}\right) = e_3 - e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \end{cases}$$

so daß wir in den Differenzen der e_1, e_2, e_3 die einfachsten Modulformen zweiter Stufe $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension mit Nullpunkten in den Spitzen des Diskontinuitätsbereiches vor uns haben.[1])

Da die Summe der drei e verschwindet, so können wir durch Kombination der Gleichungen (5) die e auch einzeln berechnen; so z. B. findet sich:

$$e_1 = -\frac{1}{6} D_\eta\left(\log \frac{\lambda}{\lambda - 1}\right) - \frac{1}{6} D_\eta\left(\log \frac{1}{1 - \lambda}\right).$$

Als linear-unabhängige ganze Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension kann man e_1 und e_2 heranziehen, aus denen man in der Gestalt $(ae_1 + be_2)$ unter geeigneter Auswahl der Koeffizienten a, b eine Form herstellen kann, die an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle des Diskontinuitätsbereiches ihren Nullpunkt erster Ordnung hat. Alle ganzen Formen zweiter Stufe lassen sich dann als Produkte solcher Linearfaktoren $(ae_1 + be_2)$ darstellen, alle Formen dieser Stufe überhaupt als Quotienten solcher Produkte. Doch brauchen wir hierauf nicht weiter einzugehen.

§ 4. Modulfunktionen höherer Stufen in der Theorie der elliptischen Funktionen.

Infolge der einfachen Produktdarstellungen (10) und (11) S. 407 sind unter den Wurzeln der Integralmoduln k^2, k'^2 diejenigen achten Grades $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ und deren Potenzen, außerdem aber auch noch $\sqrt[12]{kk'}$

1) Statt die Bedeutung von $D_\eta(\lambda)$ durch eine funktionentheoretische Überlegung festzustellen, hätten wir dieselbe auch aus:

$$D_\eta(J) = \frac{dJ}{d\lambda} \cdot D_\eta(\lambda)$$

mit Benutzung von (3) S. 347 und (11) S. 317 berechnen können. Andrerseits hätte sich das Verhalten der $e_3 - e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \ldots$ als ganzer Modulformen zweiter Stufe mit Nullpunkten in Spitzen des Diskontinuitätsbereiches leicht auch mit Hilfe von (12) S. 416 folgern lassen.

frühzeitig betrachtet und als eindeutige Funktionen von ω erkannt.[1]) Diese Eigenschaft der Eindeutigkeit in ω haben nun, wie aus der Theorie der Modulfunktionen folgt, freilich alle übrigen Wurzeln aus k^2 auch; das Besondere der genannten Wurzeln besteht indessen darin, daß sie und nur sie unter allen Wurzeln aus k^2, k'^2, $k^2k'^2$ zu Untergruppen der $\Gamma^{(\omega)}$ gehören, die sich durch Kongruenzen ähnlich wie die Hauptkongruenzgruppe darstellen lassen.[2]) Die zwölfte Wurzel aus der Diskriminante:

$$\sqrt[12]{\Delta} = \frac{2\pi}{\omega_2} q^{\frac{1}{6}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})^2$$

und ihre Potenzen sind gleichfalls Modulformen, die zu Kongruenzuntergruppen gehören; auch diese Funktionen bzw. ihre Produktausdrücke finden sich seit lange in der Theorie der elliptischen Funktionen.[3])

Bei der Untersuchung dieser Größen ist die von Klein eingeführte Funktion:

$$(1)\quad \sigma_{g,h}(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = e^{\frac{g\eta_1 + h\eta_2}{n}\left(u - \frac{g\omega_1 + h\omega_2}{2n}\right)} \sigma\left(u - \frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right),$$

in welcher n eine positive ganze Zahl ist und g, h irgendwelche ganzen Zahlen bedeuten, von grundsätzlicher Bedeutung.[4]) Bei festem n entsprechen diese Funktionen, wie man sofort übersieht, den Thetafunktionen mit gebrochenen Charakteristiken der Nenner n bzw. $2n$ (vgl. S. 421). Indessen sind die Funktionen (1) bei Untersuchungen über elliptische Funktionen n^{ter} Stufe deshalb so sehr viel brauchbarer als die Thetafunktionen, weil die $\sigma_{gh}(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$ gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ ein leicht angebbares Verhalten zeigen, während in dieser Hinsicht bei den Thetafunktionen eine weiterhin noch besonders zu besprechende Schwierigkeit vorliegt.

Das Verhalten der Funktion (1) bei Vermehrung von u um Perioden liest man leicht aus (8) S. 209 unter Zuhilfenahme der Legendreschen Relation (6) S. 160 ab:

---

1) Ihr Verhalten gegenüber beliebigen Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ ist durch Hermite erforscht; s. dessen Abhandlung „Sur la résolution de l'équation de cinquième degré" in den Pariser Comptes Rendus, Bd. 46 (1858) oder in Hermites Werken, Bd. 2 S. 5.

2) S. Klein, „Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen" Math. Ann. Bd. 17 S. 65 (1879) sowie „Modulfunktionen", Bd. 1 S. 659 ff. und die daselbst angegebenen Abhandlungen.

3) S. z. B. Jacobi, „Fundamenta nova", Art. 36; „Werke", Bd. 1 S. 144.

4) S. Klein, „Über die elliptischen Normalkurven der n^{ten} Ordnung und die zugehörigen Modulfunktionen der n^{ten} Stufe", Leipziger Abhandl. Bd. 13 (1885) S. 339, auch „Modulfunktionen", Bd. 2 S. 22.

$$(2) \qquad \sigma_{gh}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) =$$
$$(-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)} \cdot e^{\frac{2i\pi}{n}(m_1 h - m_2 g)} \sigma_{gh}(u).$$

Hieraus folgt übrigens beiläufig für den Quotienten der Funktion (1) und der ursprünglichen σ-Funktion:

$$\frac{\sigma_{gh}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)}{\sigma(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)} = e^{\frac{2i\pi}{n}(m_1 h - m_2 g)} \cdot \frac{\sigma_{gh}(u)}{\sigma(u)},$$

ein für eine elliptische Funktion n^{ter} Stufe charakteristisches Verhalten (vgl. S. 374). Da die η_1, η_2 mit den ω_1, ω_2 kogredient sind, so ist die Wirkung einer Substitution der $\Gamma^{(\omega)}$ auf die Funktion (1) sofort in der Gestalt:

$$(3) \qquad \sigma_{gh}(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma_{\alpha g + \gamma h, \beta g + \delta h}(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

angebbar. Ändern wir g und h um Multipla von n, etwa um an und bn, so ändert sich, wie man aus (2) und der Legendreschen Relation (6) S. 160 berechnet, die Funktion (1) nur um eine multiplikative Einheitswurzel:

$$(4) \qquad \sigma_{g+an,\, h+bn}(u) = (-1)^{ab+a+b} e^{-\frac{\pi i}{n}(ah - bg)} \sigma_{gh}(u),$$

so daß man bereits alle wesentlich verschiedenen Funktionen (1) bei gegebener Stufe n erhält, falls man g und h auf die ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ beschränkt. Gilt für die in (3) ausgeübte Substitution:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } n),$$

so stehen in den Gleichungen:

$$\alpha g + \gamma h = g + \left(\frac{\alpha - 1}{n} g + \frac{\gamma}{n} h\right) n,$$
$$\beta g + \delta h = h + \left(\frac{\beta}{n} g + \frac{\delta - 1}{n} h\right) n,$$

rechter Hand in den Klammern ganze Zahlen. Die Relation (4) liefert also als Wirkung einer Substitution der Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe:

$$(5) \qquad \sigma_{gh}(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) =$$
$$-(-1)^{\left(\frac{\alpha-1}{n} g + \frac{\gamma}{n} h + 1\right)\left(\frac{\beta}{n} g + \frac{\delta - 1}{n} h + 1\right)} e^{\frac{\pi i}{n^2}(\beta g^2 + (\delta - \alpha) g h - \gamma h^2)} \sigma_{gh}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

so daß zwar die Funktion (1) gegenüber diesen Substitutionen noch nicht völlig invariant ist, sich jedoch nur um eine multiplikative Einheitswurzel $2n^{\text{ten}}$ Grades ändert.

Den „Nullwert" der Funktion (1) bezeichnen wir mit $\sigma_{gh}(\omega_1, \omega_2)$:

$$(6) \qquad \sigma_{gh}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{(g\eta_1 + h\eta_2)(g\omega_1 + h\omega_2)}{2n^2}} \sigma\left(\frac{g\omega_1 + h\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right)$$

oder auch, wenn die Argumente selbstverständlich sind, kurz mit σ_{gh}. Die Gleichungen (3), (4) und (5) übertragen sich sofort auf diese Null-

werte. Die Kombination $g=0, h=0$ ist hier auszuschließen, da die Funktion (6) für diese Kombination identisch verschwindet. Da übrigens $\mathfrak{S}_{-g,-h} = -\mathfrak{S}_{gh}$ gilt, so erhalten wir beim einzelnen n sicher bereits alle wesentlich verschiedenen Funktionen (6), wenn wir etwa den ersten Index g als nicht-negative ganze Zahl $\leq \frac{n}{2}$ wählen.

Aus (2) S. 404 ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung eine für unsere folgenden Betrachtungen grundlegende Produktdarstellung der Funktion (6):

$$(7)\quad \mathfrak{S}_{gh}(\omega_1, \omega_2)\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^2$$
$$= \frac{\omega_2}{2i\pi} e^{\frac{\pi i h(g-n)}{n^2}} \cdot q^{\frac{g(g-n)}{n^2}} \cdot \prod_{m=0}^{\infty}\left(1 - e^{\frac{2i\pi h}{n}} q^{2m+\frac{2g}{n}}\right)\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-\frac{2i\pi h}{n}} q^{2m-\frac{2g}{n}}\right).$$

Die in der älteren Theorie der elliptischen Funktionen vorliegenden Entwicklungen über das Verhalten von $\sqrt[4]{k}, \sqrt[4]{k'}, \sqrt[12]{k, k'}, \sqrt[12]{\Delta}$ usw. gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ lassen sich nun alle leicht mittels der Funktionen $\mathfrak{S}_{gh}$ in den drei niedersten Fällen $n=2, 3$ und 4 ableiten.

Für $n=2$ haben wir drei Funktionen $\mathfrak{S}_{gh}$ nämlich $\mathfrak{S}_{01}, \mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}$, für welche wir aus (7) die Darstellungen gewinnen:

$$\mathfrak{S}_{01}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^2 = \frac{\omega_2}{2i\pi} e^{-\frac{\pi i}{2}}\cdot 2\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})^2,$$
$$\mathfrak{S}_{10}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^2 = \frac{\omega_2}{2i\pi} q^{-\frac{1}{4}}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})^2,$$
$$\mathfrak{S}_{11}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^2 = \frac{\omega_2}{2i\pi} e^{-\frac{\pi i}{4}} q^{-\frac{1}{4}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1})^2.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so folgt bei Benutzung von (7) S. 406:

$$\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{11}\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 q^{\frac{1}{2}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^6 = (1-i)\sqrt{2}.$$

Der links mit dem $\mathfrak{S}$-Produkt multiplizierte Faktor ist aber zufolge (12) S. 407 die eindeutige Funktion $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension $\sqrt[4]{\Delta}$ der ω_1, ω_2; für diese gilt somit die Darstellung:

$$(8)\qquad \sqrt[4]{\Delta} = \frac{(1-i)\sqrt{2}}{\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{11}}.$$

Diese Darstellung von $\sqrt[4]{\Delta}$ setzt uns nun in den Stand, das Verhalten dieser eindeutigen Funktion der ω_1, ω_2 gegenüber irgendwelchen Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ auf Grund der Formeln (3), (4) und (5) fest-

zustellen. Üben wir zunächst die erzeugenden Substitutionen S und T aus, so folgt aus (3):

$$\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1+\omega_2,\omega_2)=\frac{(1-i)\sqrt{2}}{\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{12}},\quad \sqrt[4]{\Delta}(\omega_2,-\omega_1)=\frac{(1-i)\sqrt{2}}{\mathfrak{S}_{-10}\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{-11}}.$$

Auf Grund der Regel (4) hat man $\mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_{-10}, \mathfrak{S}_{-11}$ bzw. auf $\mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}$ zu reduzieren und findet:

$$(9)\quad \sqrt[4]{\Delta}(\omega_1+\omega_2,\omega_2)=i\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2),\quad \sqrt[4]{\Delta}(\omega_2,-\omega_1)=-i\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2).$$

Für eine beliebige Substitution V der Hauptkongruenzgruppe vierter Stufe $\Gamma_{(4)}^{(\omega)}$ ist $\alpha\delta\equiv 1 \pmod 8$, woraus $\alpha\equiv\delta \pmod 8$ folgt. Also liefert für eine mit der identischen Substitution 1 modulo 4 kongruente Substitution V die für $u=0$ und $n=2$ spezialisierte Gleichung (5):

$$\mathfrak{S}_{gh}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\gamma\omega_1+\delta\omega_2)=(-1)^{\frac{\beta g+\gamma h}{4}}\mathfrak{S}_{gh}(\omega_1,\omega_2).$$

Hieraus geht sofort hervor, daß das Produkt $\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{11}$ gegenüber der fraglichen Substitution V invariant ist: *Die vierte Wurzel der Diskriminante $\sqrt[4]{\Delta}$ ist eine eindeutige Modulform vierter Stufe von der Dimension* -3.

Gegenüber einer beliebigen Substitution V ändert sich $\sqrt[4]{\Delta}$ um eine von den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eindeutig abhängende vierte Einheitswurzel. Auch diese Abhängigkeit können wir leicht angeben. Schreiben wir zunächst:

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\gamma\omega_1+\delta\omega_2)=i^{\mu}\cdot\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2),$$

so ist der Exponent μ in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ darzustellen. Gilt $V'\equiv V \pmod 4$, so ist $V^{-1}V'\equiv 1 \pmod 4$, so daß V und V' gleiche Wirkungen auf $\sqrt[4]{\Delta}$ ausüben. Wir dürfen demnach bei der folgenden Rechnung in der Schreibweise der Substitutionen die Koeffizienten irgendwie modulo 4 reduzieren und z. B. durch ihre kleinsten nicht-negativen Reste modulo 4 ersetzen. Ist nun zunächst α ungerade, so ist $\alpha^2\equiv 1 \pmod 4$. Die Ausübung der Substitution $S^{-\alpha\beta}$ auf die in der eben angesetzten Gleichung enthaltenen ω_1, ω_2 liefert demnach mit Benutzung der ersten Relation (9):

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1,\gamma\omega_1+\alpha\omega_2)=i^{\mu-\alpha\beta}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2).$$

Üben wir jetzt T aus, so folgt mittelst der zweiten Gleichung (9):

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_2,-\alpha\omega_1+\gamma\omega_2)=i^{\mu-\alpha\beta-1}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2).$$

Drittens wende man auf die ω_1, ω_2 die Substitution $S^{\alpha\gamma}$ an und findet:

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_2,-\alpha\omega_1)=i^{\mu-\alpha\beta+\alpha\gamma-1}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2),$$

sowie nach erneuter Anwendung von T:

$$\sqrt[4]{\Delta}(-\alpha\omega_1,-\alpha\omega_2)=i^{\mu-\alpha\beta+\alpha\gamma-2}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2),$$
$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1,\alpha\omega_2)=i^{\mu-\alpha\beta+\alpha\gamma}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2),$$

Endlich aber gilt:

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = i^{\alpha-1}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$

da $\sqrt[4]{\Delta}$ von ungerader Dimension ist. Es folgt also:

$$\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = i^{\mu-\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha-1}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$

und demnach ergibt sich für ungerades α:

$$\mu \equiv \alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha + 1 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Ist zweitens α gerade, so schreiben wir auf Grund der zweiten Gleichung (9):

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = i\sqrt[4]{\Delta}(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2, -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2)$$

und können, da jetzt γ notwendig ungerade ist, zur weiteren Entwicklung der rechten Seite die eben gewonnene Regel anwenden. Es ergibt sich:

$$\mu \equiv \alpha\gamma + \gamma\delta + \gamma \qquad (\text{mod. } 4),$$

so daß es gelingt, beide Fälle in den einen Ausdruck:

$$\mu \equiv \alpha^2(\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha + 1) + (1 - \alpha^2)(\alpha\gamma + \gamma\delta + \gamma) \qquad (\text{mod. } 4)$$

zusammenzuziehen. *Die vierte Wurzel der Diskriminante zeigt gegenüber einer beliebigen Substitution der homogenen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ das Verhalten:*

$$(10)\quad \sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = i^{\alpha^2(\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha + 1) + (1-\alpha^2)(\alpha+\delta+1)\gamma}\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Eine genau entsprechende Entwicklung gilt im Falle $n = 3$ für die dritte Wurzel der Diskriminante $\sqrt[3]{\Delta}$. Wir haben hier die vier verschiedenen Funktionen $\sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{12}$, und es ergibt sich, wenn wir die früher benutzte Abkürzung $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varrho$ wieder aufnehmen, aus (7):

$$\sigma_{gh}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^{2m})^2$$

$$= \frac{\omega_2}{2i\pi} e^{\frac{1}{9}\pi i h(g-3)} q^{\frac{1}{9}g(g-3)} \prod_{m=0}^{\infty}\left(1 - \varrho^h q^{2m+\frac{2}{3}g}\right) \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \varrho^{2h} q^{2m-\frac{2}{3}g}\right).$$

Multiplizieren wir nun die vier in diesem gemeinsamen Ausdrucke enthaltenen Formeln, so lassen sich die rechts stehenden Produkte zusammenziehen, und wir gelangen nach einer kurzen Rechnung zu dem Ergebnis:

$$\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12} \cdot \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 q^{\frac{2}{3}} \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^{2m})^8 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Hier steht links neben dem Sigmaprodukt die dritte Wurzel der Diskriminante $\sqrt[3]{\Delta}$, so daß für diese eindeutige Funktion von ω_1, ω_2 die folgende Darstellung durch die zu $n = 3$ gehörenden σ_{gh} gewonnen wird:

$$(11)\qquad \sqrt[3]{\Delta} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2\sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{12}}.$$

Hiermit ist der Boden geebnet, um auf Grund der Regeln (3), (4) und (5) auch das Verhalten von $\sqrt[3]{\Delta}$ gegenüber den Substitutionen der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ festzustellen. Wir stellen zunächst folgende Wirkung der Substitutionen S und T auf $\sqrt[3]{\Delta}$ fest:

$$(12)\quad \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varrho \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2), \qquad \sqrt[3]{\Delta}(\omega_2, -\omega_1) = \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Als Wirkung einer modulo 3 mit „1“ kongruenten Substitution finden wir aus (5), falls die transformierte Funktion mit σ'_{gh} bezeichnet wird:

$$\sigma'_{gh} = -(-1)^{\left(\frac{\alpha-1}{3}g + \frac{\gamma}{3}h + 1\right)\left(\frac{\beta}{3}g + \frac{\delta-1}{3}h + 1\right)} e^{\frac{\pi i}{3}\left(\frac{\beta}{3}g^2 + \frac{\delta-\alpha}{3}gh - \frac{\gamma}{3}h^2\right)} \sigma_{gh}.$$

Nun gilt modulo 2:

$$g^2 \equiv g,\ h^2 \equiv h,\ \frac{\alpha-1}{3} \equiv \alpha - 1,\ \frac{\gamma}{3} \equiv \gamma, \ldots,$$

so daß sich der erste Exponent wesentlich zusammenziehen läßt; berücksichtigt man bei dieser Rechnung noch, daß α und β nicht zugleich gerade sind, und daß also das Produkt $(\alpha - 1)(\beta + 1)$ und ebenso auch $(\delta - 1)(\gamma + 1)$ geraden ganzen Zahlen gleich sind, so folgt leicht:

$$\sigma'_{gh} = (-1)^{(\alpha+\delta)gh + \beta g + \gamma h}\, e^{\frac{\pi i}{3}\left(\frac{\beta}{3}g^2 + \frac{\delta-\alpha}{3}gh - \frac{\gamma}{3}h^2\right)} \sigma_{gh}.$$

In dem zu untersuchenden σ-Produkte ersetzen wir zweckmäßig $\sigma_{1,2}$ durch $\sigma_{1,-1}$, welche Funktion von der ersteren nur um einen konstanten Faktor abweicht. Dann findet sich:

$$\sigma'_{01}\sigma'_{10}\sigma'_{11}\sigma'_{1-1} = (-1)^{\gamma+3\beta}\, e^{-\frac{\pi i}{3}\cdot\frac{\gamma}{3}} \cdot e^{\pi i \frac{\beta}{3} - \frac{2\pi i}{3}\frac{\gamma}{3}} \sigma_{01}\sigma_{10}\sigma_{11}\sigma_{1-1}.$$

Da nun, wie schon festgestellt, $\frac{\gamma}{3} \equiv \gamma$, $\frac{\beta}{3} \equiv \beta$ (mod. 2) gilt, so zieht sich der rechts vor dem σ-Produkt stehende Faktor zu 1 zusammen, und also ist das Produkt gegenüber der ausgeübten Substitution invariant: *Die dritte Wurzel der Diskriminante ist eine eindeutige Modulform dritter Stufe der Dimension* -4.

Gegenüber einer beliebigen Substitution V ändert sich $\sqrt[3]{\Delta}$ um eine multiplikative dritte Einheitswurzel:

$$\sqrt[3]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varrho^{\mu} \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$

wobei die Abhängigkeit der ganzen Zahl μ von den Substitutionskoeffizienten genau wie oben in Erfahrung gebracht werden kann. Die Rechnung gestaltet sich hier insofern noch etwas einfacher, als $\sqrt[3]{\Delta}$ gegenüber der Substitution T invariant ist. Wir geben sogleich das Resultat an: *Die dritte Wurzel der Diskriminante* $\sqrt[3]{\Delta}$ *zeigt gegenüber einer beliebigen Substitution der homogenen* $\Gamma^{(\omega)}$ *das Verhalten:*

$$(13)\quad \sqrt[3]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varrho^{(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)} \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Mit den Wurzeln $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ ist auch deren Quotient $\sqrt[3]{\Delta} : \sqrt[4]{\Delta} = \sqrt[12]{\Delta}$ eine eindeutige Modulform, welche invariant ist gegenüber allen Substitutionen, die mod. 3 und mod. 4 zugleich mit 1 kongruent sind. Diese Substitutionen bilden die Hauptkongruenzgruppe zwölfter Stufe: *Die zwölfte Wurzel der Diskriminante $\sqrt[12]{\Delta}$ ist eine eindeutige Modulform zwölfter Stufe der Dimension* -1. Das Verhalten von $\sqrt[12]{\Delta}$ gegenüber einer beliebigen Substitution der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ geht aus (10) und (13) durch Quotientenbildung hervor.

Im Falle $n = 4$ stellen sich die drei schon bei $n = 2$ aufgetretenen Funktionen $\mathfrak{S}_{gh}$ wieder ein, außerdem die sechs neuen Funktionen $\mathfrak{S}_{01}$, $\mathfrak{S}_{21}$, $\mathfrak{S}_{10}$, $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{11}$, $\mathfrak{S}_{13}$. Setzt man ihre Produktentwicklungen (7) an und kombiniert sie zu Paaren, so ergibt sich unter Heranziehung der sechsten Wurzel der Diskriminante:

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{21} \cdot \sqrt[6]{\Delta} = e^{\frac{3\pi i}{8}} \cdot \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m}), \\ \mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{12} \cdot \sqrt[6]{\Delta} = e^{\frac{5\pi i}{8}}\, q^{-\frac{1}{24}} \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m-1}) \\ \mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{13} \cdot \sqrt[6]{\Delta} = e^{\frac{\pi i}{4}}\, q^{-\frac{1}{24}} \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1}). \end{cases}$$

Für die in (10) S. 407 als eindeutige Funktionen erklärten achten Wurzeln der Integralmoduln k^2 und k'^2 ergibt sich demnach folgende Darstellung durch die zu $n = 4$ gehörenden $\mathfrak{S}_{gh}$:

$$(15) \qquad \sqrt[4]{k} = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{13}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = e^{-\frac{3\pi i}{8}} \frac{\mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{12}}{\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{13}}.$$

Diese Gleichungen gestatten uns das Verhalten der Wurzeln $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ gegenüber den Substitutionen der nicht-homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ feststellen. Wir berechnen zunächst aus (3) und (4) folgende Wirkung der erzeugenden Substitutionen S und T:

$$(16) \qquad \sqrt[4]{k}(\omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\sqrt[4]{k}(\omega)}{\sqrt[4]{k'}(\omega)}, \qquad \sqrt[4]{k'}(\omega + 1) = \frac{1}{\sqrt[4]{k'}(\omega)},$$

$$(17) \qquad \sqrt[4]{k}\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt[4]{k'}(\omega), \qquad \sqrt[4]{k'}\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt[4]{k}(\omega).$$

Bei einer geraden Anzahl von Anwendungen der Substitution S findet man aus (16):

$$(18) \qquad \sqrt[4]{k}(\omega + 2\nu) = e^{\frac{\nu\pi i}{4}} \sqrt[4]{k}(\omega), \qquad \sqrt[4]{k'}(\omega + 2\nu) = \sqrt[4]{k'}(\omega),$$

so daß zwar $\sqrt[4]{k'}$ gegenüber $S^{2\nu}$ invariant ist, $\sqrt[4]{k}$ aber nur erst dann,

wenn 2ν durch 16 teilbar ist. Für eine beliebige homogene, modulo 16 mit der identischen Substitution „1“ kongruente Substitution folgt aus (5):

$$\mathfrak{G}'_{gh} = (-1)^{\frac{\beta}{16}g + \frac{\gamma}{16}h + \frac{\delta-\alpha}{16}gh}\,\mathfrak{G}_{gh},$$

so daß die drei Produkte $\mathfrak{G}_{01}\mathfrak{G}_{21}$, $\mathfrak{G}_{10}\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{13}$ invariant sind. Aus (15) folgt demnach: *Die achten Wurzeln der Integralmoduln* $\sqrt[8]{k}$, $\sqrt[8]{k'}$ *sind eindeutige Modulfunktionen der* 16. *Stufe.*

Bei einer Substitution mit $\beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$ (mod. 16) folgt aus $\alpha\delta \equiv 1$ (mod. 16), daß $\delta \equiv \alpha$ (mod. 8) gilt; und zwar ist $\delta - \alpha \equiv 0$ oder $\equiv 8$ (mod. 16), je nachdem $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1$ bzw. $\equiv \pm 3$ (mod. 8) ist. Es folgt:

$$(19) \qquad (-1)^{\frac{\delta-\alpha}{8}} = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{\alpha}\right),$$

wo rechter Hand das Legendre-Jacobische Zeichen aus der Theorie der quadratischen Reste gemeint ist.[1]) Da die Produkte $\mathfrak{G}_{01}\mathfrak{G}_{21}$, $\mathfrak{G}_{10}\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{13}$ bei der Substitution $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$ invariant sind, so dürfen wir $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ (mod. 4) voraussetzen und lesen alsdann aus (5) S. 451 ab:

$$\mathfrak{G}'_{gh} = (-1)^{\frac{\alpha-1}{4}\cdot\frac{\delta-1}{4}gh + \frac{\alpha-1}{4}g + \frac{\delta-1}{4}h + \frac{\beta}{16}g + \frac{\gamma}{16}h} \cdot i^{\frac{\delta-\alpha}{8}gh}\,\mathfrak{G}_{gh}.$$

Hieraus leitet man leicht den folgenden Satz ab: *Bei einer Substitution mit* $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (mod. 16) *zeigen die Funktionen* (15) *das Verhalten:*

$$(20) \qquad \sqrt[8]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\sqrt[8]{k}(\omega), \quad \sqrt[8]{k'}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\sqrt[8]{k'}(\omega).$$

Gegenüber einer beliebigen mod. 2 mit 1 kongruenten Substitution nimmt $\sqrt[8]{k}$ eine von den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eindeutig abhängende achte Einheitswurzel als Faktor an:

$$\sqrt[8]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = e^{\frac{\mu\pi i}{4}}\sqrt[8]{k}(\omega).$$

Bei der Berechnung dieses Faktors dürfen wir in der Schreibweise der Substitutionen die Koeffizienten jetzt modulo 16 irgendwie reduzieren. Wir üben nun auf ω in der letzten Gleichung zunächst $S^{-\alpha\beta}$ aus, wobei der zweite Koeffizient der links entstehenden Substitution $(1-\alpha^2)\beta$ durch 16 teilbar ist und der vierte Koeffizient die etwa durch α^{-1} zu bezeichnende, modulo 16 bestimmte Zahl δ' ist, die der Kongruenz $\alpha\delta' \equiv 1$ (mod. 16) genügt. Die Wirkung von $S^{-\alpha\beta}$ auf $\sqrt[8]{k}(\omega)$ bestimmt sich aus (18); man findet:

$$\sqrt[8]{k}\left(\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega+\alpha^{-1}}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}\left(\mu-\frac{\alpha\beta}{2}\right)}\sqrt[8]{k}(\omega).$$

---

1) Wir gebrauchen dies Zeichen in der Bedeutung (19), auch wenn α eine negative Zahl ist. S. über die zahlentheoretische Bedeutung des Legendre-Jacobischen Zeichens etwa Dirichlet-Dedekind, „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (Braunschweig, 1894), S. 91ff.

Üben wir jetzt auf ω die Substitution T aus, so folgt (vgl. (17)):

$$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha}{-\alpha^{-1}\omega+\gamma}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}\left(\mu-\frac{\alpha\beta}{2}\right)}\sqrt[4]{k'}(\omega),$$

sowie, wenn wir nunmehr $S^{\alpha\gamma}$ ausüben, weiter (vgl. (18)):

$$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha}{-\alpha^{-1}\omega}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}\left(\mu-\frac{\alpha\beta}{2}\right)}\sqrt[4]{k'}(\omega).$$

Die nochmalige Anwendung von T liefert mit Benutzung von (20):

$$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha\omega}{\alpha^{-1}}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)\sqrt[4]{k}(\omega)=e^{\frac{\pi i}{4}\left(\mu-\frac{\alpha\beta}{2}\right)}\sqrt[4]{k}(\omega),$$

woraus die Bedeutung von μ abgelesen werden kann: *Bei Ausübung einer Substitution der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe zeigen die Funktionen* (15) *folgendes Verhalten:*

$$(21)\quad \sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\sqrt[4]{k}(\omega),\quad \sqrt[4]{k'}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\sqrt[4]{k'}(\omega).$$

Die zweite Gleichung, welche das Verhalten von $\sqrt[4]{k'}$ regelt, ist eine einfache Folge der ersten. Aus dieser folgt nämlich durch zweimalige Anwendung der zweiten Gleichung (17):

$$\sqrt[4]{k'}\left(\frac{\gamma\omega+\delta}{-\alpha\omega-\beta}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\sqrt[4]{k'}\left(\frac{-1}{\omega}\right).$$

Wendet man hier auf ω die Substitution T an, so folgt:

$$\sqrt[4]{k'}\left(\frac{\delta\omega-\gamma}{-\beta\omega+\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\sqrt[4]{k'}(\omega),$$

woraus durch Austausch der Bezeichnungen die zweite Gleichung (21) folgt.

Nach S. 438 können wir endlich jede Substitution der nicht-homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ in der Gestalt VV_ν darstellen, wo $V\equiv 1 \pmod{2}$ gilt und V_ν eine der sechs modulo 2 inkongruenten Substitutionen ist, auf welche sich die Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ modulo 2 reduziert. Die Wirkung von V_ν auf $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ kann man nun leicht aus (16) und (17) berechnen und damit von (21) aus die Wirkung einer beliebigen Substitution feststellen. Üben wir z. B. auf ω in der ersten Gleichung (21) die Substitution S aus, so folgt mit Benutzung der ersten Gleichung (16), wenn wir $\alpha+\beta=\beta'$, $\gamma+\delta=\delta'$ schreiben:

$$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta'}{\gamma\omega+\delta'}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{\pi i\alpha(\beta'-\alpha)}{8}+\frac{\pi i}{8}}\,\frac{\sqrt[4]{k}(\omega)}{\sqrt[4]{k'}(\omega)}.$$

Nun gilt aber:

$$e^{\pi i\frac{1-\alpha^2}{8}}=(-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}}=\left(\frac{2}{\alpha}\right),$$

so daß wir für eine modulo 2 mit S kongruente Substitution:

$$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\frac{\sqrt[4]{k(\omega)}}{\sqrt[4]{k'(\omega)}}$$

gewinnen. Das Gesamtergebnis dieser einfachen Rechnungen stellen wir sogleich in leichtverständlicher Weise tabellarisch zusammen:

$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\equiv$	$\sqrt[4]{k}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=$	$\sqrt[4]{k'}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$
$\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$	$\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\sqrt[4]{k(\omega)}$	$\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\sqrt[4]{k'(\omega)}$
$\begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix}$	$\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\frac{1}{\sqrt[4]{k(\omega)}}$	$e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\cdot\frac{\sqrt[4]{k'(\omega)}}{\sqrt[4]{k(\omega)}}$
$\begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}$	$\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{-\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\sqrt[4]{k'(\omega)}$	$\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\sqrt[4]{k(\omega)}$
$\begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 1\end{pmatrix}$	$\left(\frac{2}{\beta}\right)e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\frac{1}{\sqrt[4]{k'(\omega)}}$	$e^{\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{\sqrt[4]{k(\omega)}}{\sqrt[4]{k'(\omega)}}$
$\begin{pmatrix}1, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}$	$e^{-\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\frac{\sqrt[4]{k'(\omega)}}{\sqrt[4]{k(\omega)}}$	$\left(\frac{2}{\gamma}\right)e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{1}{\sqrt[4]{k(\omega)}}$
$\begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix}$	$e^{\frac{\pi i\alpha\beta}{8}}\frac{\sqrt[4]{k(\omega)}}{\sqrt[4]{k'(\omega)}}$	$\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{\pi i\gamma\delta}{8}}\frac{1}{\sqrt[4]{k'(\omega)}}$

Zufolge (21) sind $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ Modulfunktionen achter Stufe, k und k' aber solche der vierten Stufe. Die S. 356 eingeführte absolute irrationale Invariante μ hing mit $\lambda=k^2$ vermöge der Gleichung (10) S. 358 zusammen. Wir folgern hieraus, daß die Größe μ in einer bestimmten unter den 24 gleichberechtigten Gestalten die Darstellung gestattet:

$$\mu=i\frac{1+k'}{k}=\frac{ik}{1-k'}. \tag{22}$$

Es ist demnach mit k und k' auch μ in Abhängigkeit von ω eine eindeutige Modulfunktion vierter Stufe, so daß die Benennung des Integrales (2) S. 360 *als des Normalintegrales „vierter" Stufe damit berechtigt erscheint.*[1])

Endlich tritt in der älteren Theorie auch noch die Größe $\sqrt[12]{kk'}$ auf. Aus der dritten Gleichung (14) sowie der Darstellung (11) S. 407,

1) Über die Bedeutung von $\mu(\omega)$ für die gesamten Funktionen vierter Stufe sehe man „Modulfunktionen", Bd. 1 S. 612 ff.

durch welche diese Größe als eindeutige Funktion von ω erklärt war, entnehmen wir sofort als neue Darstellung derselben:

$$(23)\qquad \sqrt[12]{kk'} = \frac{1+i}{\sqrt[8]{2}\sqrt[6]{\Delta}\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{13}}$$

in den zu $n=4$ gehörenden $\mathfrak{G}_{gh}$. *Es handelt sich also hier um eine unter drei koordinierten Modulfunktionen* 48ter *Stufe, welche von numerischen Faktoren abgesehen die reziproken Werte der drei Produkte* $\sqrt[6]{\Delta}\mathfrak{G}_{01}\mathfrak{G}_{21}$, $\sqrt[6]{\Delta}\mathfrak{G}_{10}\mathfrak{G}_{12}$, $\sqrt[6]{\Delta}\mathfrak{G}_{11}\mathfrak{G}_{13}$ *sind.*

Das Verhalten dieser Größen gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ stellt man mit Hilfe der bisherigen Methoden leicht fest. Jedoch ist es nicht einmnal nötig, zu diesem Zwecke neue Untersuchungen anzustellen. Da nämlich $\sqrt[12]{kk'}$ gleich dem Quotienten von $(\sqrt[4]{kk'})^3$ und $(\sqrt[3]{kk'})^2$ ist und das Verhalten von $\sqrt[4]{kk'}$ gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ bereits festgestellt ist, so kommt es nur darauf an, das Verhalten von $(\sqrt[3]{kk'})^2$ aufzufinden. Nun folgt aber aus (11) S. 407:

$$(\sqrt[3]{kk'})^2 = \frac{\sqrt[3]{16}\, q^{\frac{1}{3}}}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1})^8} = \frac{\sqrt[3]{16}\, q^{\frac{1}{3}} \prod\limits_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^4}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^4 \prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1})^8},$$

und also ergibt sich aus der ersten Gleichung (12) S. 416 und der Produktdarstellung von $\sqrt[6]{\Delta}$:

$$(24)\qquad (\sqrt[3]{kk'})^2 = \frac{\sqrt[6]{\Delta}}{\sqrt[3]{4}(e_2-e_1)}.$$

Das Verhalten von $\sqrt[6]{\Delta}$ und (e_2-e_1) gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ ist aber bekannt.

§ 5. Die Perioden betrachtet als Funktionen des Integralmoduls.

Die Inversion der Modulfunktionen höherer als erster Stufe haben wir insoweit auszuführen, daß wir die Perioden, und zwar in Gestalt von Legendres „vollständigen Integralen" K, K', E, E' (vgl. S. 371 ff.) als Funktionen des Integralmoduls $\lambda = k^2$ darstellen. Diese Entwicklungen schließen sich den S. 323 ff. durchgeführten Untersuchungen für die erste Stufe an.

Um weiterhin Unterbrechungen zu vermeiden, schicken wir folgende Rechnung voraus. Durch Subtraktion der dritten Gleichung (5) S. 449 von der zweiten ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}D_\eta(\log \lambda(1-\lambda)) = e_1 + e_2 - 2e_3 = -3e_3.$$

Nun gilt aber (vgl. (24) § 4):

$$\lambda(1-\lambda) = \frac{\sqrt{\varDelta}}{4(e_2-e_1)^3},$$

und da $D_\eta(\log \varDelta) = 0$ ist, so ergibt sich die dritte der Gleichungen.

$$(1) \qquad \begin{cases} D_\eta(\log(e_2-e_3)) = 2e_1, \\ D_\eta(\log(e_3-e_1)) = 2e_2, \\ D_\eta(\log(e_2-e_1)) = 2e_3, \end{cases}$$

während die beiden ersten aus der dritten durch Vermittlung von (5) S. 449 folgen. Schreibt man diese Gleichungen in der Gestalt:

$$D_\eta(e_k - e_i) = 2e_l(e_k - e_i),$$

so gewinnt man durch geeignete Kombination derselben die Wirkung des Differentiationsprozesses D_η auf die e_1, e_2, e_3 einzeln in der Gestalt:

(2) $D_\eta(e_1) = -\frac{2}{3}(e_1^2 + 2e_2e_3), D_\eta(e_2) = -\frac{2}{3}(e_2^2 + 2e_3e_1), D_\eta(e_3) = -\frac{2}{3}(e_3^2 + 2e_1e_2).$

Wenn wir nun den Prozeß D_η auf irgendeine Funktion φ von ω allein, die demnach auch als Funktion von λ allein angesehen werden kann, ausüben, so gilt:

$$D_\eta(\varphi) = \frac{d\varphi}{d\lambda} D_\eta(\lambda) = \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \lambda D_\eta(\log \lambda),$$

und also folgt mit Benutzung von (5) S. 449 die Regel:

$$(3) \qquad D_\eta(\varphi) = 2(e_2 - e_3)\lambda \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Wir wenden diesen Ansatz an auf:

$$\varphi = \log K = \log\left(\tfrac{1}{2}\omega_2 \sqrt{e_2 - e_1}\right)$$

und benutzen zur Berechnung der Wirkung von D_η auf den rechter Hand stehenden Ausdruck die dritte Relation (1) sowie die Gleichung (11) S. 372:

$$2(e_2-e_3)\frac{\lambda}{K}\frac{dK}{d\lambda} = \frac{\eta_2}{\omega_2} + e_3 = (e_2-e_1)\frac{E}{K} - (e_2 - e_3).$$

Durch Division mit $(e_2 - e_1)$ folgt als *Differentialrelation zwischen K und E:*

$$(4) \qquad 2\lambda(1-\lambda)\frac{dK}{d\lambda} = E - (1-\lambda)K.$$

Weiter folgt aus $iK' = \omega K$ durch Differentiation nach λ:

$$i\frac{dK'}{d\lambda} = \frac{iK'}{K}\frac{dK}{d\lambda} + K\frac{d\omega}{d\lambda}.$$

Setzt man aber $\varphi = \omega$ in (3) ein, so ergibt sich:

$$D_\eta(\omega) = -\frac{2i\pi}{\omega_2^2} = 2(e_2 - e_3)\lambda\frac{d\omega}{d\lambda},$$

woraus man durch Division mit $(e_2 - e_1)$ erhält:

$$2\lambda(1-\lambda)\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{\pi i}{2K^2}.$$

Die vorletzte Gleichung liefert also bei Benutzung von (4):

$$2\lambda(1-\lambda)\frac{dK'}{d\lambda} = -\frac{\pi}{2K} + \frac{K'}{K}(E-(1-\lambda)K).$$

Mittelst der Legendreschen Relation (16) S. 373 gewinnt man demnach als *Differentialrelation zwischen* K' *und* E':

(5) $$2\lambda(1-\lambda)\frac{dK'}{d\lambda} = \lambda K' - E'.$$

Nach (11) S. 372 gilt:

(6) $$2\sqrt{e_2-e_1}\, E = \eta_2 + e_2\omega_2$$

und also bei Anwendung des Prozesses D_η:

$$2\sqrt{e_2-e_1}\, D_\eta(E) + \frac{E}{\sqrt{e_2-e_1}} D_\eta(e_2-e_1) = D_\eta(\eta_2 + e_2\omega_2).$$

Die rechte Seite entwickelt sich mit Benutzung der zweiten Gleichung (2) und des S. 325 angegebenen Ausdruckes von $D_\eta(\eta_2)$ weiter so:

$$D_\eta(\eta_2 + e_2\omega_2) = -\tfrac{1}{12} g_2\omega_2 + e_2\eta_2 - \tfrac{2}{3}(e_2^2 + 2e_1e_3)\omega_2.$$

Trägt man für g_2 seinen Ausdruck in den e ein und entwickelt andrerseits $D_\eta(e_2-e_1)$, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$2\sqrt{e_2-e_1}\, D_\eta(E) + 2e_3\sqrt{e_2-e_1}\, E = e_2\eta_2 - \omega_2(e_2^2 + e_1e_3),$$

sowie wenn wir η_2 auf Grund von (6) durch E ausdrücken:

$$2\sqrt{e_2-e_1}\, D_\eta(E) + 2e_3\sqrt{e_2-e_1}\, E = 2e_2\sqrt{e_2-e_1}\, E - \omega_2(2e_2^2 + e_1e_3),$$
$$2\sqrt{e_2-e_1}\, D_\eta(E) = 2(e_2-e_3)\sqrt{e_2-e_1}\, E - \omega_2(e_2-e_3)(e_2-e_1).$$

Entwickeln wir $D_\eta(E)$ nach der Regel (3), so ergibt die Division mit $2(e_2-e_3)\sqrt{e_2-e_1}$ als zweite *Differentialrelation zwischen* E *und* K:

(7) $$2\lambda\frac{dE}{d\lambda} = E - K.$$

Schließlich folgt aus der Legendreschen Relation (16) S. 373:

$$\frac{d(KE')}{d\lambda} = K'\frac{d(K-E)}{d\lambda} + (K-E)\frac{dK'}{d\lambda},$$

woraus man unter Benutzung von (4), (5) und (6) als zweite *Differentialrelation zwischen* E' *und* K' erhält:

(8) $$2(1-\lambda)\frac{dE'}{d\lambda} = K' - E'.$$

Wie bei der ersten Stufe (vgl. S. 326ff.) gewinnen wir aus den aufgestellten Differentialgleichungen erster Ordnung durch Kombination lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen die vollständigen Integrale K, K', E, E' als Funktionen von λ genügen. Wir

wollen dies nur noch für K und K' weiter verfolgen und berechnen zu diesem Zwecke aus (4):

$$E = 2\lambda(1-\lambda)\frac{dK}{d\lambda} + (1-\lambda)K,$$

$$\frac{dE}{d\lambda} = 2\lambda(1-\lambda)\frac{d^2K}{d\lambda^2} + (3-5\lambda)\frac{dK}{d\lambda} - K.$$

Trägt man diese beiden Ausdrücke von E und $\frac{dE}{d\lambda}$ in (7) ein, so gewinnt man die fragliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zu genau derselben Gleichung gelangt man durch eine an (5) und (8) angeschlossene Rechnung für K': *Die vollständigen Integrale Legendres K und K' sind als Funktionen von λ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$(9) \qquad \lambda(\lambda-1)\frac{d^2\zeta}{d\lambda^2} + (2\lambda-1)\frac{d\zeta}{d\lambda} + \tfrac{1}{4}\zeta = 0.$$

Wir sind hier genau wie bei der ersten Stufe (vgl. S. 330) zu einer *„hypergeometrischen" Differentialgleichung* geführt, und zwar sind die Parameter α, β, γ in der allgemeinen Gleichung (1) S. 105 gleich $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ zu setzen, damit wir zur Gleichung (9) gelangen; die drei S. 106 mit λ, μ, ν bezeichneten Größen werden somit hier übereinstimmend gleich 0. Wir wollen, um Verwechselungen des „Parameters" λ mit der unabhängigen Variabelen λ der Differentialgleichung (9) zu vermeiden, die letztere Variabele durch ihre andere Bezeichnung k^2 kennzeichnen. Die sechs S. 107 tabellarisch zusammengestellten Transformationen der hypergeometrischen Differentialgleichung in sich können wir für unsere Differentialgleichung (9) so schreiben:

$$\lambda' = k^2, \quad 1-k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \frac{k^2-1}{k^2}, \quad \frac{1}{1-k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2-1},$$
$$\zeta' = \zeta, \quad \zeta, \quad k\zeta, \quad k\zeta, \quad k'\zeta, \quad k'\zeta,$$

wobei untereinander stehende Werte λ' und ζ' zueinander gehören. Die 24 formal unterschiedenen Lösungen der Differentialgleichung mittelst der hypergeometrischen Reihe reduzieren sich hier auf die sechs Lösungen:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2), \quad F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; 1-k^2), \quad k^{-1}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{k^2}\right),$$
$$k^{-1}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{k^2-1}{k^2}\right), \quad k'^{-1}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{1-k^2}\right), \quad k'^{-1}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{k^2}{k^2-1}\right).$$

Die Peripherien der Konvergenzkreise dieser Reihen sind die drei in Fig. 83 S. 445 durch die beiden Punkte $\lambda = k^2 = -\varrho$ und $= -\varrho^2$ hindurch ziehenden Kreise; z. B. ist der Konvergenzkreis der ersten Reihe die Fläche des Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt $k^2 = 0$, derjenige der dritten Reihe das Äußere dieses Kreises usw.

In jeder der vorstehend angegebenen Reihen ist nun der Parameter

$\gamma = 1$, so daß ein zweites Integral der Differentialgleichung stets mittelst der Reihe (15) S. 114 und eines mit einem Logarithmus behafteten Gliedes anzusetzen ist. So haben wir, wenn wir z. B. für die Umgebung des singulären Punktes $k^2 = 0$ Reihen nach Potenzen von k^2 benutzen, die beiden linear-unabhängigen Integrale:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2), \quad F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, k^2) + 2 \log k \cdot F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2).$$

Um nun die beiden Lösungen K und K' der Differentialgleichung (9) in diesen Integralen darzustellen, nehmen wir an, daß K und K' einem primitiven Periodenpaare ω_1, ω_2 entsprechen, wobei also der Quotient ω dem Bereiche der Fig. 56 S. 273 angehört; dies setzt voraus, daß der Wert k^2 dem Doppeldreieck der Fig. 83, S. 445, angehört, welches sich symmetrisch um das von $k^2 = 0$ bis $k^2 = \frac{1}{2}$ reichende Stück der reellen k^2-Achse als Mittellinie anordnet. Wir notieren uns zunächst aus (8) S. 406 die drei Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} K = \dfrac{\pi}{2} \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})^2 \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1})^4, \\ k = 4 q^{\frac{1}{2}} \prod\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}}\right)^4, \quad k' = \prod\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{1 - q^{2m-1}}{1 + q^{2m-1}}\right)^4. \end{cases}$$

Aus der ersten folgt, daß bei verschwindendem k^2 und also verschwindendem q der Wert $K = \frac{\pi}{2}$ zutrifft; und bei Benutzung dieses Ergebnisses liefert die zweite Gleichung (10) für $\lim k = 0$ näherungsweise:

$$\log k = 2 \log 2 + \frac{\pi i \omega}{2} = 2 \log 2 - \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K} = 2 \log 2 - K',$$

so daß umgekehrt:

$$K' = 2 \log 2 - \log k$$

gilt. Setzen wir andererseits K und K' homogen und linear mittelst der zunächst noch unbekannten Koeffizienten A, B, C, D in den beiden angegebenen Integralen der Differentialgleichung an:

$$K = (A + 2B \log k)\, F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2) + B F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; k^2),$$
$$K' = (C + 2D \log k)\, F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2) + D F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; k^2),$$

so ergibt sich aus den Absolutgliedern der Reihen F und F_1 (vgl. S. 110 und 114) für $\lim k^2 = 0$:

$$K = A + 2B \log k, \qquad K' = C + 2D \log k;$$

also folgt durch Vergleich mit den soeben für $\lim k = 0$ ausgerechneten Grenzwerten von K und K':

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad B = 0, \quad C = 2 \log 2, \quad D = -\tfrac{1}{2}.$$

Die vollständigen Integrale Legendres K und K' sind als hypergeometrische Funktionen des Integralmoduls k^2 gegeben durch:

$$(11)\qquad \begin{cases} K = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2), \\ K' = (2\log 2 - \log k) F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2) - \frac{1}{2} F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2), \end{cases}$$

wobei die rechts benutzten Reihen auch noch explizite angegeben sein mögen:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; k^2 = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 k^2 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2 k^4 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6})^2 k^6 + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2} F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; k^2) = (\tfrac{1}{2})^2 k^2 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2 (1 + \tfrac{2}{3\cdot 4}) k^4 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6})^2 (1 + \tfrac{2}{3\cdot 4} + \tfrac{2}{5\cdot 6}) k^6 + \cdots;$$

log *k muß für reelle positive k selber reell werden.*

Die Darstellungen (11) bleiben gültig im Innern des Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt $k^2 = 0$. Bei einem Umlauf um diesen Nullpunkt führen sie zu einem bekannten Ergebnis zurück, das wir in die Gestalt kleiden können:

$$K(\omega + 2) = K(\omega), \quad K'(\omega + 2) = -2iK(\omega) + K'(\omega).$$

Die Fläche jenes Kreises setzt sich aber aus drei Doppeldreiecken zusammen, welche den Substitutionen 1, S und T bzw. den ihnen entsprechenden Doppeldreiecken im Netze der Fig. 61, S. 291, zugehören. Liegt demnach, wie wir annahmen, ω in dem der identischen Substitution 1 entsprechenden Doppeldreiecke, so werden auch noch $(\omega + 1)$ und $\frac{-1}{\omega}$ Werte liefern, für welche die Darstellungen (11) gelten. Die Wirkung der Substitutionen S und T auf k^2 ist bekannt. Als Wirkung erstlich von S auf K und K' stellt man aus (10) leicht fest:

$$K(\omega + 1) = k'(\omega)K(\omega), \qquad K'(\omega + 1) = -ik'(\omega)K(\omega) + k'(\omega)K'(\omega),$$

woraus wir nach kurzer Zwischenrechnung als *zweite Darstellung unserer in* (11) *gemeinten K, K'* gewinnen:

$$(12)\begin{cases} K = \frac{\pi}{2} k'^{-1} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{k^2}{k^2 - 1}\right), \\ K' = k'^{-1}\left\{\left(2\log 2 - \log\frac{k}{k'}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{k^2}{k^2 - 1}\right) - \frac{1}{2} F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k^2}{k^2 - 1}\right)\right\}, \end{cases}$$

die wir auch durch eine direkte Betrachtung, d. h. nicht durch Vermittlung der Substitution S, hätten aufstellen können. Das Innere des Konvergenzbereiches dieser neuen Darstellung umfaßt alle Werte k^2, deren reelle Bestandteile $< \frac{1}{2}$ sind.

Um die Wirkung von T auf $K(\omega)$ und $K'(\omega)$ zu bestimmen, folgern wir aus:

$$4K(\omega)^2 = \omega_2^2\left(\wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)$$

und $iK'(\omega) = \omega K(\omega)$:

$$4K\left(\frac{-1}{\omega}\right)^2 = \omega_1^2\left(\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right) = -4\omega^2 K(\omega)^2 = 4K'(\omega)^2.$$

Es gilt also:

$$K\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \pm K'(\omega),$$

wo rechts ein bestimmtes unter den beiden Zeichen gilt, da $K(\omega)$ eine eindeutige Funktion von ω ist. Setzen wir aber in die letzte Gleichung $\omega = i$ ein (ein Wert, für den K und K' nicht verschwinden), so ergibt sich mit Rücksicht auf $iK' = \omega K$ die Gültigkeit des oberen Zeichens:

$$K\left(\frac{-1}{\omega}\right) = K'(\omega), \quad K'\left(\frac{-1}{\omega}\right) = K(\omega).$$

Von (11) aus gewinnen wir jetzt unmittelbar als *neue Darstellungen unserer* K, K':

$$(13)\quad \begin{cases} K = (2\log 2 - \log k')\, F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1;\; 1 - k^2) - \tfrac{1}{2}\, F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2};\; 1 - k^2), \\ K' = \tfrac{\pi}{2}\, F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1;\; 1 - k^2), \end{cases}$$

gültig im Innern des Kreises vom Radius 1 um den Punkt $k^2 = 1$.

In ähnlicher Weise kann man durch Ausübung der Substitution ST die noch fehlenden drei Darstellungen der vollständigen Integrale als hypergeometrische Funktionen von k^2 gewinnen.

§ 6. Die elliptischen Funktionen zweiter Stufe als Funktionen zweier Argumente. Ausartungen.

Die elliptischen Funktionen erster Stufe waren homogene Funktionen der drei Argumente u, ω_1, ω_2 von einer im allgemeinen nicht verschwindenden Dimension (vgl. S. 318 ff.). Demgegenüber sind die zur zweiten Stufe gehörenden Funktionen der älteren Theorie, also die Funktionen sn, cn, dn, die ϑ-Funktionen, auch die *Al*-Funktionen, wie von vornherein hervorgehoben wurde (vgl. S. 387), in jenen drei Argumenten homogen von *nullter* Dimension. *Auf diese Weise werden jene Funktionen der zweiten Stufe solche von „zwei" Argumenten, dem Integral erster Gattung und dem Modul.* Bei den ϑ-Funktionen gaben wir den Argumenten die Gestalten v und q oder auch v und ω, bei den Funktionen sn, cn, dn und den *Al*-Funktionen treten in den Potenzreihen (vgl. S. 399 ff.) die Argumente w und k^2 auf, in den Produktentwicklungen und Fourierschen Reihen aber w und q.

Als Funktionen ihrer beiden Argumente v und ω befriedigten die ϑ-Funktionen die Differentialgleichung:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 \vartheta(v,q)}{\partial v^2} = 4i\pi\, \frac{\partial \vartheta(v,q)}{\partial \omega},$$

wie S. 421 aus den vier Thetareihen abgelesen wurde. Besteht diese Gleichung für eine der vier Thetafunktionen, so kann man sie für die

anderen drei auch auf Grund der Verwandlungstafel von S. 419 herleiten. *Übrigens ist die Gleichung* (1) *für die* ϑ_1*-Funktion natürlich nur eine auf diese Funktion umgerechnete Gestalt der Differentialgleichung* (11) S. 322 *der* σ*-Funktion.* Man kann nämlich diese Differentialgleichung mit Benutzung der S. 325 bewiesenen Relation:

$$(2) \qquad D_\eta(\eta_2) = -\tfrac{1}{12} g_2 \omega_2$$

leicht auf die Gestalt umrechnen:

$$\frac{12}{\sigma(u)} \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial u^2} + 2 D_\eta\left(\log\left(e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sigma(u)\right)\right) = \frac{\eta_2^2 u^2}{\omega_2^2}.$$

Aus der Beziehung (9) S. 416 zwischen $\sigma(u)$ und $\vartheta_1(v)$ ergibt sich durch zweimalige Differentiation nach u und nachherige Division mit jener Relation:

$$\frac{1}{\sigma(u)} \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial u^2} = \frac{1}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} + \frac{2\eta_2 u}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial v} + \frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{\eta_2^2 u^2}{\omega_2^2}.$$

Indem man andrerseits auf:

$$\log\left(e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sigma(u)\right) = \log \vartheta_1(v) - \tfrac{1}{8} \log \Delta - \tfrac{1}{2} \log \omega_2 + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

den Prozeß D_η anwendet, folgt wegen $D_\eta(\Delta) = 0$:

$$D_\eta\left(\log\left(e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sigma(u)\right)\right) = D_\eta\left(\log \vartheta_1(v)\right) - \frac{\eta_2}{2\omega_2}.$$

Im ersten Argumente $v = u\omega_2^{-1}$ der ϑ_1-Funktion ist ω_2 als Nenner enthalten; mit Rücksicht hierauf gilt:

$$D_\eta(\log \vartheta_1(v)) = \frac{\partial \log \vartheta_1(v)}{\partial v} u \, D_\eta(\omega_2^{-1}) + \frac{\partial \log \vartheta_1(v)}{\partial \omega} D_\eta(\omega),$$

$$D_\eta(\log \vartheta_1(v)) = -\frac{1}{\vartheta_1(v)} \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial v} \cdot \frac{u\eta_2}{\omega_2^2} - \frac{1}{\vartheta_1(v)} \cdot \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \omega} \cdot \frac{2i\pi}{\omega_2^2},$$

so daß wir finden:

$$2 D_\eta\left(\log\left(e^{-\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \sigma(u)\right)\right) = -\frac{2u\eta_2}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial v} - \frac{4i\pi}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \omega} - \frac{\eta_2}{\omega_2}.$$

Hiermit sind beide Glieder der linken Seite der Differentialgleichung für die σ-Funktion auf $\vartheta_1(v)$ transformiert, und jene Gleichung gewinnt damit die Gestalt:

$$\frac{1}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} - \frac{4i\pi}{\omega_2^2 \vartheta_1(v)} \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \omega} + \frac{\eta_2^2 u^2}{\omega_2^2} = \frac{\eta_2^2 u^2}{\omega_2^2}.$$

Nach Fortheben überflüssiger Bestandteile kommen wir damit tatsächlich zur Differentialgleichung (1) zurück.

Den drei Differentialgleichungen (1) für die geraden ϑ-Funktionen entsprechen Differentialgleichungen für die drei Funktionen zweiter Stufe $\sigma_\nu(u \mid \omega_1, \omega_2)$, welche man ohne Mühe aus der Differentialgleichung der ursprünglichen σ-Funktion herleitet. Eine größere Beachtung

haben die Differentialgleichungen gefunden, die den Gleichungen (1) entsprechend für die vier Al-Funktionen bestehen, und zwar deshalb, weil vermittelst dieser Differentialgleichungen die Potenzreihen der Al-Funktionen berechnet werden können (vgl. S. 403).

Um zunächst die Beziehungen zwischen den ϑ-Funktionen und den Al-Funktionen aufzustellen, hat man zwischen den Gleichungen (1) S. 401 und (9) S. 416 sowie (15) S. 417 die σ zu eliminieren. Mit Rücksicht auf das Verhalten unserer Funktionen für $u = 0$ folgt:

$$e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\vartheta_1(v) = \frac{\vartheta_1'}{2K} e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2} Al_1(w),$$
$$e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}\vartheta_\nu(v) = \vartheta_\nu \cdot e^{\frac{1}{6}(1+k^2)w^2} Al_\nu(w),$$

wo $\nu = 0, 2, 3$ zu nehmen ist und ϑ_1' der Nullwert der ersten Ableitung von $\vartheta_1(v)$, entsprechend den Nullwerten ϑ_ν der drei geraden ϑ-Funktionen, ist. Den linksseitigen Exponenten können wir mit Benutzung von (11) S. 372 so entwickeln:

$$\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} = \frac{w^2}{4K} \cdot \frac{\eta_2}{\sqrt{e_2 - e_1}} = \frac{w^2}{2K}\left(E - \frac{e_2}{e_2 - e_1} K\right).$$

Da wir den Quotienten der e in die Gestalt:

$$\frac{e_2}{e_2 - e_1} = \frac{3e_2}{3(e_2 - e_1)} = \frac{2e_2 - 2e_1 - (e_3 - e_1)}{3(e_2 - e_1)} = \frac{2 - k^2}{3}$$

umrechnen können, so folgt weiter:

$$\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} = \frac{w^2}{2K}(E - K) + \tfrac{1}{6}(1 + k^2)w^2.$$

Die Beziehungen zwischen den ϑ-Funktionen und den Al-Funktionen haben somit die Gestalt:

$$(3)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v) = \dfrac{\vartheta_1'}{2K} e^{\frac{K-E}{2K}w^2} Al_1(w), \\[2ex] \vartheta_\nu(v) = \vartheta_\nu \cdot e^{\frac{K-E}{2K}w^2} Al_\nu(w), \end{cases}$$

wo wieder $\nu = 0, 2, 3$ zu nehmen ist und unter $Al_0(w)$ die S. 401 mit $Al(w)$ bezeichnete Funktion verstanden ist. Für die auszuführende Rechnung ist es noch etwas zweckmäßiger, den Exponenten in v, den e und den ursprünglichen Perioden auszudrücken. Wir berechnen zu diesem Zwecke aus (11) S. 372:

$$\eta_2 + e_1\omega_2 = 2\sqrt{e_2 - e_1}\,(E - K)$$

und werden zu folgenden Gestalten der Gleichungen (3) geführt:

$$(4)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v) = \dfrac{\vartheta_1'}{2K} e^{-\frac{1}{2}\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)v^2} Al_1(w), \\[2ex] \vartheta_\nu(v) = \vartheta_\nu e^{-\frac{1}{2}\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)v^2} Al_\nu(w), \qquad (\nu = 0, 2, 3). \end{cases}$$

Um zunächst für $\nu = 0, 2$ und 3 die Gleichung (1) auf die entsprechende Al-Funktion zu transformieren, haben wir zu berücksichtigen, daß $w = v \cdot \omega_2 \sqrt{e_2 - e_1}$ von v *und* ω abhängt, und folgern aus der zweiten Gleichung (4) unter Fortlassung des Index ν erstlich durch zweimalige Differentiation nach v:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} = \vartheta e^{-\frac{1}{2}\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)v^2}\Big\{\omega_2^2(e_2 - e_1)\frac{\partial^2 Al(w)}{\partial w^2} - 2\omega_2^2\sqrt{e_2 - e_1}$$
$$\cdot (\eta_2 + e_1\omega_2)v\frac{\partial Al(w)}{\partial w} - (\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2) - \omega_2^2(\eta_2 + e_1\omega_2)^2 v^2)Al(w)\Big\},$$

sodann durch einmalige Differentiation nach ω:

$$\frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \omega} = \vartheta e^{-\frac{1}{2}\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)v^2}\Big\{\frac{d\log\vartheta}{d\omega}Al(w) - \tfrac{1}{2}v^2\frac{d[\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)]}{d\omega}Al(w)$$
$$+ \frac{\partial Al(w)}{\partial w}\cdot v \cdot \frac{d(\omega_2\sqrt{e_2 - e_1})}{d\omega} + \frac{\partial Al(w)}{\partial(k^2)}\cdot\frac{d(k^2)}{d\omega}\Big\}.$$

Zur Bestimmung der in der letzten Gleichung auftretenden Ableitungen nach ω wenden wir den Prozeß D_η auf $\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)$ an:

$$D_\eta(\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)) = (\eta_2 + e_1\omega_2)D_\eta(\omega_2) + \omega_2(D_\eta(\eta_2) + D_\eta(e_1\omega_2)).$$

$D_\eta(\omega_2)$ ist gleich η_2, $D_\eta(\eta_2)$ bestimmt sich aus (2), und für $D_\eta(e_1\omega_2)$ gilt bei Benutzung der ersten Gleichung (2) S. 461:

$$D_\eta(e_1\omega_2) = e_1\eta_2 - \tfrac{2}{3}\omega_2(e_1^2 + 2e_2e_3);$$

also folgt:

$$D_\eta(\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)) = \eta_2(\eta_2 + e_1\omega_2) + e_1\omega_2\eta_2 - \tfrac{1}{3}\omega_2^2(\tfrac{1}{4}g_2 + 2e_1^2 + 4e_2e_3).$$

Ersetzen wir $\frac{1}{4}g_2$ durch seinen Ausdruck $(e_1^2 - e_2e_3)$ in den e, so können wir hierfür auch schreiben:

$$D_\eta(\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)) = (\eta_2 + e_1\omega_2)^2 - \omega_2^2(2e_1^2 + e_2e_3).$$

Nun ist aber $\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)$ vom Periodenquotienten ω allein abhängig, so daß andererseits:

$$D_\eta(\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)) = \frac{d[\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)]}{d\omega}D_\eta(\omega) = -\frac{2i\pi}{\omega_2^2}\cdot\frac{d[\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)]}{d\omega}$$

gilt. Wir ziehen hieraus die Folgerung:

$$\frac{d[\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)]}{d\omega} = -\frac{\omega_2^2}{2i\pi}((\eta_2 + e_1\omega_2)^2 - \omega_2^2(2e_1^2 + e_2e_3)).$$

Durch eine ähnliche jedoch weit kürzere Rechnung findet man:

$$\frac{d(\omega_2\sqrt{e_2 - e_1})}{d\omega} = -\frac{\omega_2^2}{2i\pi}(\eta_2 + e_3\omega_2)\sqrt{e_2 - e_1},$$

während man aus der zweiten Formel (5) S. 449 leicht ableitet:

$$\frac{d(k^2)}{d\omega} = -\frac{\omega_2^2}{\pi i}(e_2 - e_3)k^2 = -\frac{\omega_2^2}{\pi i}(e_3 - e_1)k'^2.$$

Unter Benutzung dieser Zwischenresultate folgert man aus den oben

vorbereiteten Gleichungen für die Ableitungen der Funktion ϑ nach v und ω:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} - 4 i\pi \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \omega} = \vartheta \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2)v^2} \Big\{ \omega_2^2(e_2 - e_1)\frac{\partial^2 Al(w)}{\partial w^2}$$
$$+ 2\omega_2^2(e_3 - e_1) w \frac{\partial Al(w)}{\partial w} + 4\omega_2^2(e_3 - e_1)k'^2 \frac{\partial Al(w)}{\partial (k^2)}$$
$$+ \left(\omega_2^2 \cdot \frac{2e_1^2 + e_2 e_3}{e_2 - e_1} \cdot w^2 - \omega_2(\eta_2 + e_1\omega_2) - 4i\pi \frac{d \log \vartheta}{d\omega}\right) Al(w) \Big\}.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung identisch verschwindet, so folgt nach Division mit $\omega_2^2(e_2 - e_1)$ bei Benutzung von:

$$\frac{2e_1^2 + e_2 e_3}{(e_2 - e_1)^2} = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} = k^2$$

als Gleichung für die drei Funktionen Al_0, Al_2, Al_3:

$$\frac{\partial^2 Al_\nu(w)}{\partial w^2} + 2k^2 w \frac{\partial Al_\nu(w)}{\partial w} + 4k^2k'^2 \frac{\partial Al_\nu(w)}{\partial (k^2)}$$
$$+ \left(k^2 w^2 - \frac{1}{e_2 - e_1}\left(\frac{\eta_2}{\omega_2} + e_1 + \frac{4i\pi}{\omega_2^2}\frac{d \log \vartheta_\nu}{d\omega}\right)\right) Al_\nu(w) = 0.$$

Für $Al(w)$ gilt diese Gleichung ohne weiteres mit, wenn man entsprechend der ersten Gleichung (4) den Nullwert ϑ_ν durch $\frac{\vartheta_1'}{2K}$ ersetzt. Endlich gilt nach (9) S. 416 und (15) S. 417ff.:

$$\frac{\vartheta_1'}{2K} = \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}} \frac{\sqrt[8]{\varDelta}}{\sqrt{e_2 - e_1}}, \quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}, \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}} \sqrt[4]{e_3 - e_1}, \ \ldots$$

Also folgt z. B. für ϑ_0 mit Benutzung von (1) S. 461:

$$-2D_\eta(\log \vartheta_0) = \frac{4i\pi}{\omega_2^2}\frac{d \log \vartheta_0}{d\omega} = -D_\eta(\log \omega_2) - \tfrac{1}{2} D_\eta(\log(e_2 - e_3)),$$
$$\frac{4i\pi}{\omega_2^2}\frac{d \log \vartheta_0}{d\omega} = -\frac{\eta_2}{\omega_2} - e_1.$$

Ebenso erledigt man die anderen drei Fälle. *Als Differentialgleichungen der Al-Funktionen gewinnen wir so endlich:*

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Al(w)}{\partial w^2} + 2k^2 w \dfrac{\partial Al(w)}{\partial w} + 4k^2k'^2 \dfrac{\partial Al(w)}{\partial (k^2)} + k^2 w^2 Al(w) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_1(w)}{\partial w^2} + 2k^2 w \dfrac{\partial Al_1(w)}{\partial w} + 4k^2k'^2 \dfrac{\partial Al_1(w)}{\partial (k^2)} + (k'^2 + k^2 w^2) Al_1(w) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_2(w)}{\partial w^2} + 2k^2 w \dfrac{\partial Al_2(w)}{\partial w} + 4k^2k'^2 \dfrac{\partial Al_2(w)}{\partial (k^2)} + (1 + k^2 w^2) Al_2(w) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Al_3(w)}{\partial w^2} + 2k^2 w \dfrac{\partial Al_3(w)}{\partial w} + 4k^2k'^2 \dfrac{\partial Al_3(w)}{\partial (k^2)} + (k^2 + k^2 w^2) Al_3(w) = 0. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen liefern nun in der Tat leicht Rekursionsformeln zur Berechnung der Koeffizienten der Al-Reihen. Tragen wir z. B. die schon S. 403 angesetzte Reihe:

$$Al_1(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \frac{w^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

in die zweite Gleichung (5) ein und ordnen das Ergebnis nach Potenzen von w, so gelangen wir, da die entspringende Potenzreihe identisch verschwinden muß, durch Nullsetzen des Koeffizienten von $w^{2\nu+1}$ zu der Rekursionsformel:

$$A_{\nu+1} = -4k^2(1-k^2)\frac{dA_\nu}{d(k^2)} - (1+k^2+4\nu k^2)A_\nu - 2\nu(2\nu+1)k^2 A_{\nu-1}.$$

Aus den beiden Anfangskoeffizienten $A_0 = 1$ und $A_1 = -1-k^2$ sind demnach alle weiteren mittelst dieser Formel berechenbar, und wir finden Bestätigungen der S. 403 über die Al_1-Reihe gemachten Angaben. Die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der drei anderen Al-Reihen lauten bei Benutzung der S. 403 angegebenen Reihenansätze:

$$B_{\nu+1} = -4k^2(1-k^2)\frac{dB_\nu}{d(k^2)} - (1+4\nu k^2)B_\nu - 2\nu(2\nu-1)k^2 B_{\nu-1},$$

$$C_{\nu+1} = -4k^2(1-k^2)\frac{dC_\nu}{d(k^2)} - (4\nu+1)k^2 C_\nu - 2\nu(2\nu-1)k^2 C_{\nu-1},$$

$$D_{\nu+1} = -4k^2(1-k^2)\frac{dD_\nu}{d(k^2)} - 4\nu k^2 D_\nu - 2\nu(2\nu-1)k^2 D_{\nu-1},$$

vermittelst deren man aus den Anfangswerten:

$$B_0 = C_0 = D_0 = 1, \quad B_1 = -1, \quad C_1 = -k^2, \quad D_1 = 0$$

die weiteren Koeffizienten berechnen kann.

Wir schließen hier noch einen Überblick über die gesamten Körper elliptischer Funktionen zweiter Stufe an, wobei wir, wie wiederholt bemerkt wurde, w und k^2 oder auch w und $\omega = \frac{iK'}{K}$ als die unabhängigen Variabeln der elliptischen Funktionen zweiter Stufe anzusehen haben. Bei stehendem Werte k^2 bzw. ω haben wir ein System von drei koordinierten Körpern elliptischer Funktionen, darstellbar durch die Körper der rationalen Funktionen:

$$R(\operatorname{sn} w,\ \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w), \quad R(\operatorname{cn} w,\ \operatorname{dn} w \cdot \operatorname{sn} w), \quad R(\operatorname{dn} w,\ \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w);$$

gemeinsam enthalten sind diese drei Funktionenkörper in dem der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe innerhalb der $\Gamma^{(u)}$ entsprechenden, aus den rationalen Funktionen:

$$R(\operatorname{sn} w, \operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w)$$

bestehenden Körper elliptischer Funktionen (vgl. S. 385) *Wir erschöpfen offenbar die Gesamtheit aller existierenden Funktionenkörper dieser Art, indem wir k^2 alle komplexen Werte durchlaufen lassen, oder (was auf dasselbe hinauskommt) indem wir ω den Diskontinuitätsbereich* (Fig. 82, S. 440) *der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$ beschreiben lassen.*

Den drei Spitzen dieses Diskontinuitätsbereiches entsprechen drei

Ausartungen der elliptischen Funktionen, welche wir leicht vom Integral erster Gattung zweiter Stufe:

$$(6) \qquad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

aus charakterisieren und zum Teil wenigstens durch die früher aufgestellten Reihenentwicklungen unserer Funktionen bestätigen können. Den drei Bereichspitzen $\omega = i\infty$, 0 und -1 entsprechen die Werte $k^2 = 0, 1$ und ∞. Für $k^2 = 0$ folgt aus (6):

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z, \qquad z = \sin w,$$

so daß die elliptischen Funktionen in trigonometrische ausarten:

$$(7) \qquad \operatorname{sn} w = \sin w, \qquad \operatorname{cn} w = \cos w, \qquad \operatorname{dn} w = 1.$$

Im Falle $k^2 = 1$ ergibt die Gleichung (6):

$$w = \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z = \mathfrak{Tg}\, w,$$

so daß jetzt die elliptischen Funktionen in hyperbolische ausarten:

$$(8) \qquad \operatorname{sn} w = \mathfrak{Tg}\, w, \quad \operatorname{cn} w = \operatorname{dn} w = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, w}.$$

Nur der dritte Fall $\omega = -1$ und $k^2 = \infty$ macht einige Umstände, da in dieser dritten Bereichecke der Nullpunkt der Modulform $(e_2 - e_1)$ zweiter Stufe liegt (vgl. S. 448) und also (sofern wir $\omega_1 = -\omega_2$ endlich gewählt denken) w, K und iK' identisch mit 0 werden. Für $\lim k^2 = \infty$ ist dies Verschwinden aber ein solches, daß z. B.

$$k(w - iK') = \left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sqrt{e_3 - e_1} = w'$$

für $\lim k^2 = \infty$ eine nicht identisch verschwindende Variabele ist, falls u willkürlich variabel ist. Formen wir demnach vorerst für beliebiges k^2 die Gleichung (6) um in:

$$w' = k(w - iK') = \int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(\frac{1}{k^2} - z^2\right)}},$$

so erhalten wir für $\lim k^2 = \infty$:

$$w' = \int_\infty^z \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = -\arcsin\left(\frac{1}{z}\right),$$

so daß die elliptischen Funktionen für $\omega = -1$ wieder in trigonometrische Funktionen von w' ausarten.

Der Integralmodul k^2 bleibt als Modulfunktion zweiter Stufe bei allen Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_6^{(\omega)}$ unverändert. Dasselbe wird demnach von den Al-Funktionen sowie den Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ gelten, wenn wir sie als Funktionen der Variabelen w und k^2 ansehen und nur k^2, aber nicht w als von den Perioden ω_1, ω_2 abhängig betrachten. Indessen entspricht dieser Standpunkt nicht unserer ursprünglichen Erklärung einer elliptischen Funktion zweiter Stufe (vgl. 376), welche sich auf die Abhängigkeit von u, ω_1, ω_2 bezieht. Alsdann nämlich ist $w = u\sqrt{e_2 - e_1}$ das Produkt des ersten Argumentes u und der Modulform vierter Stufe der Dimension -1:

$$(9) \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{2kk'(e_2 - e_1)},$$

die zufolge der Entwicklungen von S. 454ff. bei einer beliebigen Substitution der „homogenen“ $\Gamma_6^{(\omega)}$ den Faktor $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ annimmt. Um den gleichen Faktor wird sich also w ändern, *so daß im strengen Sinne nur erst die „geraden“ Funktionen von w zur zweiten Stufe gehören würden, während* $\operatorname{sn} w$ *und* $Al_1(w)$ *genau genommen als elliptische Funktion „vierter“ Stufe (erster bzw. dritter Art) zu bezeichnen sind.*

Die zu $n = 2$ gehörenden Funktionen $\sigma_{gh}(u \mid \omega_1, \omega_2)$, welche zufolge (5) S. 451 gegenüber einer mod. 4 mit 1 kongruenten homogenen Substitution das Verhalten zeigen:

$$\sigma_{gh}(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = (-1)^{\frac{\beta}{4}g + \frac{\gamma}{4}h + \frac{\delta-\alpha}{4}gh}\sigma_{gh}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

erweisen sich demgemäß als *elliptische Funktionen (dritter Art) „achter“ Stufe.*

Eine Sonderstellung aber nehmen die Thetafunktionen ein wegen der in ihren Definitionsgleichungen (9) S. 416 und (15) S. 417 auftretenden Faktoren:

$$\sqrt[8]{\Delta}, \qquad \sqrt[4]{e_2 - e_3}, \qquad \sqrt[4]{e_3 - e_1}, \qquad \sqrt[4]{e_2 - e_1},$$

welche nicht mehr eindeutige Modulformen sind. Hierauf werden wir noch ausführlich zurückkommen müssen.

§ 7. Verhalten der elliptischen Funktionen zweiter Stufe bei beliebigen Periodensubstitutionen.

Es bleibt jetzt noch übrig festzustellen, wie sich die elliptischen Funktionen bei beliebigen Substitutionen der homogenen Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ verhalten. Betrachten wir zunächst die drei Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$, so sind sie nach S. 389 aus den Funktionen erster Stufe und den e_1, e_2, e_3 durch Quadratwurzeln berechenbar. Da die Funktionen erster Stufe gegenüber der $\Gamma^{(\omega)}$ invariant sind und die e_1, e_2, e_3 sich bei den

Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ nur permutieren, so hängen die transformierten Funktionen in einfachster Weise algebraisch mit den ursprünglichen zusammen. Wegen der Permutationen der e_1, e_2, e_3 kommen wir für das Quadrat $z = (\operatorname{sn} w)^2$ und $\lambda = k^2$ einfach auf die sechs in (15) S. 364 dargestellten, eine Diëdergruppe G_6 bildenden Paare linearer Substitutionen von z und λ zurück. Da die Funktionen $\operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w$ zur zweiten Stufe gehören, so werden diese Funktionen gegenüber der $\Gamma^{(\omega)}$ eine diëdrische G_6 von Transformationen bilden; *nehmen wir jedoch* $\operatorname{sn} w$ *hinzu, so wird das Funktionssystem* $\operatorname{sn} w, \operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w$, *das zu der durch die Kongruenzen:*

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad 2\beta \equiv 2\gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 4)$$

erklärten Kongruenzgruppe „vierter" Stufe gehört, gegenüber der „homogenen" $\Gamma^{(\omega)}$ *„zwölf" eine Gruppe* G_{12} *bildende Transformationen liefern.*

Um die Gestalt dieser Transformationen anzugeben, wolle man in Gleichung (4) S. 384 die Weierstraßschen Funktionen $\sigma_k(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$ durch die drei zu $n = 2$ gehörenden Kleinschen $\sigma_{gh}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$ ersetzen, wobei wir an Stelle von (4) S. 384 besser:

$$\psi_{gh}(u \,|\, \omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_{gh}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)}{\sigma_{gh}(\omega_1, \omega_2)\, \sigma(u \,|\, \omega_1, \omega_2)}$$

schreiben. Für die Funktionen sn, cn und dn, welche wir als solche von w und k^2 auffassen, haben wir dann die Darstellungen:

$$\operatorname{sn}(w, k^2) = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\psi_{10}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)},$$

$$\operatorname{cn}(w, k^2) = \frac{\psi_{01}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)}{\psi_{10}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)},$$

$$\operatorname{dn}(w, k^2) = \frac{\psi_{11}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)}{\psi_{10}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)}.$$

Gegenüber einer Substitution der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ gilt zufolge (3) S. 451 mit Rücksicht auf die Invarianz von $\sigma(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$:

$$\psi_{gh}(u \,|\, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \psi_{\alpha g + \gamma h,\, \beta g + \delta h}(u \,|\, \omega_1, \omega_2),$$

wobei wir rechter Hand die transformierten Indizes zufolge (4) S. 451 beliebig mod. 2 reduzieren dürfen.

Die Wirkung der homogenen Substitutionen S und T (vgl. (4) S. 298) auf die Modulform vierter Stufe $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension $\sqrt{e_2 - e_1}$ bestimmt sich aus der Darstellung (9) S. 473 derselben mittels der Regeln (9) S. 453 sowie (16) und (17) S. 456. Man findet:

$$(S) \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = \frac{\sqrt[4]{\Delta} \cdot k'^2}{2k(e_2 - e_3)} = k' \sqrt{e_2 - e_1},$$

$$(T) \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = \frac{-i\sqrt[4]{\Delta}}{2kk'(e_1 - e_3)} = i\sqrt{e_2 - e_1},$$

so daß sich entsprechend w in $k'w$ bzw. iw transformiert. Demnach haben wir als Wirkung der homogenen Substitution S:

$$(S)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = k' \cdot \frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}\left(k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \frac{\operatorname{cn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{dn}\left(k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \end{cases}$$

während sich als Wirkung von T anreiht:

$$(T)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(iw, 1-k^2) = i\,\frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}(iw, 1-k^2) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{dn}(iw, 1-k^2) = \frac{\operatorname{dn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}. \end{cases}$$

Die Transformation (S) ist von der Periode 2, dagegen ist (T) von der Periode 4, indem T^2 die symbolisch durch -1 zu bezeichnende Transformation:

$$\operatorname{sn}(-w, k^2) = -\operatorname{sn}(w, k^2), \quad \operatorname{cn}(-w, k^2) = \operatorname{cn}(w, k^2), \quad \operatorname{dn}(-w, k^2) = \operatorname{dn}(w, k^2)$$

liefert. *Für die gesamten zwölf Transformationen der zu den* sn, cn, dn *gehörenden Gruppe* G_{12} *berechnen wir durch Wiederholung und Kombination der „erzeugenden" Transformationen (S) und (T)*:

$$(\pm 1)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(\pm w, k^2) = \pm \operatorname{sn}(w, k^2), \\ \operatorname{cn}(\pm w, k^2) = \operatorname{cn}(w, k^2), \quad \operatorname{dn}(\pm w, k^2) = \operatorname{dn}(w, k^2), \end{cases}$$

$$(\pm S)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\pm k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \pm k' \cdot \frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}\left(\pm k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \frac{\operatorname{cn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \quad \operatorname{dn}\left(\pm k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \end{cases}$$

$$(\pm T)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(\pm iw, 1-k^2) = \pm i\,\frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}(\pm iw, 1-k^2) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \quad \operatorname{dn}(\pm iw, 1-k^2) = \frac{\operatorname{dn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \end{cases}$$

$$(\pm ST)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\pm ikw, \frac{k^2-1}{k^2}\right) = \pm ik\,\frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}\left(\pm ikw, \frac{k^2-1}{k^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \quad \operatorname{dn}\left(\pm ikw, \frac{k^2-2}{k^2}\right) = \frac{\operatorname{cn}(w, k^2)}{\operatorname{dn}(w, k^2)}, \end{cases}$$

$$(\pm STS)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\mp kw, \frac{1}{k^2}\right) = \mp k \operatorname{sn}(w, k^2), \\ \operatorname{cn}\left(\mp kw, \frac{1}{k^2}\right) = \operatorname{dn}(w, k^2), \quad \operatorname{dn}\left(\mp kw, \frac{1}{k^2}\right) = \operatorname{cn}(w, k^2), \end{cases}$$

$$(\pm STST)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\mp ik'w, \frac{1}{1-k^2}\right) = \mp ik'\,\frac{\operatorname{sn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \\ \operatorname{cn}\left(\mp ik'w, \frac{1}{1-k^2}\right) = \frac{\operatorname{dn}(w, k^2)}{\operatorname{cn}(w, k^2)}, \quad \operatorname{dn}\left(\mp ik'w, \frac{1}{1-k^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w, k^2)}. \end{cases}$$

Wie es sein muß, bilden die auf die Funktionen cn und dn allein bezogenen Transformationspaare für sich eine Gruppe G_6 der Ordnung 6.

Die Al-Funktionen verhalten sich gruppentheoretisch genau so wie die Funktionen sn, cn und dn. Zufolge (1) S. 401 haben wir mittelst der Funktionen $\psi_{gh}(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$ die Darstellungen:

$$Al_1(w, k^2) = e^{-\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\sqrt{e_2 - e_1}\,\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2),$$
$$Al_2(w, k^2) = e^{-\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\psi_{01}(u\,|\,\omega_1, \omega_2)\cdot\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2),$$
$$Al_3(w, k^2) = e^{-\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\psi_{11}(u\,|\,\omega_1, \omega_2)\cdot\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2),$$
$$Al(w, k^2) = e^{-\frac{1}{6}(1+k^2)w^2}\psi_{10}(u\,|\,\omega_1, \omega_2)\cdot\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2).$$

Die Funktion Al_1 geht bei allen zwölf Transformationen bis auf einen Faktor in sich selbst über:

$$Al_1(\pm w, k^2) = \pm Al_1(w, k^2),$$
$$Al_1\left(\pm k'w, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \pm k' e^{\frac{1}{2}k^2w^2} Al_1(w, k^2),$$
$$Al_1(\pm iw, 1-k^2) = \pm i e^{\frac{1}{2}w^2} Al_1(w, k^2),$$
$$Al_1\left(\pm ikw, \frac{k^2-1}{k^2}\right) = \pm ik e^{\frac{1}{2}k^2w^2} Al_1(w, k^2),$$
$$Al_1\left(\mp kw, \frac{1}{k^2}\right) = \mp k\, Al_1(w, k^2),$$
$$Al_1\left(\mp ik'w, \frac{1}{1-k^2}\right) = \mp ik' e^{\frac{1}{2}w^2} Al_1(w, k^2).$$

Die drei geraden Funktionen Al_2, Al_3, Al liefern wieder eine Darstellung der G_6, welche abgesehen von zutretenden Exponentialfaktoren aus den sechs Permutationen dieser drei Funktionen besteht. Man wird die betreffenden Formeln leicht aus den Darstellungen der Al durch die ψ_{gh} oder auch auf Grund der Relationen:

$$Al_2 = \frac{\mathrm{cn}}{\mathrm{sn}} Al_1, \quad Al_3 = \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{sn}} Al_1, \quad Al = \frac{Al_1}{\mathrm{sn}}$$

aus den bisherigen Resultaten ableiten. Ganz besonders einfach fällt die der Substitution $-STS$ entsprechende Transformation aus:

$$Al_1\left(kw, \frac{1}{k^2}\right) = k\,Al_1(w, k^2), \quad Al_2\left(kw, \frac{1}{k^2}\right) = Al_3(w, k^2),$$
$$Al_3\left(kw, \frac{1}{k^2}\right) = Al_2(w, k^2), \qquad Al\left(kw, \frac{1}{k^2}\right) = Al(w, k^2).$$

Die für die elliptischen Funktionen zweiter Stufe hiermit gewonnenen Ergebnisse müssen sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklungen dieser Funktionen (vgl. S. 399ff.) bestätigen lassen. Um dies an einem

einfachen Beispiele auszuführen, benutzen wir etwa für die Al_1-Funktion den Ansatz:

$$Al_1(w, k^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k^2) \frac{w^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

und wenden hierauf die erste der vier zuletzt angegebenen Transformationen an. Es ergibt sich als identische Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) k^{2\nu+1} \cdot \frac{w^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(k^2) k \cdot \frac{w^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

woraus wir ablesen:

$$k^{2\nu} \cdot A_\nu\left(\frac{1}{k^2}\right) = A_\nu(k^2)$$

in Übereinstimmung mit der ersten Relation (10 S. 404. Die drei anderen Relationen (10) S. 404 gewinnt man auf demselben Wege aus der Wirkung der Substitution $-STS$ auf die Funktionen Al_2, Al_3 und Al.

§ 8. Verhalten der Thetafunktionen bei beliebigen Periodensubstitutionen.

Die vier Thetafunktionen $\vartheta_\nu(v, q)$ stellen sowohl als Funktionen ihres ersten Argumentes v wie auch namentlich in reihentheoretischer Hinsicht (vgl. (16) und (17) S. 418) Gebilde von besonders einfacher Beschaffenheit dar, und sie sind dementsprechend von früh an (bei Gauß und Jacobi) als wesentliche Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen in Anspruch genommen. Um so interessanter ist es, *daß bei der Untersuchung des Verhaltens der Thetafunktionen gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe $\Gamma^{(\omega)}$ die Theorie der eindeutigen Modulfunktionen, die uns in den voraufgehenden Entwicklungen alle Fragen zu beantworten gestattete, nicht mehr völlig zureichend ist.* Es ist dies in dem schon am Ende des vorletzten Paragraphen erwähnten Umstande begründet, daß in den Gleichungen (9) und (15) S. 416ff., welche den Übergang von der Sigmafunktion zu den Thetafunktionen darstellen, die Größen $\sqrt[8]{\Delta}$, $\sqrt[4]{e_i - e_k}$ auftreten, welche von gebrochener Dimension in den ω_1, ω_2 sind und *nicht mehr eindeutige* Modulformen darstellen. Die Eindeutigkeit der Thetafunktionen selber in v und q oder in v und ω wird erst wieder durch den Zusatz der Wurzel $\sqrt{\omega_2}$ erzielt. Die Größen $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}$ und $\sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_i - e_k}$ sind dann zwar wieder eindeutig in ω_1, ω_2 bzw. in ω, haben aber den Charakter von Modulformen verloren und entziehen sich den in der Theorie der Modulfunktionen gebräuchlichen, auf Kongruenzen gegründeten gruppentheoretischen Betrachtungen. Daß die Theorie der elliptischen Funktionen bei einer so

elementaren Frage, wie sie durch das Problem des Verhaltens der Thetafunktionen gegenüber der $\Gamma^{(\omega)}$ dargestellt wird, über die sonst so zugkräftige Stufentheorie hinausragt, darf als eine der bemerkenswertesten Tatsachen angesehen werden, denen wir im Laufe unserer Entwicklungen begegnet sind.

Das Verhalten der Thetaquotienten gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ können wir sofort angeben. Schreiben wir, was für die gegenwärtige Untersuchung zweckmäßiger ist, nicht v und q, sondern $\frac{u}{\omega_2}$ und ω als Argumente der Thetafunktionen, so ergeben sich aus (27) S. 420 in Verbindung mit den Darstellungen der sn, cn, dn durch die ψ_{gh} (vgl. S. 474) die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{e_2 - e_1}}\,\psi_{10}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)} = \frac{1}{\sqrt{k'}\sqrt{e_2 - e_1}}\,\psi_{01}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k'}\sqrt{e_2 - e_1}}\,\psi_{11}(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Die $\psi_{gh}(u \mid \omega_1, \omega_2)$ sind drei Funktionen zweiter Stufe, die gegenüber den sechs inkongruenten Substitutionen ihre sechs Permutationen erfahren (vgl. 474). Ferner ist $\sqrt{e_2 - e_1}$ eine eindeutige Modulform der vierten Stufe, deren Verhalten gegenüber beliebigen homogenen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 auf Grund der Darstellung (9) S. 473 aus dem entsprechenden Verhalten von $\sqrt[4]{\Delta}$, kk' und $(e_2 - e_1)$ folgt.[1]) Für die sechs mod. 2 zu unterscheidenden Systeme von Substitutionen finden wir unter Einhaltung der in der Tabelle S. 459 vorliegenden Reihenfolge leicht folgende Darstellungen der transformierten Werte $\sqrt{e_2' - e_1'}$ der Modulform $\sqrt{e_2 - e_1}$:

$$\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}, \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = (-1)^{\frac{\alpha - 1}{2}}\sqrt{e_2 - e_1},$$

$$\begin{pmatrix}1, 0\\1, 1\end{pmatrix}, \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}}\,k\sqrt{e_2 - e_1},$$

$$\begin{pmatrix}0, 1\\1, 0\end{pmatrix}, \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = i^{\beta}\sqrt{e_2 - e_1},$$

$$\begin{pmatrix}0, 1\\1, 1\end{pmatrix}, \quad \sqrt{e_2' - e_1'} = i^{\gamma + 2}\,k'\sqrt{e_2 - e_1},$$

---

1) S. insbesondere (10) S. 454 und die Tabelle S. 459.

$$\begin{pmatrix}1,1\\1,0\end{pmatrix},\quad \sqrt{e_3'-e_1'} = i^{\beta}\, k\sqrt{e_2-e_1},$$

$$\begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix},\quad \sqrt{e_2'-e_1'} = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, k'\sqrt{e_2-e_1}.\text{[1]}$$

Endlich sind $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$ Modulfunktionen achter Stufe, deren Verhalten gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ S. 459 tabellarisch zusammengestellt ist. Hieraus ergibt sich, wenn wir unsere drei Thetaquotienten der Kürze halber ohne Angabe der Argumente durch $\left(\frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_1}\right)$ bezeichnen und unter ε die achte Einheitswurzel $e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ verstehen, unmittelbar folgendes Resultat: *Die drei Thetaquotienten sind elliptische Funktionen achter Stufe, die gegenüber den sechs mod. 2 zu unterscheidenden Systemen der „homogenen" Substitutionen das Verhalten zeigen:*

	$\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)'$	$\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)'$	$\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)'$
$\begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix}$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{-\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{-\alpha\beta+\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$
$\begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix}$	$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\varepsilon^{\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\varepsilon^{\alpha\beta+\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$
$\begin{pmatrix}0,1\\1,0\end{pmatrix}$	$i^{-\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$	$i^{-\beta}\varepsilon^{-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$	$i^{-\beta}\varepsilon^{\alpha\beta-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$
$\begin{pmatrix}0,1\\1,1\end{pmatrix}$	$i^{2-\gamma}\varepsilon^{-\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$	$i^{2-\gamma}\varepsilon^{-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$	$i^{2-\gamma}\varepsilon^{-\alpha\beta-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$
$\begin{pmatrix}1,1\\1,0\end{pmatrix}$	$i^{-\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$	$i^{-\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$	$i^{-\beta}\varepsilon^{\alpha\beta+\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$
$\begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix}$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{-\alpha\beta}\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)$	$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\varepsilon^{-\alpha\beta-\gamma\delta}\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)$

Auch die Quadrate der Thetafunktionen und damit überhaupt deren Produkte zu zweien sind den bisherigen Methoden ohne Rest zugänglich. Mit Rücksicht auf die vorstehende Tabelle brauchen wir das Verhalten nur eines einzigen Thetaquadrates gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ anzugeben; wir wählen zu diesem Zwecke das Quadrat der ϑ_1-Funktion, für welches wir aus (9) S. 416 die Darstellung ablesen:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2},\omega\right)^2 = \frac{\omega_2}{2\pi}\sqrt[4]{\Delta}\, e^{-\frac{\eta_2}{\omega_2}u^2}\,\sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)^2.$$

1) In einigen Fällen hat man ein paar einfache Kongruenzbetrachtungen im Anschluß an $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1 \pmod{4}$ auszuführen, um die einfachen Gestalten der Gleichungen des Textes zu gewinnen.

Abgesehen von Bestandteilen der Transformationsformel, welche von ω_2 und dem Exponentialfaktor herrühren, tritt also hier nur wieder dieselbe vierte Einheitswurzel auf, welche wir in (10) S. 454 für $\sqrt[4]{\Delta}$ bestimmten. Um die Einheitswurzel in eine bequemere Gestalt setzen zu können, unterscheiden wir die beiden Fälle einer ungeraden und einer geraden Zahl α. *Das Quadrat der ϑ_1-Funktion zeigt gegenüber einer beliebigen Substitution der Gruppe $\Gamma^{(\omega)}$ das Verhalten:*

$$(1)\ \vartheta_1\left(\frac{u}{\gamma\omega_1+\delta\omega_2}, \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, i^{\alpha(\beta-\gamma)}(\gamma\omega+\delta)\, e^{\frac{2\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)^2, \\ (-1)^{\frac{\alpha}{2}}\, i^{\gamma(\delta+1)}(\gamma\omega+\delta)\, e^{\frac{2\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)^2, \end{cases}$$

wo der erste Ausdruck bei ungeradem und der zweite bei geradem α gilt. Bei Herstellung des Exponentialfaktors rechter Hand ist von der Legendreschen Relation (6) S. 160 Gebrauch gemacht.

Für eine Substitution der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$ ist $\alpha \equiv \delta$ (mod. 4), und übrigens sind β und γ gerade, α ungerade. Die erste Formel (1) können wir in diesem Falle so schreiben.

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2'}, \omega'\right)^2 = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\, i^{\beta-\gamma}\, (\gamma\omega+\delta)\, e^{\frac{2\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)^2.$$

Da man entsprechend für die ϑ_3-Funktion aus der Tabelle:

$$\left(\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2'}, \omega'\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2'}, \omega'\right)}\right)^2 = i^{-\beta+\gamma} \left(\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)}\right)^2$$

abliest, so zeigt gegenüber der $\Gamma_6^{(\omega)}$ die ϑ_3-Funktion das besonders einfache Verhalten:

$$(2)\ \vartheta_3\left(\frac{u}{\gamma\omega_1+\delta\omega_2}, \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\beta}\right)^2 = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\, (\gamma\omega+\delta)\, e^{\frac{2\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}}\, \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)^2.$$

Indem wir nun an die ersten Potenzen der Thetafunktionen herangehen, können wir zunächst nur die Wirkung der erzeugenden Substitutionen S und T der homogenen $\Gamma^{(\omega)}$ feststellen. Für die Substitution S lehrt ein Blick auf die Reihen (17) S. 418 unmittelbar:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega+1\right) = \varepsilon\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega+1\right) = \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega+1\right) = \varepsilon\vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega+1\right) = \vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right); \end{cases}$$

wir haben hier die ungerade ϑ-Funktion vorangestellt und verstehen übrigens unter ε wieder die achte Einheitswurzel $e^{\frac{\pi i}{4}}$. Für T lesen wir aus der Gleichung (1) ab:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = \pm\, \varepsilon^{-1} \sqrt{-\omega}\; e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_1 \omega_2}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Für die hier und weiterhin auftretenden Wurzeln $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$, welche für $\gamma \lesseqgtr 0$ bei den auf das Innere der positiven ω-Halbebene beschränkten Werten ω niemals rein imaginär werden können, treffen wir die Bestimmung, *daß unter $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ für $\gamma \lesseqgtr 0$ stets der eindeutig bestimmte, einen „positiven" reellen Bestandteil besitzende Wert gemeint sein soll.* Dann ist (wegen der Eindeutigkeit der Thetafunktionen) im vorstehenden Ansatze nur ein bestimmtes unter den beiden Vorzeichen der rechten Seite gültig. Um das richtige Vorzeichen zu finden, üben wir auf die erste Gleichung (3) die homogene Substitution T aus:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{-\omega+1}{-\omega}\right) = \pm \sqrt{-\omega}\; e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2 \omega_1}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right),$$

womit wir also für die Wirkung von ST den Ansatz haben. Man beachte nun, daß $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ positiven oder negativen imaginären Bestandteil hat oder (wie wir sagen wollen) dem ersten oder vierten Quadranten der komplexen Ebene angehört, je nachdem $\gamma > 0$ oder < 0 ist. Reell kann $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$, sofern nicht $\gamma = 0$, $\delta = 1$ ist, nie werden; auch verbleibt $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ stets im gleichen Quadranten, falls wir ω durch einen bezüglich der $\Gamma^{(\omega)}$ äquivalenten Wert ersetzen. Wiederholen wir ST einmal, so folgt als Wirkung der homogenen Substitution $(ST)^2$ nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1 - \omega_2}, \frac{-1}{\omega - 1}\right) = \sqrt{\frac{\omega - 1}{-\omega}}\, \sqrt{-\omega}\; e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Es fragt sich dabei, welches Vorzeichen in

$$\sqrt{\frac{\omega - 1}{-\omega}} \cdot \sqrt{-\omega} = \pm \sqrt{\omega - 1}$$

zu gelten hat. Da nun die beiden Wurzeln linker Hand dem vierten Quadranten angehören, so kann ihr Produkt nicht im ersten Quadranten liegen; es gilt also das *untere* Zeichen:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1 - \omega_2}, \frac{-1}{\omega - 1}\right) = -\sqrt{\omega - 1}\; e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1 - \omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Jetzt übe man die homogene Substitution S aus und findet mit Benutzung des Umstandes, daß ϑ_1 ungerade ist:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}, \frac{-1}{\omega}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = -\varepsilon\sqrt{\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right),$$
$$\vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = +\varepsilon^{-1} i\sqrt{\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Nun ist aber, wie man sofort feststellt, $i\sqrt{\omega} = -\sqrt{-\omega}$, und also gilt in der oben für die Wirkung von T auf die ϑ_1-Funktion angesetzten Gleichung das untere Zeichen rechter Hand. Mit Rücksicht auf das Verhalten der ϑ-Quotienten folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = -\varepsilon^{-1}\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_0\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = +\varepsilon\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_2\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = +\varepsilon\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{1}{-\omega}\right) = +\varepsilon\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2\omega_1}}\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right). \end{cases}$$

Durch Wiederholung und Kombination der Transformationen (3) und (4) können wir schrittweise die Wirkung der übrigen Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ auf die ϑ-Funktionen feststellen. Es dürfte z. B. zweckmäßig sein, für ein besonderes System mod. 2 inkongruenter Substitutionen die Transformationen der ϑ aufzustellen, um hernach nur noch von der Wirkung der Substitutionen der Untergruppe $\Gamma_6^{(\omega)}$ handeln zu müssen. Die Substitutionen $1, S, T$ sind erledigt; für ST finden wir aus (3) und (4):

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{-\omega+1}{-\omega}\right) = -\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_1\omega_2}}\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_0\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{-\omega+1}{-\omega}\right) = \varepsilon\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_1\omega_2}}\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_2\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{-\omega+1}{-\omega}\right) = i\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_1\omega_2}}\vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{-\omega_1}, \frac{-\omega+1}{-\omega}\right) = \varepsilon\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_1\omega_2}}\vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \end{cases}$$

entsprechend für TS^{-1}:

$$(6)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1+\omega_2}, \frac{1}{-\omega+1}\right) = i\sqrt{-\omega+1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)}}\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_0\left(\frac{u}{-\omega_1+\omega_2}, \frac{1}{-\omega+1}\right) = \sqrt{-\omega+1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)}}\vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_2\left(\frac{u}{-\omega_1+\omega_2}, \frac{1}{-\omega+1}\right) = \varepsilon\sqrt{-\omega+1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)}}\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{-\omega_1+\omega_2}, \frac{1}{-\omega+1}\right) = \varepsilon\sqrt{-\omega+1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1-\omega_2)}}\vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \end{cases}$$

und endlich ergibt sich für STS:

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\frac{u}{-\omega_1-\omega_2}, \frac{-\omega}{-\omega-1}\right) &= -\varepsilon\sqrt{-\omega-1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)}}\, \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right),\\
\vartheta_0\left(\frac{u}{-\omega_1-\omega_2}, \frac{-\omega}{-\omega-1}\right) &= +\varepsilon\sqrt{-\omega-1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)}}\, \vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right),\\
\vartheta_2\left(\frac{u}{-\omega_1-\omega_2}, \frac{-\omega}{-\omega-1}\right) &= +i\sqrt{-\omega-1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)}}\, \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right),\\
\vartheta_3\left(\frac{u}{-\omega_1-\omega_2}, \frac{-\omega}{-\omega-1}\right) &= +i\sqrt{-\omega-1}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1+\omega_2)}}\, \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).
\end{aligned}\right.
$$

Würden wir nun das Verhalten der Thetafunktionen gegenüber einer beliebigen Substitution der homogenen $\Gamma_6^{(\omega)}$ kennen, so würden wir durch Kombination mit den vorstehenden Regeln auch das Verhalten der ϑ-Funktionen gegenüber jeder Periodensubstitution angeben können. Nun können wir durch Kombination der voraufgehenden Formeln das Verhalten der Thetafunktionen gegenüber den Erzeugenden der $\Gamma_6^{(\omega)}$ leicht feststellen; es wird indessen erst noch einer weiteren und interessanten Untersuchung bedürfen, um von hieraus einen allgemeinen Einblick in das Verhalten der Thetafunktionen gegenüber den Substitutionen der $\Gamma_6^{(\omega)}$ und damit der $\Gamma^{(\omega)}$ zu gewinnen.

§ 9. Allgemeines Gesetz über das Verhalten der Thetafunktionen bei Periodensubstitutionen.

Die nicht-homogene $\Gamma_6^{(\omega)}$ erzeugten wir aus den in (5) S. 437 gegebenen Substitutionen S' und T'. Die beiden homogenen Substitutionen $S' = \begin{pmatrix}1, 2\\ 0, 1\end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix}1, 0\\ -2, 1\end{pmatrix}$ erzeugen (mit ihren inversen Substitutionen) aber erst diejenige durch $\Gamma_{12}^{(\omega)}$ zu bezeichnende homogene Gruppe vierter Stufe, welche durch:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad 2\beta \equiv 2\gamma \equiv 0 \pmod{4}$$

erklärt ist und in den bisherigen Entwicklungen schon wiederholt auftrat. Aus ihr entsteht die homogene Kongruenzgruppe zweiter Stufe $\Gamma_6^{(\omega)}$ erst durch Zusatz der symbolisch durch -1 zu bezeichnenden homogenen Substitution $\begin{pmatrix}-1, 0\\ 0, -1\end{pmatrix}$.

Es zeigte sich nun oben (S. 480), daß sich die ϑ_3-Funktion gegenüber der $\Gamma_6^{(\omega)}$ besonders einfach verhält. Gegenüber $S'^{\pm 1}$ ist diese Funktion überhaupt invariant (vgl. (3) S. 480). Um die Wirkung von $T'^{\pm 1}$ festzustellen, ziehen wir aus der letzten Gleichung (4) S. 482 durch Anwendung von $S'^{\pm 1}$ die Folge:

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{-\omega_1 \mp 2\omega_2}, \frac{-1}{\pm 2+\omega}\right) = \varepsilon\sqrt{-\omega \mp 2}\, e^{\frac{\pi i u^2}{\omega_2(\omega_1 \pm 2\omega_2)}}\, \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Übt man jetzt T aus, so folgt wieder unter Benutzung von (4) S. 482:

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{\pm 2\omega_1 - \omega_2}, \frac{\omega}{\mp 2\omega + 1}\right) = i\sqrt{\frac{1}{\omega} \mp 2}\,\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\pm 2\pi i u^2}{\omega_2(\pm 2\omega_1 - \omega_2)}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß ϑ_3 eine gerade Funktion ihres ersten Argumentes, können wir hierfür auch schreiben:

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{\mp 2\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega}{\mp 2\omega + 1}\right) = i\sqrt{\frac{1}{\omega} \mp 2}\,\sqrt{-\omega}\, e^{\frac{\mp 2\pi i u^2}{\omega_2(\mp 2\omega_1 + \omega_2)}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Man entscheidet nun leicht, welches Vorzeichen in:

$$i\sqrt{\frac{1}{\omega} \mp 2}\,\sqrt{-\omega} = i\sqrt{-\frac{1}{-\omega} \mp 2}\,\sqrt{-\omega} = \pm\sqrt{\mp 2\omega + 1}$$

vor dem Wurzelzeichen rechter Hand zu gelten hat. Da nämlich die links stehenden Wurzeln einzeln dem vierten Quadranten angehören und demnach ihr mit i multipliziertes Produkt positiven reellen Bestandteil hat, so gilt das obere Zeichen. *Die Substitutionen $S'^{\pm 1}$ und $T'^{\pm 1}$ üben auf die ϑ_3-Funktion die folgende Wirkung aus:*

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega \pm 2\right) = \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right), \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{\mp 2\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega}{\mp 2\omega + 1}\right) = \sqrt{\mp 2\omega + 1}\, e^{\frac{\mp 2\pi i u^2}{\omega_2(\mp 2\omega_1 + \omega_2)}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right). \end{cases}$$

Auf die Substitution -1 kommen wir noch zurück.

Gegenüber einer beliebigen Substitution der homogenen $\Gamma_6^{(\omega)}$ zeigt die ϑ_3-Funktion zufolge (2) S. 480 das Verhalten:

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \pm\, i^{\frac{\delta - 1}{2}}\sqrt{\gamma\omega + \delta}\, e^{\frac{\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

Das rechts gültige Zeichen ist zwar noch unbekannt, aber in jedem Falle eindeutig bestimmt, wenn wir nur die obige Festsetzung über $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ noch dahin ergänzen, *daß für $\gamma = 0$ (und also $\delta = \pm 1$) der Wert $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ gleich 1 oder i sein soll, je nachdem $\delta = +1$ oder -1 ist.* Alle Substitutionen der homogenen $\Gamma_6^{(\omega)}$ mit dem gleichen Paare γ, δ gehen aus einer unter ihnen nach dem Gesetze:

$$\omega_1' = (\alpha + 2n\gamma)\omega_1 + (\beta + 2n\delta)\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

hervor. Da zufolge (1):

$$\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2'}, \omega' + 2n\right) = \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2'}, \omega'\right)$$

ist, so gilt in der soeben für ϑ_3 angesetzten Gleichung bei allen Substitutionen mit dem gleichen Paare γ, δ rechts ein und dasselbe Zeichen. Dasselbe ist also allein von γ und δ abhängig und werde dieserhalb symbolisch durch (γ, δ) bezeichnet. Wir haben also den Ansatz:

$$(2)\quad \vartheta_3\left(\frac{u}{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = (\gamma, \delta)\, i^{\frac{\delta - 1}{2}}\sqrt{\gamma\omega + \delta}\, e^{\frac{\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)$$

und notieren aus den bisherigen Ergebnissen sogleich:

(3) $\quad (0,1) = 1, \quad (-2,1) = 1, \quad (2,1) = 1, \quad (0,-1) = 1,$

wobei die letzte Angabe eine Folge unserer Festsetzung über $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ im Falle $\gamma = 0$, $\delta = -1$ ist und übrigens die Substitution -1 erledigt.

Für den ϑ_3-Nullwert, den wir $\vartheta_3(\omega)$ schreiben, folgt aus (1):

$$(4) \qquad \begin{cases} \vartheta_3(\omega \pm 2) = \vartheta_3(\omega), \\ \vartheta_3\left(\frac{\omega}{\mp 2\omega + 1}\right) = \sqrt{\mp 2\omega + 1}\ \vartheta_3(\omega), \end{cases}$$

und andererseits liefert die Formel (2) den Ansatz:

$$(5) \qquad \vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = (\gamma, \delta)\, i^{\frac{\delta - 1}{2}} \sqrt{\gamma\omega + \delta}\ \vartheta_3(\omega).$$

Beim Kombinieren der Substitutionen können wir gleich mit diesen Formeln arbeiten und entledigen uns auf diese Art der Exponentialfaktoren, die zwar keine Schwierigkeit machen, aber lästig sind. Nur müssen wir natürlich nach wie vor die homogenen Substitutionen anwenden, zwar nicht der Thetafunktion $\vartheta_3(\omega)$ selbst halber (die ja in ω_1, ω_2 homogen von nullter Dimension ist), sondern weil wir eben zur Ergründung ihres Verhaltens mit $\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ zu arbeiten genötigt sind.

Da nach dem eben Gesagten bei gleichzeitigem Zeichenwechsel von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die linke Seite von (5) unverändert bleibt, so gilt:

$$(-\gamma, -\delta)\, i^{\frac{-\delta - 1}{2}} \sqrt{-\gamma\omega - \delta} = (\gamma, \delta)\, i^{\frac{\delta - 1}{2}} \sqrt{\gamma\omega + \delta}.$$

Für $\gamma = 0$ führt dies auf Bekanntes (vgl. (3)). Ist $\gamma \gtrless 0$, so gilt:

$$\sqrt{-\gamma\omega - \delta} = -i\,\mathrm{sgn}(\gamma) \sqrt{\gamma\omega + \delta}.$$

wenn wir unter $\mathrm{sgn}(\gamma)$, d. h. „Signum" von γ, das Vorzeichen von γ verstehen; man zeigt nämlich sofort, daß im Falle $\mathrm{sgn}(\gamma) = +1$ der Wert $-i\,\mathrm{sgn}(\gamma)\sqrt{\gamma\omega + \delta}$ dem vierten, für $\mathrm{sgn}(\gamma) = -1$ aber dem ersten Quadranten angehört. Das Symbol (γ, δ) gehorcht demnach für $\gamma \gtrless 0$ der Regel:

$$(6) \qquad (-\gamma, -\delta) = (-1)^{\frac{\delta + 1}{2}}\, \mathrm{sgn}(\gamma)\, (\gamma, \delta).$$

Verstehen wir (wie früher) unter $\bar{\omega}$ den zu ω konjugiert komplexen Wert, so sind je zwei Punkte ω und $-\bar{\omega}$ symmetrisch zur imaginären Achse gelegen, und die beiden zugehörigen Werte q sind wieder konjugiert komplex. Somit folgt aus:

$$\vartheta_3(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots.$$

unmittelbar, daß zu ω und $-\bar{\omega}$ auch konjugiert komplexe Werte des ϑ_3-Nullwertes gehören, was wir durch:

$$(7) \qquad \vartheta_3(-\bar{\omega}) = \bar{\vartheta}_3(\omega)$$

zum Ausdruck bringen. Setzen wir nun in (5) für ω den Wert $-\bar{\omega}$ ein, so folgt, wenn wir auf die linke Seite die Relation (7) gleich wieder anwenden:

$$\vartheta_3\left(-\frac{\alpha\bar{\omega}-\beta}{-\gamma\bar{\omega}+\delta}\right)=\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega-\beta}{-\gamma\omega+\delta}\right)=(\gamma,\delta)\,i^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{-\gamma\bar{\omega}+\delta}\;\vartheta_3(\omega).$$

Ersetzen wir hier jeden Bestandteil der Gleichung durch seinen konjugiert komplexen Wert, so erfordert nur wieder die Quadratwurzel eine Überlegung. Konjugiert zu $\sqrt{-\gamma\bar{\omega}+\delta}$ ist $\sqrt{-\gamma\omega+\delta}$; jedoch ist dabei der eine Fall $\gamma=0$, $\delta=-1$ auszunehmen, wo (obiger Festsetzung zufolge) $-\sqrt{-\gamma\omega+\delta}$ zu $\sqrt{-\gamma\bar{\omega}+\delta}$ konjugiert sein würde. Schließen wir diesen Fall aus, so ergibt sich:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega-\beta}{-\gamma\omega+\delta}\right)=(\gamma,\delta)\,(-i)^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{-\gamma\omega+\delta}\;\vartheta_3(\omega).$$

Berechnen wir den links stehenden Ausdruck unmittelbar auf Grund von (5), so folgt:

$$(-\gamma,\delta)\,i^{\frac{\delta-1}{2}}=(\gamma,\delta)(-i)^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

Das Symbol (γ,δ) hat demnach abgesehen vom Falle $\gamma=0$, $\delta=-1$ die Eigenschaft:

$$(8)\qquad (-\gamma,\delta)=(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(\gamma,\delta).$$

Durch Kombination von (6) und (8) ergibt sich weiter als für $\gamma \gtrless 0$ gültig:

$$(9)\qquad (\gamma,-\delta)=\operatorname{sgn}(\gamma)(\gamma,\delta).$$

Rekursionsformeln zu Berechnung der Werte (γ,δ) findet man durch Ausübung der Substitutionen $S'^{\pm 1}$ und $T'^{\pm 1}$ auf die in (5) enthaltenen ω unter Benutzung von (4). Erstlich ergibt sich:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta\pm 2\alpha}{\gamma\omega+\delta\pm 2\gamma}\right)=(\gamma,\delta)\,i^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{\gamma\omega+\delta\pm 2\gamma}\;\vartheta_3(\omega).$$

Indem man auf den links stehenden Ausdruck die Regel (5) direkt anwendet und das Ergebnis mit der rechten Seite der letzten Gleichung vergleicht, folgt als erste Rekursionsformel für das Symbol (γ,δ):

$$(10)\qquad (\gamma,\delta)=(-1)^{\frac{\gamma}{2}}(\gamma,\delta\pm 2\gamma).$$

Bei Ausübung der Substitution $T'^{\pm 1}$ auf ω in (5) dürfen wir $\gamma \gtrless 0$ und $\gamma \mp 2\delta \gtrless 0$ voraussetzen; für $\gamma=0$ kommen nur die beiden schon bekannten Symbole $(0,\pm 1)$ in Betracht, für $\gamma\mp 2\delta=0$ ist (insofern γ und δ teilerfremd sind) $\delta=\pm 1$ und also $\gamma=\pm 2$, so daß wir auf die aus dem Bisherigen schon bekannten Symbole $(\pm 2, 1)$, $(\pm 2,-1)$ zurückkommen. Aus (5) und der zweiten Gleichung (4) folgt nun:

$$\vartheta_3\left(\frac{(\alpha\mp 2\beta)\,\omega+\beta}{(\gamma\mp 2\delta)\,\omega+\delta}\right)=(\gamma,\delta)\,i^{\frac{\delta-1}{2}}\sqrt{\gamma\frac{\omega}{\mp 2\omega+1}+\delta}\,\sqrt{\mp 2\omega+1}\;\vartheta_3(\omega).$$

Gelten erstlich die unteren Zeichen, so haben wir die Vorzeichenbestimmung in:

$$\sqrt{\gamma \frac{\omega}{2\omega+1} + \delta}\sqrt{2\omega+1} = \pm\sqrt{(\gamma+2\delta)\omega+\delta}$$

auszuführen. Ist $\gamma < 0$, so liegt das links stehende Produkt im ersten oder vierten Quadranten, so daß das obere Zeichen gilt. Für $\gamma > 0$ liegt der links stehende Wert im ersten oder zweiten Quadranten; die rechte Seite aber liegt, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, im ersten oder dritten Quadranten für $\gamma + 2\delta > 0$ und im vierten oder zweiten Quadranten für $\gamma + 2\delta < 0$. Also gilt für $\gamma > 0, \gamma + 2\delta > 0$ das obere und für $\gamma > 0, \gamma + 2\delta < 0$ das untere Zeichen. Entsprechende Schlüsse gelten bei Diskussion der Gleichung:

$$\sqrt{\gamma \frac{\omega}{-2\omega+1} + \delta}\sqrt{-2\omega+1} = \pm\sqrt{(\gamma-2\delta)\omega+\delta}.$$

Das untere Zeichen gilt, wenn $\gamma < 0, \gamma - 2\delta > 0$ gilt; in allen übrigen Fällen gilt das obere Zeichen. Hiernach haben wir als weitere Rekursionsformeln für $\gamma \gtrless 0$ und $\gamma + 2\delta \gtrless 0$:

(11) $$(\gamma, \delta) = \pm(\gamma + 2\delta, \delta),$$

wo das untere Zeichen nur im Falle:

(12) $$\operatorname{sgn}(\gamma) = -\operatorname{sgn}(\gamma + 2\delta) = 1$$

zutrifft, und weiter für $\gamma \gtrless 0$ und $\gamma - 2\delta \gtrless 0$:

(13) $$(\gamma, \delta) = \pm(\gamma - 2\delta, \delta),$$

wo das untere Zeichen nur für:

(14) $$\operatorname{sgn}(\gamma) = -\operatorname{sgn}(\gamma - 2\delta) = -1$$

gültig ist.

Durch die Rekursionsformeln (10), (11) und (13) ist nun der Wert von (γ, δ) für jedes Paar teilerfremder ganzer Zahlen γ, δ, von denen die erste gerade ist, berechenbar. Ist $|\gamma| > |\delta|$, so hat man eine der Formeln (11), (13) so oft anzuwenden, bis man zu einem Paar γ', δ gelangt, bei dem $|\gamma'| < |\delta|$ zutrifft. Hierauf ist (10) so oft anzuwenden, bis man zu einem Paar γ', δ' mit $|\gamma'| > |\delta'|$ kommt. Da die Zahlen der sich einstellenden Paare stets teilerfremd bleiben, so können wir bei der Verringerung ihrer Absolutwerte nicht zu einer verschwindenden ersten Zahl gelangen, bevor die zweite Zahl gleich ± 1 geworden wäre. Sobald aber die zweite Zahl gleich ± 1 geworden ist, wird man durch Anwendung von (11) oder (13) auf einen der vier Werte:

(15) $$(2, 1) = 1, \quad (-2, 1) = 1, \quad (2, -1) = 1, \quad (-2, -1) = -1$$

rekurrieren können. Wir dürfen hiernach geradezu den Satz aussprechen:

Durch die Rekursionsformeln (10), (11) *und* (13) *im Verein mit den Angaben* (15) *kann das Symbol* (γ, δ) *für jedes Paar teilerfremder ganzer Zahlen* γ, δ, *von denen die erste gerade ist, als endgültig und eindeutig definiert angesehen werden.*

Das in (11) und (13) gültige Vorzeichen läßt sich übrigens in einfacher Weise mittelst des Symboles sgn darstellen. Wir wollen uns für $\gamma \gtrless 0$ mittelst des Symboles sgn zunächst den Ausdruck:

$$(16) \qquad [\gamma, \delta] = \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(\gamma) + \operatorname{sgn}(\delta) - \operatorname{sgn}(\gamma \cdot \delta))$$

herstellen, dessen Bedeutung einfach die ist, daß $[\gamma, \delta]$ die negative oder positive Einheit bedeutet, je nachdem beide Zahlen γ, δ negativ sind oder eine der drei anderen Zeichenkombinationen vorliegt. Wir können alsdann die Formel (11) ohne Zusatz der Regel (12) in die Gestalt kleiden:

$$(\gamma, \delta) = \frac{[\gamma + 2\delta, \delta]}{[\gamma, \delta]} \cdot (\gamma + 2\delta, \delta).$$

Gilt nämlich die Bedingung (12), d. h. ist $\gamma > 0, \gamma + 2\delta < 0$, so ist $\delta < 0$ und also $[\gamma + 2\delta, \delta] = -1$, $[\gamma, \delta] = +1$, so daß die letzte Gleichung, wie es sein muß, $(\gamma, \delta) = -(\gamma + 2\delta, \delta)$ lautet. Soll andrerseits $[\gamma + 2\delta, \delta] = -[\gamma, \delta]$ sein, so ist notwendig $\delta < 0$, und es sind $\gamma + 2\delta$ und γ von verschiedenem Zeichen, d. h. es ist (da $\delta < 0$ ist) $\gamma + 2\delta < 0$ und $\gamma > 0$, so daß wir zur Bedingung (12) zurückkommen. Ebenso zeigt man, daß die Gleichung (13) mit der Regel (14) durch die eine Formel:

$$(\gamma, \delta) = \frac{[\gamma - 2\delta, \delta]}{[\gamma, \delta]} \cdot (\gamma - 2\delta, \delta)$$

ersetzbar ist.

Aus dieser Sachlage ergibt sich als naturgemäßer Schritt, daß wir an Stelle von (γ, δ) zweckmäßiger Weise überhaupt mit dem Vorzeichen $[\gamma, \delta] \cdot (\gamma, \delta)$, für welches wir die kürzere Bezeichnung:

$$(17) \qquad [\gamma, \delta]\,(\gamma, \delta) = \left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$$

einführen, arbeiten sollten. Wir haben dabei nur noch hinzu zu setzen, daß wir für $\gamma = 0$ etwa einfach:

$$(18) \qquad \left[\frac{0}{\pm 1}\right] = (0, \pm 1) = 1$$

setzen wollen. Die Rekursionsregeln für dieses neue Symbol sind dann:

$$(19) \quad \left[\frac{\gamma \pm 2\delta}{\delta}\right] = \left[\frac{\gamma}{\delta}\right], \qquad [\gamma, \delta]\left[\frac{\gamma}{\delta}\right] = (-1)^{\frac{\gamma}{2}}\,[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left[\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right],$$

und man hat das Symbol durch diese Regeln und die Angaben:

$$(20) \qquad \left[\frac{\pm 2}{1}\right] = 1, \quad \left[\frac{\pm 2}{-1}\right] = 1, \quad \left[\frac{0}{\pm 1}\right] = 1$$

als in allen Fällen eindeutig festgelegt anzusehen. Übrigens nimmt die Regel (9) die Gestalt an:

$$(21)\qquad \left[\frac{\gamma}{-\delta}\right] = \left[\frac{\gamma}{\delta}\right],$$

während aus (8) und (6) sich ergibt:

$$(22)\qquad \left[\frac{-\gamma}{\delta}\right] = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\operatorname{sgn}(\delta)\left[\frac{\gamma}{\delta}\right],\quad \left[\frac{-\gamma}{-\delta}\right] = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\operatorname{sgn}(\delta)\left[\frac{\gamma}{\delta}\right].$$

Die Elemente der Zahlentheorie kennen nun in dem bei den quadratischen Resten auftretenden Legendre-Jacobischen Zeichen $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$ ein Symbol[1]), dessen Analogie zu $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ selbst dann augenfällig hervortreten müßte, wenn nicht durch andere Untersuchungen (vgl. § 10) die Beziehung zwischen beiden Symbolen bereits bekannt geworden wäre. Es besteht der Satz, *daß das Symbol* $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ *geradezu identisch ist mit dem Legendre-Jacobischen Zeichen* $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$, *wenn wir dasselbe nur in der Weise erweitern wollen, daß es für* $\delta = \pm 1$ *den Wert* $+1$ *haben soll.* Natürlich kommen für uns nur die Paare teilerfremder Zahlen γ, δ in Betracht, bei denen die erste Zahl γ gerade ist.

Zunächst kommen, wenn wir $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ als Legendre-Jacobisches Zeichen lesen, die erste Regel (19) sowie die Gleichungen (21) und (22) auf bekannte Regeln über jenes Zeichen zurück, die (nach der getroffenen Erweiterung) auch für $\delta = \pm 1$ gültig bleiben. Auch die Gleichungen (20) gelten für das Legendre-Jacobische Zeichen. Da nun unser obiges Vorzeichen $\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]$ durch die Gleichungen (19) und (20) eindeutig festgelegt ist, so ist unsere Behauptung, dasselbe sei mit dem Legendre-Jakobischen Zeichen identisch, bewiesen, wenn wir für das Legendre-Jacobische Zeichen noch die Relation:

$$(23)\qquad [\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\gamma}{2}}[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right)$$

nachzuweisen imstande sind, und zwar natürlich auch in dem (in der Zahlentheorie nicht zur Geltung kommenden) Falle, daß $\delta \pm 2\gamma$ einen der Werte $+1$ oder -1 hat.

Das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste ist für irgendzwei teilerfremde, positive oder negative, ungerade Zahlen P, Q mittelst unseres Zeichens $[P, Q]$ so darstellbar[2]):

$$(24)\qquad \left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}[P, Q]\left(\frac{Q}{P}\right),$$

---

1) S. hierüber Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie" (4. Aufl. Braunschweig 1894), insbesondere S. 104 ff.

2) Vgl. Dirichlet-Dedekind, a. a. O. S. 109.

eine Formel, die auch für die Werte $+1$ oder -1 von P und Q gültig bleibt. Ferner gilt[1]) für jede ungerade Zahl P:

$$(25) \qquad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

Ist nun 2^λ die höchste in γ enthaltene Potenz von 2, so ist:

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \left(\frac{2^\lambda \cdot \gamma'}{\delta}\right) = \left(\frac{2^\lambda}{\delta}\right)\left(\frac{\gamma'}{\delta}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\lambda \left(\frac{\gamma'}{\delta}\right).$$

Also folgt unter Benutzung von (24) und (25), da γ und γ' gleiches Vorzeichen besitzen:

$$[\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = (-1)^{\lambda\frac{\delta^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{\gamma'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma'}\right).$$

Trägt man hier $(\delta \pm 2\gamma)$ an Stelle von δ ein, so folgt:

$$[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right) = (-1)^{\lambda\frac{(\delta \pm 2\gamma)^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{\gamma'-1}{2}\cdot\frac{\delta \pm 2\gamma-1}{2}}\left(\frac{\delta \pm 2\gamma}{\gamma'}\right),$$

eine Gleichung, die man mit Rücksicht darauf, daß γ gerade, δ ungerade und γ Multiplum von γ' ist, leicht so umformt:

$$[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right) = (-1)^{\lambda\frac{\gamma}{2}} \cdot (-1)^{\lambda\frac{\delta^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\frac{\gamma'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma'}\right).$$

Es gilt somit:

$$[\gamma, \delta \pm 2\gamma]\left(\frac{\gamma}{\delta \pm 2\gamma}\right) = (-1)^{\lambda\frac{\gamma}{2}}[\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right);$$

dies ist aber die zu beweisende Formel, da der erste rechts stehende Faktor dann und nur dann gleich -1 ist, wenn γ das Doppelte einer ungeraden Zahl und damit $\lambda = 1$ ist. Unsere Behauptung, *daß sich das bei der Transformation der ϑ_3-Funktion auftretende Vorzeichen* (γ, δ) *mittelst des in* (16) *gegebenen Symbols im Legendre-Jacobischen Zeichen in der Gestalt:*

$$(26) \qquad (\gamma, \delta) = [\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$$

darstelle, ist damit vollständig bewiesen und hierdurch zugleich die interessante Tatsache erkannt, daß die Gesetze des Zeichens (γ, δ) mit der Primfaktorenzerlegung der Zahlen γ und δ zusammenhängen.

Das Verhalten aller vier Thetafunktionen gegenüber den Substitutionen von $\Gamma^{(\omega)}$ ist nun mit Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen leicht angebbar. Für das Verhalten der ϑ_1-Funktion gegenüber irgendeiner Substitution der $\Gamma_6^{(\omega)}$ finden wir aus (2) und der Tabelle von S. 479 mit Benutzung des Umstandes, daß $\alpha \equiv \delta \pmod 4$ zutrifft:

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}, \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = (\gamma, \delta)\, i^{-\frac{\delta-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\delta - \gamma\delta} \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, e^{\frac{\gamma\pi i u^2}{\omega_2(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right).$$

1) Vgl. Dirichlet-Dedekind, a. a. O. S. 108 und 110.

Durch Kombination mit den sechs besonderen mod. 2 inkongruenten Substitutionen, auf welche sich die Entwicklungen von S. 480ff. bezogen, folgt dann aus der eben aufgestellten Gleichung weiter das Verhalten von $\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}, \omega\right)$ gegenüber beliebigen Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$. Die Tabelle von S. 479 macht endlich auch die übrigen ϑ-Funktionen den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ allgemein zugänglich.

Da übrigens zufolge (9) S. 416 mit dem Verhalten der ϑ_1-Funktion gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ dasjenige der eindeutigen Funktion $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\varDelta}$ der ω_1, ω_2 mit bestimmt ist, so können wir nun auch unter Heranziehung der Formeln (10) S. 454 und (13) S. 455 das Verhalten der eindeutigen Funktion:

$$\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\varDelta} \cdot \frac{\sqrt[4]{\varDelta}}{\sqrt[3]{\varDelta}} = \sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\varDelta}$$

von ω gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ angeben.

§ 10. Anwendung auf die Theorie der Gaußschen Summen.

Man hat früher das Verhalten der ϑ-Funktionen gegenüber den Substitutionen der $\Gamma^{(\omega)}$ mit Hilfe der sogenannten „Gaußschen Summen" festgestellt.[1]) Diese Summen, welche in einer bekannten nahen Beziehung zur Theorie der quadratischen Reste stehen[2]), und die andrerseits mit den ϑ-Reihen eng verwandt erscheinen (s. unten), decken den inneren Grund der Tatsache auf, daß wir bei den voraufgehenden Entwicklungen zum Legendre-Jacobischen Zeichen geführt werden mußten. Nachdem es gelungen ist, die Bestimmung des Vorzeichens (γ, δ) auf elementarem Wege mittelst des Reziprozitätssatzes der quadratischen Reste auszuführen, kann man nun umgekehrt die Auswertung der Gaußschen Summen von hieraus leisten, und zwar erscheint dieser Weg gegenüber den sonst benutzten Methoden zur Auswertung jener Summen[3]) ganz besonders einfach.

---

1) S. Hermite, „Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques", Pariser Compt. Rend., Bd. 46 (1858); eine ausführliche Darstellung der Hermiteschen Methode gab Königsberger im 2. Bde. seiner „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen" (Leipzig 1874), S. 53ff.

2) Man vgl. Gauß' Abhandlung „Summatio quarumdam serierum singularium", Göttinger Abh.. Bd. 1 (1811) oder Gauß, „Werke", Bd. 2, S. 9.

3) Man sehe z. B. die Behandlung der Gaußschen Summen bei Bachmann, „Die analytische Zahlentheorie" (Leipzig 1894) S. 146 ff. oder die S. 489 genannten Vorlesungen von Dirichlet-Dedekind, S. 287ff.

Ist $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$, so gilt:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = [\gamma, \delta]\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) i^{\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, \vartheta_3(\omega), \tag{1}$$

falls wir, was geschehen soll, γ als von 0 verschieden annehmen. Üben wir hier auf ω die Substitution T aus, so folgt mit Benutzung der vierten Gleichung (4) S. 482 und der offenbar zutreffenden Relation:

$$\sqrt{\gamma \cdot \frac{1}{-\omega} + \delta}\, \sqrt{-\omega} = [\gamma, \delta] \sqrt{-\delta\omega+\gamma}$$

für die in der bisherigen Bedeutung gebrauchten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\vartheta_3\left(\frac{-\beta\omega+\alpha}{-\delta\omega+\gamma}\right) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i \delta}{4}} \sqrt{-\delta\omega+\gamma}\, \vartheta_3(\omega).$$

Wir schreiben hierfür unter Änderung der Bezeichnung der Koeffizienten:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i \gamma}{4}} \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, \vartheta_3(\omega), \tag{2}$$

eine Gleichung, die also $\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod{2}$ zur Voraussetzung hat. Die Gleichungen (1) und (2) fassen wir in den gemeinsamen Ausdruck zusammen:

$$\vartheta_3\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = c \cdot \sqrt{\gamma\omega+\delta}\, \vartheta_3(\omega) \tag{3}$$

und *wollen weiterhin* $\gamma > 0$ *voraussetzen;* dann ist:

$$c = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) i^{\frac{\delta-1}{2}} \quad \text{oder} \quad = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i \gamma}{4}}, \tag{4}$$

je nachdem $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ oder $\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod{2}$ zutrifft.

Wir gelangen nun zu einem neuen Ausdruck für c, indem wir in (3) für die rechts und links stehenden Funktionen ihre Reihen eintragen. Dabei ergibt sich zunächst:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n^2 \pi i \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}} = c\sqrt{\gamma\omega+\delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n^2 \pi i \omega}.$$

Hier trage man, unter η eine reelle positive Variabele verstanden, ein:

$$\omega = -\frac{\delta}{\gamma} + i\eta, \quad \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{i}{\gamma^2\eta}$$

und gelangt zu der in η identisch bestehenden Relation:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n^2\alpha\pi i}{\gamma} - \frac{n^2\pi}{\gamma^2\eta}} = c\sqrt{\gamma i \eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma} - n^2\pi\eta}.$$

Da eine der beiden Zahlen α, γ gerade ist, so liefern modulo γ kongruente Zahlen n gleiche Werte $e^{\frac{n^2\alpha\pi i}{\gamma}}$. Dieser Umstand gibt uns An-

laß, die Summe linker Hand in der Art zu entwickeln, daß wir $n = l + \gamma m$ setzen, m die gesamten ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen und hernach für l über die Werte $1, 2, \ldots, \gamma$ summieren:

$$(5) \qquad \sum_{l=1}^{\gamma}\left(e^{\frac{l^2\alpha\pi i}{\gamma}}\cdot e^{-\frac{l^2\pi}{\gamma^2\eta}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2\frac{\pi}{\eta}-2m\frac{l\pi}{\gamma\eta}}\right)=c\sqrt{\gamma i\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n^2\delta\pi i}{\gamma}-n^2\pi\eta}.$$

Es ist sehr interessant, daß wir in der auf m bezogenen Summe wieder nichts anderes als einen Spezialfall der Funktion:

$$\vartheta_3(v,\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{m^2\pi i\omega+2m\pi v i},$$

vor uns haben, nämlich einfach die Funktion:

$$\vartheta_3\left(\frac{li}{\gamma\eta},\frac{i}{\eta}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2\frac{\pi}{\eta}-2m\frac{l\pi}{\gamma\eta}}$$

der reellen positiven Variabelen η. Ziehen wir nun die in die Gestalt:

$$e^{-\frac{\pi i v^2}{\omega}}\vartheta_3\left(-\frac{v}{\omega},-\frac{1}{\omega}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-\omega}\,\vartheta_3(v,\omega)$$

umgeschriebene letzte Relation (4) S. 482 heran, so folgt, indem wir $\omega = i\eta$, $v=\frac{l}{\gamma}$ eintragen:

$$e^{-\frac{l^2\pi}{\gamma^2\eta}}\vartheta_3\left(\frac{li}{\gamma\eta},\frac{i}{\eta}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-i\eta}\,\vartheta_3\left(\frac{l}{\gamma},i\eta\right)$$

und also durch Heranziehung der Reihen:

$$e^{-\frac{l^2\pi}{\gamma^2\eta}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2\frac{\pi}{\eta}-2m\frac{l\pi}{\gamma\eta}}=e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-i\eta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-m^2\pi\eta+2m\pi i\frac{l}{\gamma}}.$$

Auf Grund dieses Resultates nimmt die Gleichung (5) die folgende Gestalt an:

$$e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-i\eta}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-m^2\pi\eta}\sum_{l=1}^{\gamma}e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}+2l\pi i\frac{m}{\gamma}}\right)=c\sqrt{i\gamma\eta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-n^2\pi\eta-n^2\pi i\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Da nun $\gamma > 0$ vorausgesetzt war, so gilt:

$$\frac{\sqrt{i\gamma\eta}}{\sqrt{-i\eta}}=+i\sqrt{\gamma},$$

wobei $\sqrt{\gamma}$ positiv zu nehmen ist. Die vorstehende Gleichung kürzt sich demnach zu:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-m^2\pi\eta}\sum_{l=1}^{\gamma}e^{l^2\frac{\alpha\pi i}{\gamma}+2l\pi i\frac{m}{\gamma}}\right)=ce^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-n^2\pi\eta-n^2\pi i\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Wir haben hier zwei einander wertgleiche Reihen vor uns, welche nach positiven ganzzahligen Potenzen der reellen Variabelen $e^{-\pi\eta}$ fortschreiten und für alle unter 1 gelegenen Werte dieser Variabelen konvergieren. Also sind die Reihen gliedweise identisch, und indem wir insbesondere die Absolutglieder einander gleich setzen, folgt:

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\alpha\pi i}{\gamma}} = c e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\gamma}.$$

Die hier links stehende Summe ist nun in der Tat die zu den beiden ganzen Zahlen α, γ gehörende Gaußsche Summe. Da eine der beiden Zahlen α, γ gerade ist, so bleibt das einzelne Glied der Summe unverändert, wenn man l durch eine mod. γ kongruente Zahl ersetzt. Wesentlich ist also für die Herstellung der Reihe nur, daß l irgendein System von γ modulo γ inkongruenten Zahlen durchläuft. Da δ teilerfremd gegen γ ist, so haben wir auch in $l\delta$ ein solches System, wenn l die Werte $1, 2, \ldots, \gamma$ durchläuft. Wir können unsere Summe demnach so umformen:

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\delta \cdot \alpha\delta\pi i}{\gamma}} = \sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\delta\pi i}{\gamma} + l^2 \beta\delta\pi i} = \sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\delta\pi i}{\gamma}},$$

insofern wieder unter den Zahlen β und δ eine gerade ist.

Man sehe nun etwa bei Bachmann a. a. O. nach, daß die beiden hier vorliegenden Fälle, daß entweder γ oder δ gerade ist, während übrigens γ und δ teilerfremd sind und $\gamma > 0$ ist, die einzigen Fälle der Gaußschen Summe sind, welche von Bedeutung sind; alle übrigen Fälle sind teils elementar, teils leicht auf jene beiden zurückführbar. *Für die beiden wesentlichen Fälle der Gaußschen Summen erhalten wir durch Eintragung der Werte c folgende Summenwerte:*

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\delta\pi i}{\gamma}} = e^{\frac{\pi i \delta}{4}} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \sqrt{\gamma}, \quad (\gamma \equiv 0, \delta \equiv 1, (\text{mod. } 2)),$$

$$\sum_{l=1}^{\gamma} e^{l^2 \frac{\delta\pi i}{\gamma}} = i^{\frac{1-\gamma}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \sqrt{\gamma}, \quad (\gamma \equiv 1, \delta \equiv 0, (\text{mod. } 2)),$$

wo $\gamma > 0$ gilt, $\sqrt{\gamma}$ positiv zu nehmen ist und selbstverständlich $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$ bzw. $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ das Legendre-Jacobische Zeichen ist.

Hiermit ist die Theorie der elliptischen Funktionen zweiter Stufe in ihren Grundlagen vollständig entwickelt. Die Verallgemeinerung auf höhere Stufen führt uns zu den Problemen *der „Teilung und Transformation" der elliptischen Funktionen* (erster und zweiter Stufe), welche wir im zweiten Bande behandeln. Die algebraisch-arithmetischen Ausführungen des zweiten Bandes sind auch bedeutungsvoll für die *Durchführung „numerischer Berechnungen" im Gebiete der elliptischen Funktionen,* wie wir sie bei der Besprechung der *„Anwendungen der elliptischen Funktionen"* durchzuführen haben werden.

Sachregister.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Abbildung der ω-Halbebene auf die q-Ebene 300.
- durch eine analytische Funktion 31.
Abelsche Integrale 82.
—s Normalintegral 361.
—s Theorem 214.
Ableitung einer Funktion 2.
—en der Funktionen sn, cn, dn 396.
—en des Logarithmus einer ganzen transzendenten Funktion 60.
Additionstheoreme 202.
Äquianharmonischer Fall 136.
Äquivalente Punkte der u-Ebene 180.
Äquivalenzbegriff bei linearen Substitutionen 119.
Äquivalenz bezüglich der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ 230.
Algebraische Funktion 77.
— Gestalt der Differentiationsprozesse D_ω und D_η 317.
— Integrale 82.
—s Gebilde 80.
Allgemeine Thetafunktionen m^{ter} Ordnung 428.
Amplitude des Legendreschen Integrals 1. Gattung 388.
Analytische Fortsetzung 20.
— Funktion 2, 18.
—r Charakter der Potenzreihe 14.
—s Gebilde 29.
Anzahltheorem über die Nullpunkte einer Thetafunktion m^{ter} Ordnung 425 ff.
— — — — ganzer Modulformen 307 ff.
— — elliptische Funktionen mit gegebenen Polen 226 ff.
Arithmetische Betrachtung der ω-Substitutionen 281.
Assoziatives Gesetz bei linearen Substitutionen 127.
Ausartung der elliptischen Funktionen 1. Stufe 278.
— — — — 2. Stufe 472.
Ausgezeichnete Untergruppen 2. Stufe 378, 439.
Außerwesentlich singulärer Punkt 29.

Bahnkurve einer Substitution 67.
Belegung einer Fläche mit Funktionswerten 93.
Bereich der reduzierten Periodenquotienten 187.
Beständig konvergente Potenzreihe 11.
Blätter eines Bereiches 21.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 2.
Cauchys Integralformel 16.
— Integralsatz 4.
Cauchy-Taylorsche Reihe 17.
Charakteristik der Thetafunktionen 421.

Darstellung der elliptischen Funktionen als Aggregate 206.
— — — — als Quotienten von σ Produkten 214.
— — — — 2. und 3. Art durch die σ-Funktion 219 ff.
— des allgemeinsten elliptischen Integrals 152.
Definitionsbereich einer Funktion 24.
Determinante einer linearen Substitution 66.
Diametralsymmetrie 76.
Diëdergruppe 108, 349.
— G_6 beim Doppelverhältnis λ 348.
Diëdrische Kugelteilung 349.
Differential 1. Gattung 144.
Differentialgleichung der σ-Funktion 322.
— — Thetafunktionen 414, 421.
— 3. Ordnung für $\omega(J)$ 328.
—en der Funktionen $Al(w)$ 470.
—en — vollständigen Integrale K, K' 463.
— von Cauchy und Riemann 2.
Differentiationsprozeß D_η zur Herstellung von Modulformen 2. Stufe 447.
—e D_ω und D_η 314 ff.
Diskontinuitätsbereich der Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe $\Gamma_6^{(\omega)}$ 437.
— der Modulgruppe 295.
— einer Gruppe 233.
Diskriminante der Verzweigungsform 124.
Doppelreihen für g_2 und g_3 262.
— — η_1 und η_2 263.
Doppelpyramidentypus bei Gruppen 132.
Doppelte Periodizität der elliptischen Funktionen 195.
Doppeltperiodische Funktion, Begriff derselben 250.

Doppeltperiodische Funktionen, Existenzbeweis derselben 259.
Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte 345.
Dreiecksnetz der ω-Halbebene 289 ff.

Eindeutigkeit der elliptischen Funktionen 194.
Einheitskreis der z-Ebene 23.
Einschachtelung, Methode der — 10, 16, 25.
Elementarintegrale, Darstellung derselben in u 202 ff.
— 3. Gattung 145.
— 2. Gattung 144.
Elliptische Funktionen, Begriff derselben 194, 197.
— — 3. Art 217.
— — 1. Stufe 198.
— — — — als Funktionen von drei Argumenten 318.
— —, Grundproblem ihrer Theorie 96.
— — n^{ter} Stufe 376.
— — 2. Art 217.
— — 2. Stufe 382 ff.
— — — — als Funktionen von zwei Argumenten 466.
Elliptische Integrale 116, 140.
— —, Einteilung in Gattungen 142 ff.
— — 1. Stufe 152.
— —, Legendresche Normalformen 367 ff.
— — 2. und 4. Stufe 359 ff.
Elliptische Modulformen, s. Modulformen.
— Modulfunktionen, s. Modulfunktionen.
— Modulfunktion $J(\omega)$ 273.
Elliptische Substitution 71.
Erweiterte Modulgruppe 284.
Erzeugung der Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe 437.
— — Modulgruppe 297.
Eulerscher Polyedersatz 83.
Existenz algebraischer Funktionen 82.
—bereich einer Funktion 24.
— der doppeltperiodischen Funktionen 259.
Exponentialfunktion 52.

Feld einer Funktion 24.
Fixpunkte einer Substitution 67, 70.
Fouriersche Reihe für die σ-Funkt. 272.
— —n für die geraden σ-Funktionen 413 ff.
— —n für $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$ 270.
— —n für sn, cn, dn 412.
Funktionaldeterminanten der Modulformen 316 ff.
Funktion, Begriff der analytischen — 2, 18
Funktionenkörper 81.
Funktionselement 20.

Gammafunktion 338.
Ganze elliptische Funktionen m^{ter} Ordnung 221.
— Modulformen 1. Stufe 305.
— rationale Funktion 44.
— tranzendente Funktion 49.
Gattungen der elliptischen Integrale 142.
Gaußsche Π-Funktion 338.
— Summen 494.
Geschlecht einer Riemannschen Fläche 87.
Gitterpunkte im Parallelogrammnetz 174.
Gleichändrige elliptische Funktionen 2. oder 3. Art 218, 429.
Gleichberechtigte Kongruenzgruppen 2. Stufe 380.
Gleichmäßige Konvergenz 12.
Grenzpunkt der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ 233.
Grundproblem der Theorie der elliptischen Funktionen 96.
Gruppe der doppeltperiodischen Funktionen 229.
— — ω-Substitutionen (Modulgruppe) 282.
—, endliche — linearer Substitutionen 128.
— von Transformationen bei der hypergeometrischen Differentialgleichung 108.

Häufungsstelle 10.
Harmonischer Fall 135.
Hauptcharakteristiken der Thetafunktionen 422.
Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe 375.
— 2. Stufe in der Modulgruppe 436 ff.
Henkelflächen 86.
Hermitescher Satz 228.
Höhe einer ganzen transzendenten Funktion 60.
Homogenes Differential 143.
Homogene Variabele 119.
— ω-Substitionen 283.
Hyperbolische Substitutionen 71.
Hypergeometrische Differentialgleichung 105.
— — für die normierten Perioden Ω_1, Ω_2 330.
— — — — vollständigen Integrale K, K' 463.
Hypergeometrische Reihen 110.
— — für die normierten Perioden Ω_1, Ω_2 334 ff.
— — — — vollständigen Integrale K, K' 465 ff.

Identische Substitution 127.
Index einer Untergruppe 438.
Integral, s. algebraische —e, Abelsche —e, elliptische —e usw.
— 1. Gattung, eingehende Theorie 164 ff.
—formel von Cauchy 16.
—modul 367.
—satz von Cauchy 4.
Integration der Potenzreihen 13.
Invariante Darstellung der Elementarintegrale 146 ff.
Invarianten, Begriff der — 120.
— der Verzweigunsform als Modulformen 310.
—, irrationale — der Verzweigungsform 343.
—, rationale — der Verzweigungsform 122, 124.
Invarianz der Funktionen erster Stufe 261.
—von J bei rationaler Transformation 137.
Inverse Substitution 127.
Inversion an einem Kreise 73.
— der Funktionen 34.
— der Modulfunktion $J(\omega)$ 336.
— des elliptischen Integrals 1. Gattung 2. Stufe 389.
Irreduzibilität eines Polynoms $G(w,z)$ 79.

Jacobische Funktionen (ganze elliptische Funktionen) 221.
— — sn, cn, dn 389.
— Integralmoduln 367, 372.
— Thetafunktionen 417.

Kettenbruchentwicklung der ω-Substitutionen 298, 438.
Körper algebraischer Funktionen 81, 92.
— elliptischer Funktionen 96, 197.
Kogrediente Variabelenpaare 310.
Kommutatives Gesetz, Ungültigkeit bei linearen Substitutionen 127.
Komplementärer Integralmodul 372.
Konforme Abbildung 31.
Kongruenzgruppen 2. Stufe 377.
Kongruenz, im arithmetischen Sinne 281.
Konjugierte Rückkehrschnitte 89.
Kontinuierliche Gruppe bei der Fläche F_2 189.
Kontragrediente Variabelenpaare 314.
Konvergenz der hypergeometrischen Reihe an der Konvergenzgrenze 338.
— erzeugende Zusatzfaktoren 57 ff. 263.
—kreis 11.
—radius 11.
Kreisring 86.
— als Abbild des Periodenparallelogramms 265.
—, Funktionen des —s 266.
Kreisverwandtschaft 66.
—, indirekte 73.
Kugeldrehungen zur Erklärung von Gruppen 130.
Kugelfläche zur Darstellung komplexer Werte 22.

Laurentsche Reihe 41.
—r Satz 42.
Legendre-Jacobisches Zeichen 489.
Legendresche Normalintegrale 367 ff.
— Relation 160, 373.
—r Integralmodul 367.
— vollständige Integrale 372 ff.
Lemniskatische Funktionen 193.
Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung 97.
— — — — für die normierten Perioden Ω_1, Ω_2 326.
— — — — für die vollständigen Integrale K, K' 463.
Lineare Substitutionen 66, 126.
— — 2. Art 73.
Lineare Transformation der Funktionen $Al(w)$ 476.
— — — Jacobischen Funktionen sn, cn, dn 475.
— — — Perioden 184.
— — — —, geometrisch gedeutet 298.
— — — Thetafunktionen 479 ff.
Linearfaktorenzerlegung ganzer Funktionen 46.
Linear-unabhängige Funktionssysteme bei gegebenen Polen 225, 425 ff.
— — Lösungen einer Differentialgleichung 100.
Logarithmische Spirale 68.
—s Residuum 38.
— Unstetigkeitspunkte bei Integralen 141.
Loxodrome 68.
Loxodromische Substitutionen 71.

Mehrfach zusammenhängender Bereich 3.
Modul der Abbildung 31.
— — Riemannschen Fläche F_2 180.
Modulformen 1. Stufe 305.
— 2. Stufe 446.
Modulfunktionen 1. Stufe 305.
Modulfunktion $J(\omega)$ 273.
Modulfunktionen 2. Stufe 441.
Modulgruppe 282.

Modulgruppe 2. Art (erweiterte —) 284.
Multiplikator einer Substitution 70.

Natürliche Grenze der Modulfunktionen 303.
— — einer Funktion 30.
Niveaukurve einer Substitution 67.
Normale Variabele einer Stelle der Fläche F_2 143.
Normalgestalten der Verzweigungsform 123, 353, 357.
Normalintegrale 1. Stufe 152.
— von Legendre 367 ff.
— 2. und 4. Stufe 359 ff.
Normalintegral von Abel 361.
— — Riemann 360.
— 2. Gattung 1. Stufe $\zeta(u)$ 198.
Normierung der Perioden 325.
Nullpunkt einer Funktion 27.

Oktaedergleichung 357.
Oktaedergruppe 109, 355.
Ordnung einer ganzen elliptischen Funktion 3. Art 220.
— — Gruppe 128.
— — Thetafunktion 423.

Parabolische Substitutionen 72.
Parallelogrammnetz 174.
Parallelstreifen der u-Ebene als ausgearteter Diskontinuitätsbereich 244.
Partialbruchreihen, s. Teilbruchreihen.
Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen 61.
Partielle Differentialgleichung der σ-Funktion 322.
— — — Thetafunktionen 414, 421.
— —en der Al-Funktionen 470.
— —en für die Perioden 324 ff.
Periode einer elliptischen Substitution 128.
— eines Integrales 7.
—n der Elementarintegrale 3. Gattung 162.
—n — elliptischen Integrale 142.
—n — Normalintegrale 1. und 2. Gattung 158.
Periodenparallelogramm 174.
Periodenquotient 175.
Periodenrelationen 161 ff.
Periodenweg 8.
Periodizität der Funktionen sn, cn, dn 390.
Perspektivität 76.
Picardscher Satz 54.
Pol einer Funktion 27.
Positiver Umlaufssinn 5.
Potenzreihe 9.
— der σ-Funktion 208.
—n — Funktionen $Al(w)$ 403.
—n — — $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$ 200.
—n — — sn, cn, dn 390.
—n für g_2, g_3, $\varDelta$ und J 274.
Primform 212.
Primfunktion 56, 210.
Primitive Periodenpaare 195, 235.
Prinzip von Hermite 228, 429.
Produktdarstellung der Diskriminante $\varDelta$ 313.
— — drei geraden σ-Funktionen 405.
— — elliptischen Funktionen 2. Stufe 405, 408
— — σ-Funktion 258, 268.
— — Thetafunktionen 418.
— ganzer transzendenter Funktionen 60.
— von Modulfunktionen höherer Stufen 407 ff.

Querschnitt in einem berandeten Bereiche 3.
Querschnittsysteme auf Riemannschen Flächen 88 ff.
Querschnittsystem, reduziertes — auf der F_2 177, 241.

Randpunkt eines Bereiches 26.
Rationale Funktion 61.
— Punkte der reellen ω-Axe 292 ff.
Reduzierter Periodenquotient 187.
Reduziertes Periodenpaar 178.
— Querschnittsystem 177, 241.
Reguläre Kurve 3.
Reihe für die 24. Wurzel der Diskriminante $\varDelta$ 433.
—n, einfach unendliche — für g_2, g_3, η_2 271.
Reihenrest 12.
Residuensätze 38 ff.
Residuum einer Funktion 37.
Riemann-Rochscher Satz 227.
Riemannsche Fläche 47, 64, 76.
—s Normalintegral 360.
Rückkehrschnitt 83.
—e, konjugierte — 89.

Schlichtheit eines Bereiches 28.
Schwarzscher Differentialausdruck 329.
Sechsecknetz 242.
Sechseck, zentriertes — im Kreise als Diskontinuitätsbereich 239.

Sigmafunktion 208, 258.
—en höherer Stufen 450.
—en 2. Stufe 384.
Simultane Invarianten eines Formensystems 342.
Singulärer Punkt einer Funktion 26.
Singuläre Stellen bei linearen Differentialgleichungen 102.
Spiegelung 73.
Stereographische Projektion 22.
Stufenteilung, Prinzip der — 117, 374.
Substitution, lineare — 66 ff., 126.
Substitutionsgruppe der doppeltperiodischen Funktionen 229.
— — geraden doppeltperiodischen Funktionen 246.
—n endlicher Ordnung 128 ff.
— des Periodenquotienten ω (Modulgruppe) 282.
Symmetriekreise der Modulgruppe 285.
Symmetriekreis einer Spiegelung 73.
Symmetrische Periodenparallelogramme 249.

Taylorsche Reihe 14.
Teilbruchreihen 60.
— für $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$ 260.
Ternäre Gruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$ 319.
Tetraedergruppe 133.
Thetafunktionen 417.
— der Charakteristik (g, h) 421.
— höherer Ordnung 423.
Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung 107.
— durch reziproke Radien 73.
— einer Gruppe 129.
— — Substitution 128.
—en der Gruppe $\Gamma^{(u)}$ in sich 244 ff.
—en — Verzweigungsform in sich 134.
Transzendent normierte Integrale 2. und 3. Gattung 163.

Überall endliches Integral 142.

Umgebung eines Punktes 1.
Unbrauchbarkeit eines reellen Periodenquotienten 231 ff.
Uniformisierende Variabele 194.
Unimodulare Substitution 120.
Untergruppe 129.

Vergrößerungsverhältnis der Abbildung 31.
Vertauschbare Substitutionen 131.
Vertauschbarkeit von Parameter und Argument bei Integralen 3. Gattung 150, 163, 212.
Verzweigungsform 119.
— 1. Stufe 123.
— 4. Stufe 357.
— 2. Stufe 353.
Verzweigungspunkt 28.
Verzweigungsschnitt 28.
Vierergruppe 109, 130.
Vollständige Integrale Legendres 372 ff.
— — — als hypergeometrische Funktionen von k^2 465 ff.

Weierstraßsche Funktionen $Al(w)$ 401 ff.
— — —, Beziehung zu den Thetafunktionen 468.
— — $\wp(u)$, $\wp'(u)$ 198.
— gerade σ-Funktionen 384.
— Normalintegrale 152.
— σ-Funktion 208, 258.
Wertigkeit einer algebraischen Funktion 91.
— — doppeltperiodischen Funktion 253.
— — elliptischen Funktion 195.
— — ganzen rationalen Funktion 46.
— — rationalen Funktion 62.
Wesentlich singulärer Punkt 29, 50.
— — — der elliptischen Funktionen 195.
Windungsfläche 28.
Winkeltreue Abbildung 31.
Wurzelfunktionen 386.
Wurzeln der Diskriminante, Verhalten bei linearer Transformation 454 ff.
— — Integralmoduln, Verhalten bei linearer Transformation 459 ff.

Zusammenhang einer Riemannschen Fläche 83.
Zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten 95.
Zweig einer analytischen Funktion 8, 21.
Zyklische Gruppe 129.



